

Raciocínio diagramático no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no contexto de itinerários formativos

Diagrammatic reasoning in the development of mathematical modelling activities in the context of formative itineraries

Ariely Aparecida Caruzo¹
Karina Alessandra Pessoa da Silva²

Resumo: Este artigo tem como objetivo evidenciar os conhecimentos mobilizados por alunos do 3º ano do Novo Ensino Médio ao desenvolverem uma atividade de modelagem matemática no contexto de três trilhas de aprendizagem de um itinerário formativo. A pesquisa qualitativa, subsidiada no processo de triangulação, se fundamenta no quadro teórico da modelagem matemática como abordagem didático-pedagógica e no raciocínio diagramático como possibilidade para evidenciar a construção de conhecimento. Analisamos os registros escritos e as transcrições de áudios de uma turma de 26 alunos de uma escola cívico-militar do Paraná, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem sob a temática agricultura. Como resultado inferimos que a atividade de modelagem, desenvolvida de modo transversal às trilhas de aprendizagem, atingiu os objetivos delineados nos documentos oficiais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Semiótica. Diagramas. Novo Ensino Médio. Trilhas de Aprendizagem.

Abstract: This article aims to highlight the knowledge mobilized by 3rd-year students of the New High School when developing a mathematical modeling activity within the context of three learning paths of a formative itinerary. The qualitative research, subsidized in the triangulation process, is based on the theoretical framework of mathematical modeling as a didactic-pedagogical approach and on diagrammatic reasoning as a possibility for demonstrating knowledge construction. We analyzed the written records and audio transcripts of a class of 26 students from a civic-military school in Paraná in the development of a modeling activity on the topic of agriculture. As a result, we inferred that the modeling activity, developed transversal to learning paths, achieved the objectives outlined in official documents.

Keywords: Mathematical Modelling. Semiotics. Diagrams. New High School. Learning Paths.

1 Introdução

Nas salas de aula das escolas públicas do estado do Paraná, desde o ano de 2022, a implementação dos chamados Itinerários Formativos é uma realidade no contexto do Novo Ensino Médio que desafia o cotidiano escolar e se configura como responsabilidade social. Um itinerário formativo é constituído por um conjunto de disciplinas – as trilhas de aprendizagem –, projetos, oficinas, núcleos de estudo, que visa aprofundar os conhecimentos de uma ou duas áreas (Matemáticas e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), bem como a formação técnica e profissional (FTP). Embora existam críticas sobre a estruturação dos itinerários formativos (Lopes, 2019; Silva & Maciel, 2021; Silva, Krawczyk & Calçada, 2023), entendemos que fazem parte da realidade do cotidiano escolar e, como tal, é preciso lidar de modo que os

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Apucarana, Paraná - Brasil • arielycaruzo@alunos.utfpr.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-2937-4877>

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Londrina, Paraná - Brasil • karinasilva@utfpr.edu.br • ORCID <http://orcid.org/0000-0002-1766-137X>

conhecimentos sejam construídos com os sujeitos que estão vivenciando esse momento.

Defronte do objetivo de articular conhecimentos de diferentes áreas, entendemos que um itinerário formativo pode se configurar como ambiente profícuo para a implementação de atividades de modelagem matemática, pois “os problemas abordados não são puramente matemáticos, permitindo assim a mobilização de outras disciplinas (por exemplo, economia, biologia, geografia, ecologia, etc.) para considerar problemas e encontrar soluções” (Araújo & Mirson, 2024, p. 506).

Na busca por uma solução (ou soluções) para problemas que emergem no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, signos escritos, falados e gesticulados são produzidos para expressar pensamento, compreensão, raciocínio e aprendizado (Hoffmann, 2005). O signo é “qualquer coisa que admite um ‘interpretante’ – isto é, que seja capaz de dar origem a outros signos” (Peirce, 1972, p. 27).

Na semiótica desenvolvida por Charles Sanders Peirce, a semiótica peirceana, o diagrama é um tipo de signo que pode revelar o conhecimento do intérprete (aluno), pois é produzido por ele seguindo regras em um sistema de representação escolhido pelo intérprete (Hoffmann, 2013). Com a produção, a experimentação e a observação de resultados nos diagramas, é mobilizado o raciocínio diagramático, que pode auxiliar na construção de conhecimento. Segundo Hoffmann (2013, p. 106), a principal função do raciocínio diagramático é “facilitar processos de pensamento individuais ou sociais em situações que são complexas demais para serem conduzidas exclusivamente por meios cognitivos internos”.

Levando em consideração as especificidades do itinerário formativo, Melo e Bisognin (2021), vislumbrando aprofundar as aprendizagens na área de Matemática e suas Tecnologias, fizeram uma proposta de itinerário formativo utilizando a modelagem matemática como uma possibilidade para “articular os saberes com as demais áreas do conhecimento, devido ao caráter interdisciplinar propiciado por essa estratégia de ensino” (p. 34). Em nossa pesquisa, todavia, intentamos desenvolver atividades de modelagem de modo transversal às trilhas de aprendizagem de itinerários formativos delineados na matriz curricular. Neste sentido, nos debruçamos em trazer reflexões para a questão de pesquisa: *Que conhecimentos alunos do 3º ano do Novo Ensino Médio mobilizam ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática no contexto de três trilhas de aprendizagem de um itinerário formativo?*

Neste estudo, partimos da compreensão de que o conceito de conhecimento vai além da simples acumulação de informações e envolve um processo dinâmico e contínuo de construção. Essa perspectiva considera o conhecimento como algo que se forma a partir das interações dos sujeitos com o contexto, mediado pela linguagem e por práticas sociais (Vygotsky, 1998). No âmbito do Novo Ensino Médio, considerar essa visão é importante, pois a mobilização de conhecimentos não ocorre de maneira isolada, mas em um movimento dialético que envolve a articulação de diferentes áreas e experiências.

Os empreendimentos da pesquisa se fundamentaram no quadro teórico da modelagem matemática entendida como uma abordagem didático-pedagógica (Almeida, 2022) e dos aspectos relativos ao raciocínio diagramático subsidiado na semiótica peirceana, como apresentamos no próximo tópico. Em seguida, abordamos os aspectos metodológicos da investigação. A descrição e a análise qualitativa, ancorada na triangulação (Tuzzo & Braga, 2016), de uma atividade de modelagem com 26 alunos de uma turma do 3º ano do Novo Ensino Médio de uma escola cívico-militar localizada no norte do Paraná são apresentadas no quarto tópico. Finalizamos com nossas considerações.

2 Quadro teórico

Da diversidade de caracterizações para a modelagem matemática presentes na literatura, temos nos subsidiado em uma abordagem didático-pedagógica (Almeida, 2022) que tem como objetivo o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos a partir da busca de solução para uma situação inicial (problemática) cuja origem está, de modo geral, associada à realidade. Destarte, essa busca pela solução para a problemática é respaldada em procedimentos matemáticos em que ocorre a matematização, que consiste no processo de tradução da situação do mundo real na linguagem matemática (Almeida, 2022). Neste contexto, espera-se que os alunos

[...] busquem compreender situações da vida real ou de outras áreas do conhecimento, escolhidas pelo professor, por conta própria ou por meio de negociação entre alunos e professor, ou resolver problemas específicos utilizando conceitos matemáticos que já conheçam, ou o professor pretende que eles aprendam (Araújo & Mirson, 2024, p. 506).

Trata-se, portanto, de considerar o processo de “construção, trabalho e utilização de modelos matemáticos para responder a questões que surgem ao lidar com contextos, situações e problemas extramatemáticos” (Blum & Niss, 2024, p. 185). Para Niss e Blum (2020, p. 6), um modelo matemático é “uma representação de aspectos de um domínio extramatemático por meio de algumas entidades matemáticas e relações entre elas”. Segundo esses autores, “domínios extramatemáticos podem ser outras disciplinas acadêmicas ou campos profissionais; podem ser vocações, profissões ou outras áreas de atuação; podem pertencer à sociedade e esferas sociais; ou podem fazer parte da vida cotidiana com familiares e amigos” (Niss & Blum, 2020, p. 6). Além disso, “um modelo pode ser tanto um protótipo de alguma parte da realidade ou o resultado de um processo de matematização após a experimentação sobre um protótipo” (Carreira & Baioa, 2018, p. 204).

Ponderamos que as ações para a matematização, culminando na construção de um modelo matemático, podem ser explicitadas via produção de diagramas. O diagrama é um signo, do tipo icônico que, segundo Peirce (2005, p. 10), “ostenta uma semelhança ou analogia com o sujeito do discurso”, pois é produzido por uma pessoa seguindo certas regras em um sistema de representação por ela escolhido. Além disso, o diagrama indica uma similaridade com seu objeto pelas relações internas e não no nível das aparências.

Por exemplo, um infográfico é um diagrama, pois “por um lado, representa uma ideia e, por outro, estimula um significado na mente de um intérprete” (Ribeiro, 2021, p. 263). Neste exemplo, a “semelhança instala-se em outro nível, o das relações entre as partes do signo e as relações entre as partes do objeto a que o signo se refere” (Santaella, 2008, p. 120). Isso porque o signo (infográfico, por exemplo) representa algumas características do objeto e não o objeto como um todo. Dependendo do interesse do intérprete, pode chamar a atenção para alguns aspectos e não para outros.

A partir do diagrama construído, pode-se realizar experimentos e reflexões. Em pesquisa realizada por Kadunz (2016) para evidenciar os conhecimentos geométricos de alunos de um 8º ano, objetos de diferentes formatos foram disponibilizados para manipulação. Uma dupla de alunos percebeu que, ao rolar um objeto tipo corneta, foi descrito um movimento circular em que dois círculos com mesmo centro poderiam ser produzidos. Para registrar o formato desse objeto, a dupla colocou várias folhas de papel uma sobre a outra na mesa e rolaram-no fazendo pressão contra as folhas, imprimindo as marcas dos dois círculos. As marcas, que correspondem a diagramas, permitiram aos alunos realizar construções geométricas para determinar o centro

em comum dos círculos (objeto em estudo). Os diagramas produzidos pelos alunos, bem como seu significado permitiram evidenciar “a construção de novos conhecimentos e a importância dos conhecimentos colaterais” (Kadunz, 2016, p. 116).

Segundo Bakker e Hoffmann (2005), o raciocínio diagramático, na perspectiva peirceana, envolve três etapas:

1. A primeira etapa é *construir* um diagrama (ou diagramas) por meio de um sistema representacional [...]. Tal construção de diagramas é motivada pela necessidade de representar as relações que os alunos consideram significativas num problema. Este primeiro passo pode ser chamado de ‘diagramatização’.
2. A segunda etapa do raciocínio diagramático é *experimentar* o diagrama (ou diagramas). Qualquer experimentação com um diagrama está sendo executada dentro de um sistema representacional e é uma atividade guiada por regras ou hábitos [...]. As regras definem as possíveis transformações e ações, mas também as restrições das operações nos diagramas. [...]
3. A terceira etapa é *observar* os resultados da experimentação e refletir sobre eles. [...] (Bakker & Hoffmann, 2005, pp. 340-341, grifos dos autores).

Para compreender esse cenário podemos considerar, por exemplo, um problema envolvendo sistemas de equações lineares. Na primeira etapa, os alunos constroem um diagrama representando o sistema, como gráficos de duas retas no plano cartesiano. Na segunda, experimentam o diagrama, ajustando os coeficientes angulares e lineares das equações para ver como essas mudanças afetam a posição e a inclinação das retas. As regras que guiam essa manipulação incluem propriedades matemáticas das equações lineares, como a relação entre coeficientes e a inclinação da reta. As restrições envolvem manter a coerência do sistema representado, garantindo que as transformações respeitem as operações permitidas. Por fim, na terceira etapa, observam os resultados dessas alterações e refletem sobre o comportamento das retas, podendo identificar que, ao alterar um coeficiente específico, as retas passam a ser paralelas (indicando um sistema sem solução) ou coincidentes (indicando infinitas soluções).

Uma reflexão na etapa de observação pode resultar em novas “implicações dentro de um determinado sistema representacional” sob as quais se sente a necessidade da construção de “um novo diagrama que melhor atenda ao seu propósito, ou mesmo de desenvolver o próprio sistema representacional utilizado” (Bakker & Hoffmann, 2005, p. 341). Na literatura, existem pesquisas que articulam raciocínio diagramático e modelagem matemática com o intuito de analisar os conhecimentos colaterais e construídos no âmbito da disciplina de Matemática na Educação Básica (Yoon & Miskell, 2016; Silva & Martins, 2023) ou do Ensino Superior (Ramos, 2021). O que almejamos em nossa investigação é trazer para a discussão o ambiente do itinerário formativo com vistas a evidenciar os conhecimentos mobilizados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem no contexto de três trilhas de aprendizagem.

De acordo com Vygotsky (1998), o conhecimento é mediado culturalmente, isto é, é construído a partir das interações sociais e da linguagem, que atuam como instrumentos de desenvolvimento cognitivo. Nesse contexto, a aprendizagem é um processo ativo e coletivo, onde os alunos constroem significados por meio do diálogo e da colaboração. Por sua vez, a compreensão de Piaget (1970) complementa essa visão ao enfatizar que o conhecimento se desenvolve pela interação entre o sujeito e o objeto, em um processo de acomodação e assimilação, evidenciando que a compreensão se dá pela constante negociação entre o já conhecido e o novo.

Ao abordar a modelagem matemática como prática pedagógica, entendemos que ela propicia um ambiente de construção dinâmica do conhecimento. De acordo com Almeida

(2022), a modelagem matemática não se restringe a um processo técnico, mas envolve a mobilização de conhecimentos interdisciplinares, permitindo aos alunos explorar, experimentar e refletir sobre situações complexas que integram diferentes áreas de conhecimento. Nesse sentido, o raciocínio diagramático, conforme apontado por Bakker e Hoffmann (2005), surge como uma ferramenta importante, pois possibilita aos alunos representar, experimentar e revisar suas ideias de forma visual e interativa, contribuindo para a construção de novos saberes em um contexto que demanda constante adaptação e reflexão crítica.

3 Aspectos metodológicos

Neste artigo apresentamos resultados parciais da pesquisa de mestrado, em desenvolvimento, da primeira autora sob orientação da segunda. Na pesquisa, intenta-se articular atividades de modelagem matemática no contexto de trilhas de aprendizagem do Itinerário Formativo Integrado Matemática e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias. No ano de 2024, a professora (primeira autora) tem ministrado as trilhas de aprendizagem intituladas Resolução de Problemas, Robótica e Programação na mesma turma do 3º ano do Novo Ensino Médio, em uma escola cívico-militar localizada no norte do Paraná.

A temática abordada para o estudo (Agricultura) e sob a qual investigamos neste artigo foi delineada após um levantamento realizado pela professora, em que os alunos responderam anonimamente um formulário sobre temas que gostariam de estudar. A escolha, não só atendia aos interesses dos alunos, mas também estava alinhada com os conteúdos previstos nas trilhas de aprendizagem (Tabela 1). Além disso, a relevância do tema é reforçada pelo contexto local, uma vez que parte dos alunos da turma são filhos de produtores rurais, o que torna a agricultura uma parte significativa de suas vidas e comunidades.

Tabela 1: Conteúdos e objetivos presentes nos cadernos de cada trilha de aprendizagem

Trilha de aprendizagem	Conteúdo(s)	Objetivos
Resolução de Problemas	Matemática no campo	Aplicar objetos do conhecimento da Matemática em situações-problema do cotidiano no campo; Planejar e executar ações para melhorar diferentes tipos de plantio; Conhecer e aplicar tecnologias rurais.
Robótica	Sensor de umidade de solo;	Conhecer o componente eletrônico sensor de umidade do solo;
	Mecanismo irrigador automático	Entender o funcionamento do sensor de umidade do solo; Desenvolver um sistema via programação, capaz de monitorar a umidade presente no solo.
Programação	Desenvolvimento de programação por códigos	Demonstrar a importância da irrigação automática na manutenção hídrica de plantas; Simular o mecanismo de funcionamento de um irrigador automático; Desenvolver uma programação por códigos que permita o funcionamento de um sensor de umidade de solo e de um sistema de irrigação automático simultaneamente.

Fonte: Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná (Paraná, 2023a)

Considerando a temática transversal às trilhas de aprendizagem, as sugestões dos cadernos dos Itinerários Formativos e a presença de uma caixa d'água ao lado da cozinha da escola, foi realizado o planejamento para a atividade de modelagem matemática intitulada *Reutilizando: uma ideia para o uso de caixas d'água na agricultura urbana*. A implementação

da atividade aconteceu ao longo de seis aulas com duração de 50 minutos cada, no período de 06 a 13 de maio de 2024, durante as aulas regulares das três trilhas (duas aulas de cada uma delas) com os 26 alunos de uma turma de 3º ano, reunidos em seis grupos: quatro com quatro integrantes e dois com cinco.

De modo a trazer reflexões para a questão *Que conhecimentos alunos do 3º ano do Novo Ensino Médio mobilizam ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática no contexto de três trilhas de aprendizagem de um itinerário formativo?*, a pesquisa qualitativa foi subsidiada no processo de triangulação em que foram considerados os dados produzidos via gravações em áudio e vídeo e registros das anotações entregues pelos grupos em seus relatórios. Para a produção dos dados foi solicitada a autorização da escola e assinado um termo de consentimento livre e esclarecido pelos pais ou responsáveis dos alunos. No corpo do texto, os alunos são referenciados pela letra A e um número que os diferencia: A1, A2, ..., A26.

No processo de triangulação, segundo Tuzzo e Braga (2016, p. 152), “a partir dos vértices objeto, sujeito e fenômeno, com importância fundante ao metafenômeno”, obtêm-se os resultados. Na pesquisa, os alunos da turma são os sujeitos, os diagramas correspondem ao objeto e o raciocínio diagramático constitui o fenômeno em estudo; o metafenômeno diz respeito ao conhecimento mobilizado a partir da interpretação semiótica, em que o fenômeno foi articulado ao quadro teórico, conforme movimento analítico que apresentamos a seguir.

4 Descrição e análise da atividade

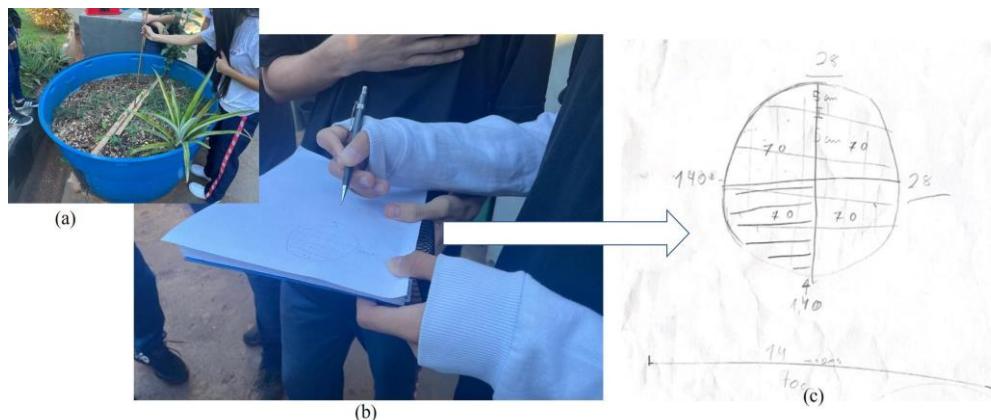
Durante as aulas da trilha *Resolução de Problemas*, os alunos, organizados em grupos, receberam uma folha contendo um texto sobre a reutilização de materiais para a agricultura urbana e a problemática a ser investigada: “*No pátio de nossa escola há uma caixa d’água que não está em utilização. Considerando a prática de reutilização de recipientes para plantio, de que maneira podemos utilizá-la? O que pode ser plantado nela? Como pode ser plantado? Quais são as condições necessárias para o plantio e sua manutenção?*”. Essa problemática é “relativa a uma situação da realidade e não uma situação simulada ou em que os dados são simulados” (Almeida, 2022, p. 135).

As duas primeiras aulas foram dedicadas à leitura, discussão e busca por qualquer informação que pudesse contribuir com o desenvolvimento da atividade. Para isso, os alunos contaram com o auxílio de computadores disponíveis para uso ou mesmo o telefone celular particular. Durante este período, os grupos definiram diversos aspectos do projeto: como utilizariam a caixa d’água, o que poderia ser cultivado e a finalidade dos produtos plantados. Entre as escolhas destacaram-se a produção de cebolinha para a venda e o plantio para uso na preparação da merenda escolar.

Para materializar o contato com a situação em estudo, os alunos foram ao pátio da escola e observaram a caixa d’água. Para medi-la, optaram por utilizar régulas de madeira de 100 cm (Figura 1a). O uso de instrumentos de medidas é habitual aos alunos, principalmente nas aulas da trilha de Resolução de Problemas. A observação da superfície da caixa d’água contribuiu para que os alunos pudessem associá-la a um objeto matemático - círculo - que favoreceu a busca por responder o questionamento “*Como pode ser plantado?*”. Com isso, para representar a primeira hipótese, ao considerar a superfície da caixa d’água como um círculo (Figura 1c), houve necessidade da “construção de diagramas, o que caracteriza a primeira etapa do raciocínio diagramático, a construção de um ou mais diagramas” (Ramos, 2020, p. 63). Por meio dessa hipótese, a abordagem se enveredou para a ação de determinar a área do círculo para auxiliar na elaboração de uma estratégia de plantio. Neste encaminhamento, os alunos buscaram “resolver problemas específicos utilizando conceitos matemáticos que já conheciam”

(Araújo & Mirson, 2024, p. 506).

Figura 1: Coleta de dados pelos alunos com o registro de um primeiro diagrama



Fonte: Arquivo da professora e relatório dos alunos

As dimensões inseridas nos primeiros diagramas e as interações dos alunos e professora revelaram que, para calcular a área da superfície da caixa d'água, seria necessário determinar o seu raio, trata-se, portanto, de uma ação recorrente dos alunos quando se deparam com a necessidade de se cálculo de área de círculo. No entanto, enfrentaram o desafio de não ter a localização precisa do centro do círculo. De maneira intuitiva, utilizando as régulas disponíveis, realizaram experimentações e estimaram a posição do centro, conforme indicou o diálogo a seguir:

A1: Onde é o meio aqui?

Professora: Onde vocês acham que está localizado o meio da superfície da caixa?

A2: Eu acho que é mais aqui [gesto apontando para a caixa].

Professora: A3, sobe ali [mureta próxima a caixa] e olha a caixa de cima. Assim você consegue guiar as meninas. Aponta onde você acha que está o centro.

A1: Usa a minha caneta para marcar.

A3: É mais para cá. A4, vai um pouco mais para lá.

Professora: Vocês terão que definir esse ponto como o centro e usá-lo.

A4: Acho que agora tá bom.

Professora: Agora podemos medir o raio. Para medir precisamos partir do centro até a borda.

A5: 66 cm.

Professora: Será que a gente precisa de mais alguma medida?

A4: Tem que ver se do outro lado vai dar a mesma medida.

A2: Vamos medir.

A4: Aqui, deu certo, 66 cm também.

Professora: Então o nosso raio é 66 cm.

Outros alunos, no entanto, optaram por medir o diâmetro da caixa, fazendo experimentos com as régulas, deslizando-as sobre a superfície da caixa em busca da maior medida (Figura 2a). Essa estratégia revelou que os alunos entendiam que o diâmetro é um segmento de reta que passa pelo centro do círculo e cujas extremidades estão sobre o círculo, além disso essa medida é o dobro do raio. Ambas as estratégias revelaram que os alunos de diferentes grupos buscaram meios próprios para a busca poder solucionar o problema do cálculo de área do círculo. Ao manipular as régulas, um grupo determinou a medida aproximada de 136 cm, logo o raio corresponderia a 68 cm (Figura 2b). Com as informações obtidas, os alunos construíram diagramas para evidenciar a articulação dessas ideias (Bakker & Hoffman, 2005), via a expressão algébrica da área do círculo ($A = \pi \cdot r^2$), em que consideraram o valor de π como 3,14. Com isso, obtiveram a área aproximada da superfície da caixa d'água - 14519 cm². No

registro apresentado na Figura 2b é possível notar que os alunos cometem um equívoco com relação ao resultado da multiplicação.

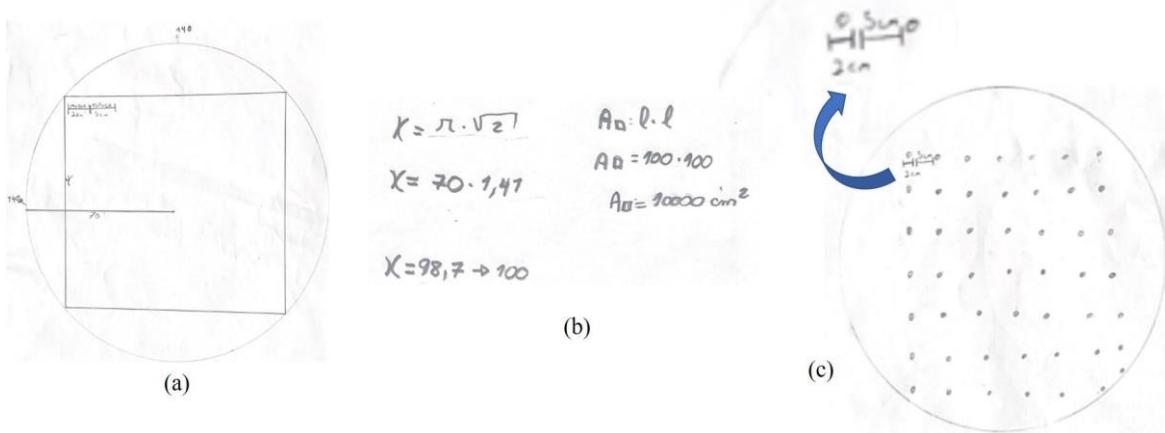
Figura 2: Diagrama que representa o cálculo da área para círculo de 68 cm de raio



Fonte: Arquivo da professora e relatório dos alunos

Durante a observação, um aluno (A6) questionou se seria possível calcular a área multiplicando as medidas dos lados da caixa. Nesse momento, a professora indagou se essa era a forma correta de calcular a área de um círculo. O aluno argumentou que considerar uma “área quadrada” facilitaria o planejamento da disposição do plantio, estruturando um diagrama (Figura 3a) que representava uma semelhança com o sujeito do discurso (Peirce, 2005). Persistindo na ideia, recorreu à internet para buscar informações que pudessem contribuir para calcular uma “área quadrada dentro de um círculo”. Com a busca, se deparou com o conceito de relações métricas do quadrado inscrito em uma circunferência ($l = r \cdot \sqrt{2}$), em que a partir do raio, é possível determinar a medida do lado do quadrado inscrito. Com essa informação e o auxílio da professora, o aluno, considerando o raio r na medida de 70 cm calculou a área aproximada do quadrado – 10000 cm^2 (Figura 3b) onde poderia ser realizado o plantio e estimou, representando em um diagrama (Figura 3c), a quantidade de 49 mudas que poderia ser plantada.

Figura 3: Diagramas produzidos por A6 para a área de quadrado inscrito



Fonte: Relatório de A6

O diagrama produzido por A6 na Figura 3a foi “capaz de dar origem a outros signos” (Peirce, 1972, p. 27), mobilizando uma busca sobre conceitos que ainda não havia estudado. De certo modo, o diagrama construído estimulou um significado na mente do aluno (Ribeiro, 2021), que revelou a possibilidade de aplicar conhecimentos matemáticos em uma determinada situação-problema. Esse procedimento revelou autonomia e autenticidade para apresentar uma solução para o problema em estudo, diferente das apresentadas pelos colegas. Com isso, o aluno teve “oportunidade de especular, testar ideias, argumentar e defender conjecturas” (Almeida, 2022, p. 138), ações inerentes ao desenvolvimento de atividades de modelagem, bem como do raciocínio diagramático.

O raciocínio diagramático mobilizado por A6 se fez relevante “para resolver problemas, para lidar com complexidade, para aprender algo novo, ou para resolver conflitos” (Hoffmann, 2013, p. 105). De fato, a partir do diagrama construído via representação de um quadrado no interior de uma circunferência cujos vértices coincidiam com a extremidade dela, A6 experimentou meios, via busca na internet e diálogos com a professora, para determinar o lado do quadrado de modo que pudesse obter a área dessa figura geométrica plana e chegar a uma solução para o problema. Para isso, “uma atividade guiada por regras ou hábitos” (Bakker & Hoffmann, 2005, p. 340) relativas ao cálculo de área de quadrado no interior de um círculo foi delineada, permitindo uma reflexão sobre o diagrama, em que pode estruturar maneiras de plantio do vegetal escolhido. De fato, sobrariam regiões da caixa d’água que não seriam utilizadas para o plantio, todavia, para esse aluno, a abordagem se mostrou suficiente para o seu propósito - plantar 49 mudas de vegetais. Neste contexto, entendemos que o referido aluno mobilizou o raciocínio diagramático “como uma fonte possível de novo conhecimento” (Kadunz, 2016, p. 124) em que se mobilizou para conhecer os procedimentos para obter uma solução para o que se propôs a resolver.

Os grupos que optaram por fazer projetos em que seriam plantados mais de um vegetal, dividiram a área do círculo de modo a viabilizar o plantio de diferentes culturas. Três grupos optaram por repartir a área da superfície da caixa d’água em partes iguais e um grupo escolheu dividir em partes proporcionais de acordo com o crescimento das plantas escolhidas. Com a divisão, o círculo que representava a superfície da caixa d’água adquiriu novos formatos que os alunos representaram em seus registros escritos, motivados pela necessidade de representar relações que consideravam importantes no problema (Hoffmann, 2013). Com isso, uma abordagem matemática se faria necessária, calcular a área desse novo formato - setor circular. Esse processo desafiou os alunos a retomarem conhecimentos matemáticos, incluindo conceitos de geometria e divisão proporcional, corroborando com o que é destacado por Silva e Martins (2023), que argumentam que a construção e uso dos diagramas podem evidenciar conhecimentos estudados anteriormente.

Ao analisarem os setores de plantio (Figura 4a), os alunos constataram que a distribuição escolhida resultaria em uma área muito pequena, insuficiente para um bom desenvolvimento das plantas e que, além disso, levaria a uma quantidade reduzida de produtos, conforme transcrição do diálogo a seguir:

A7: Professora, agora eu fiz medindo palmo. Primeiro a gente tentou fazer as contas, mas estava dando errado. Aí a gente voltou lá na caixa e com a medida que a gente encontrou na internet, que as plantinhas precisam de mais ou menos 20 cm de distância para crescer certinho, fomos medindo usando palmos para saber quantas mudas iriam caber.

Professora: Então vocês estão usando como referência o palmo. Temos que anotar para não esquecer. Esse palmo que vocês usaram tem quantos centímetros?

A7: 20 cm. Usei a minha mão.

A8: Ela mediu a mão dela e deu esse valor.

A7: Então, o que acontece é que vimos que nossa conta está errada.

Professora: Então, vindo até a caixa e verificando, vocês validaram o que fizeram. A estratégia que vocês usaram, está correta, mas o cálculo deu errado em algum momento. Pode ser alguma informação que vocês usaram errado. Bom, vamos retomar. A ideia de vocês era dividir a caixa em três partes.

A8: Duas agora.

Professora: Duas? Você desistiram da terceira?

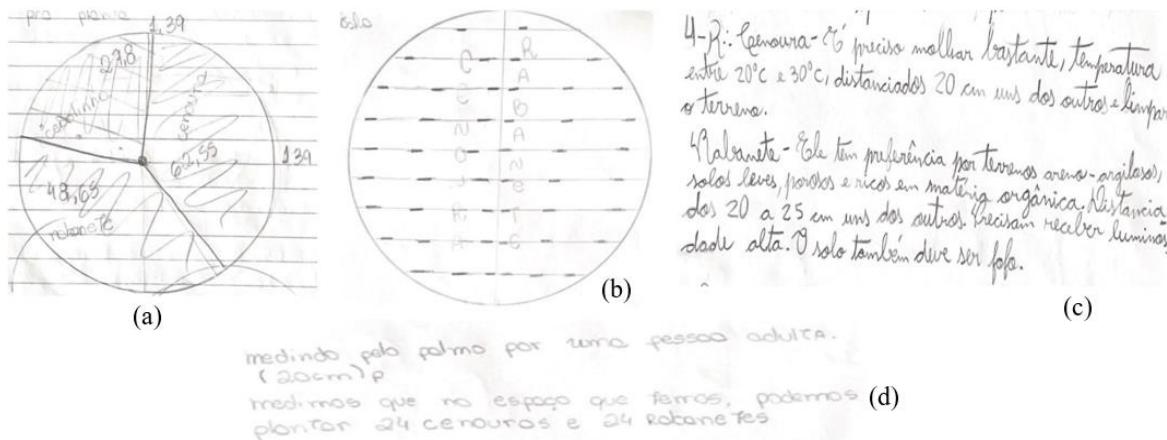
A7: As contas não estavam dando certo. Estava dando um número pequeno de produtos.

Professora: E agora vocês chegaram a alguma conclusão do quanto pode ser plantado?

A8: 24 rabanetes e 24 cenouras.

Ao retornarem à caixa d'água e testarem os espaços obtidos por meio dos cálculos, os alunos experimentaram os diagramas construídos inicialmente, observaram e refletiram sobre os resultados da experimentação. Com isso, decidiram modificar a disposição dos plantios organizados inicialmente, construindo novos diagramas (Figura 4b). Neste caso, os alunos se debruçaram na produção de “um novo diagrama que melhor atenda ao seu propósito” (Bakker & Hoffmann, 2005, p. 341), considerando informações sobre o plantio a ser realizado.

Figura 4: Raciocínio diagramático revelado no projeto de um dos grupos de alunos



Fonte: Relatório do grupo

A busca de informações sobre o plantio de cenouras e rabanetes, bem como o interesse em ter uma quantidade relativamente suficiente de cada planta, conferiu à atividade de modelagem, à matemática e aos diagramas produzidos e experimentados, no âmbito das aulas das trilhas de aprendizagem, “interpretação, significado, compreensão adequada e retenção sustentável de seus conceitos, resultados, métodos e teorias” (Niss & Blum, 2020, p. 28). A manipulação dos diagramas, via cálculo da área do setor circular, conferiu uma estrutura “como um ‘andaime’ que o aprendiz construiu para se ajudar em uma situação que é muito complexa para ele gerenciar sozinho” (Hoffmann, 2013, p. 121). Para os alunos, cada palmo de um dos integrantes do grupo representou uma unidade de medida para a distância de plantio das mudas. O palmo, de certa forma, se mostrou como uma unidade de medida em que os alunos visualizaram e experimentaram ao manipularem novamente a caixa d’água. Isso se deve ao fato também por terem escolhido como referência o palmo de um dos integrantes do grupo que tinha a medida indicada para o plantio das mudas, se tornando representativo para os alunos. Com isso, o palmo permitiu aos alunos “visualizar, testar e examinar as estruturas matemáticas” (Yoon & Miskell, 2016, pp. 106-107) representativas e que informou dados quantitativos sobre a distância entre as mudas a serem plantadas.

No final das duas primeiras aulas, foi solicitado aos alunos que guardassem as anotações para que continuassem trabalhando na atividade posteriormente. Assim, quando a professora retornou para a sala, mais especificamente nas aulas de *Robótica*, os alunos avançaram nas discussões iniciais e organizaram as informações coletadas. Para socializar as respostas obtidas para os questionamentos “[...] de que maneira podemos utilizá-la?”, “O que pode ser plantado nela?” e “Como pode ser plantado?”, os alunos, reunidos em seus grupos, utilizaram recursos como textos, apresentação de *slides* e apresentações orais. O momento foi orientado pela professora.

Durante a socialização das soluções encontradas para os problemas levantados, um grupo mencionou a sua forma de cuidado com o plantio que chamou atenção:

Professora: O que vocês pensaram para plantar?

A9: Rúcula.

Professora: Por que rúcula?

A9: Porque é simples, cresce rápido.

A10: Porque cabe uma quantidade maior na caixa.

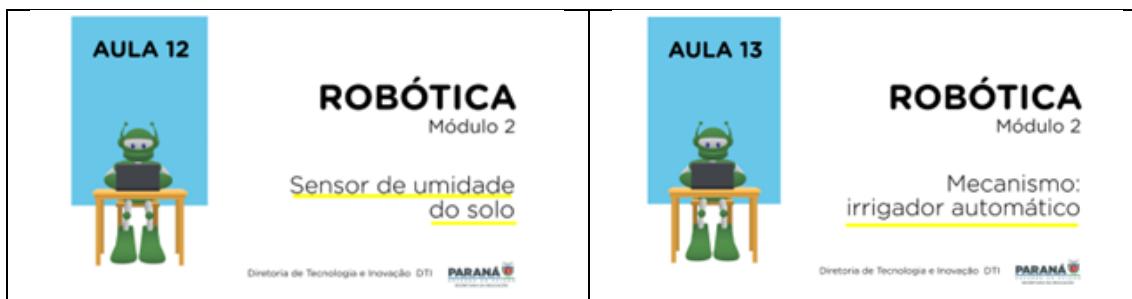
Professora: E vocês pensaram em como plantar essa rúcula?

A10: Pensamos em cavar um espacinho, colocar ela e criar um sistema de irrigação, usando uma mangueira, para manter ela abastecida.

Professora: Muito bem pensando. O irrigador é uma ótima ideia.

Aproveitando a indicação dos alunos, a professora, como já planejado, abordou dois conteúdos presentes no currículo da trilha de aprendizagem *Robótica* (Figura 5). Para incentivar os grupos a aprimorarem seus projetos, considerando os cuidados com o plantio, a professora explicou o componente sensor de umidade do solo, métodos de irrigação automática e programação do sensor de acordo com as especificidades da planta. A partir da explicação, os grupos, considerando a ideia elaborada no momento inicial da atividade e o(s) produto(s) escolhido(s) para o plantio, buscaram informações sobre umidade, temperatura, profundidade e métodos de irrigação, a fim de responder o questionamento “*Quais são as condições necessárias para o plantio e sua manutenção?*”.

Figura 5: Slides relativos à abordagem das aulas de Robótica

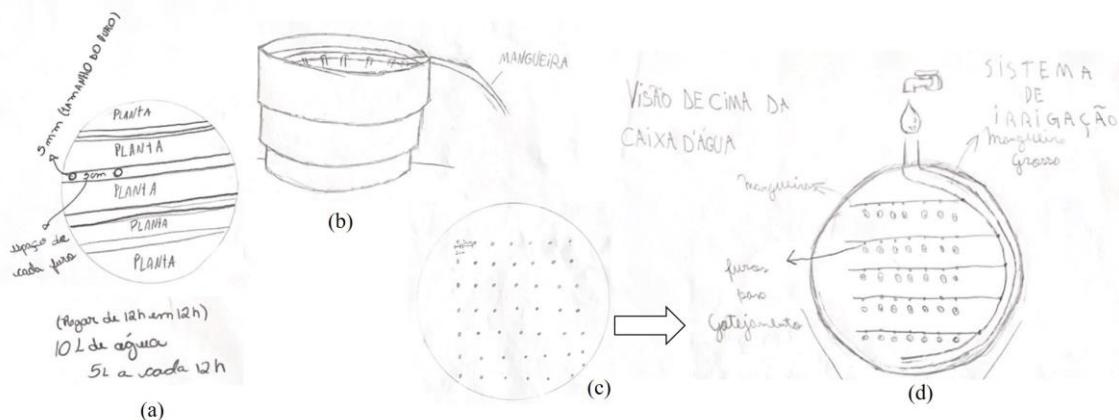


Fonte: Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná (Paraná, 2023b)

A busca por essas novas informações fez com que os alunos repensassem sobre os produtos escolhidos, levando em consideração suas especificidades de plantio e as características do ambiente onde a caixa d’água se encontrava, como o espaço necessário para cada tipo de planta, condições de luz e umidade do local, bem como a compatibilidade entre as diferentes culturas. Novos diagramas foram construídos pelos alunos e outros foram aprimorados por meio de hipóteses e regras que definiram as ações e transformações pertinentes ao problema (Bakker & Hoffman, 2005), revelando estruturas de irrigação para a cultura (Figura 6). Ao adaptar suas escolhas e estratégias de plantio com base nessas novas informações, os alunos puderam tomar decisões, garantindo um desenvolvimento saudável das plantas e uma utilização mais eficiente da área disponível.

Um diagrama inicialmente produzido (Figura 6a), foi aprimorado com a inserção da localização do plantio de acordo com o espaço adequado (Figura 6c), bem como a vista lateral (Figura 6b) e superior (Figura 6d) do sistema de irrigação por gotejamento planejado pelos alunos. Os diferentes diagramas produzidos compuseram “um protótipo de alguma parte da realidade” (Carreira & Baioa, 2018, p. 204), uma vez que pode ser colocado em prática na instalação do possível sistema e plantio de vegetais.

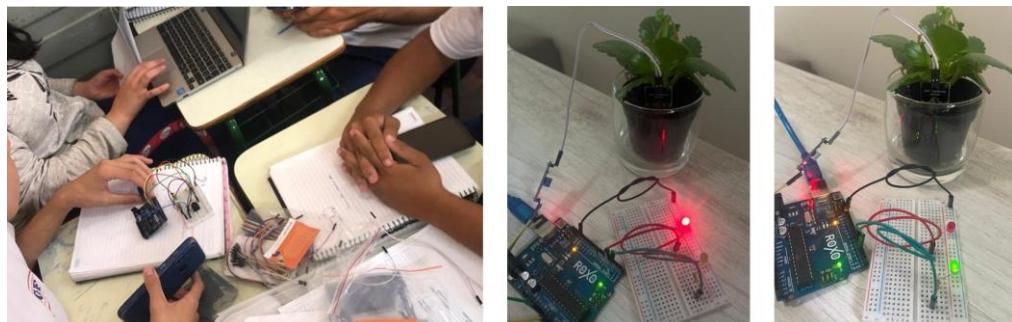
Figura 6: Aprimoramento dos diagramas considerando o sistema de irrigação



Fonte: Relatório dos alunos

A Figura 6 apresenta os registros dos esquemas que mostram os possíveis meios de irrigação, considerando a distribuição uniforme da água e a frequência adequada para cada tipo de planta, entre eles sistemas de gotejamento, regadores manuais e a utilização de sensores de umidade que foram manipulados nas aulas de Robótica (Figura 7) para monitorar as necessidades das plantas. As discussões realizadas e a manipulação dos sensores de umidade favoreceram a criação de estratégias para o cuidado diário das plantas, incluindo a irrigação automatizada, por meio da *Programação*, em que os alunos simularam o mecanismo de funcionamento de um irrigador automático para ser acoplado na caixa d'água que está em processo de desenvolvimento para sua implementação.

Figura 7: Alunos manipulando sensores de umidade



Fonte: Arquivo da professora

A experimentação veiculada por meio das considerações relativas ao sistema de irrigação fez surtir nos alunos a necessidade de aprimorar o diagrama revelando “relações entre as partes do signo e as relações entre as partes do objeto a que o signo se refere” (Santaella, 2008, p. 120). Além disso, “a construção desses diagramas é motivada pela necessidade dos alunos de representar relações que consideram importantes em um problema” (Hoffmann, 2013, p. 51).

A atividade de modelagem matemática desenvolvida com os alunos, sob orientação da professora, permitiu a eles experienciar uma situação-problema do cotidiano ao planejar ações para otimizar diferentes tipos de plantio, favorecendo a percepção da Matemática como “ferramenta para solucionar variados problemas” (Paraná, 2023a, p. 12), um dos objetivos centrais da trilha Resolução de Problemas. Na área da Robótica, além de conhecer o funcionamento do componente eletrônico sensor de umidade do solo, puderam entender sua importância e aplicação na agricultura, oportunizando “novas experiências no processo de ensino-aprendizagem” (Paraná, 2023b, p. 691). Em Programação aprimoraram os códigos de

modo a viabilizarem o funcionamento do sensor, levando em consideração as plantas escolhidas, melhorando suas habilidades de abstração e análise (Paraná, 2023a), essenciais para esta área.

Em suma, mesmo que as trilhas disponibilizadas aos professores sejam norteadoras da integração curricular, elas poderiam ser trabalhadas de forma hipotética e não integradas, caso diferentes professores não dialogassem entre si. A prática implementada, partindo de um contexto real materializado na caixa d'água presente na escola e via atenção para a construção de diagramas para projetarem plantio(s), colaborou com a proposta das trilhas de aprendizagem, as quais buscam a integração curricular e a contextualização para a formação do aluno como previsto nos documentos oficiais (Brasil, 2018).

5 Considerações finais

Os itinerários formativos são uma realidade que alunos do Novo Ensino Médio estão vivenciando neste momento e não podem ser ignorados no contexto da Educação Matemática. Com o objetivo de trazer para o debate uma atividade de modelagem transversal a três trilhas de aprendizagem de um itinerário formativo integrado em que a mesma professora é regente em uma mesma turma, a primeira a se formar neste formato do Ensino Médio em uma escola cívico-militar no norte do Paraná, nos atentamos para o raciocínio diagramático mobilizado via produção de diagramas.

O raciocínio diagramático é uma atividade mobilizada em três etapas: construir diagramas, experimentá-los e observar os resultados. Pautadas nas assertivas de Hoffmann (2005), que assevera que o desenvolvimento do conhecimento pode ser evidenciado via análise do raciocínio diagramático, é que nos debruçamos em trazer reflexões para a questão de pesquisa: *Que conhecimentos alunos do 3º ano do Novo Ensino Médio mobilizam ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática no contexto de três trilhas de aprendizagem de um itinerário formativo?*

Os diagramas, enquanto signos escolhidos pelos alunos para estruturar um projeto de reutilização de uma caixa d'água para a agricultura urbana na escola, iniciou-se no momento da coleta de dados, a partir da associação da sua superfície ao objeto matemático círculo. Com a obtenção de suas medidas, experimentos foram realizados para a organização de plantio de uma ou mais culturas de plantas que poderiam suprir necessidades da escola, como no preparo da merenda. O cálculo de áreas de figuras planas, como círculo, quadrado e setor circular, bem como os conhecimentos sobre plantio das culturas escolhidas, compreenderam a experimentação com diagramas “dentro de um sistema representacional” via “atividade guiada por regras ou hábitos” (Bakker & Hoffmann, 2005, p. 340).

Neste contexto, em aulas da trilha de aprendizagem Resolução de Problemas, a atividade de modelagem subsidiou os alunos a “resolver problemas específicos utilizando conceitos matemáticos que já conheciam” (Araújo & Mirson, 2024, p. 506), além daqueles necessários para conhecer as especificidades das plantas para que as mudas fossem distribuídas considerando o seu desenvolvimento. A partir da comunicação dos resultados dos grupos para os colegas, cuidados com os vegetais plantados foram mencionados e a professora introduziu o conceito de umidade do solo em que conteúdos relativos à trilha de aprendizagem Robótica subsidiaram o aperfeiçoamento dos diagramas produzidos inicialmente por meio da manipulação de componentes, como o sensor de umidade. Considerando diferentes formas de irrigação, diagramas foram produzidos, mobilizando raciocínio diagramático, via observação e experimentação em que os locais para a inserção das mudas foram redistribuídos. A observação do “novo” diagrama mobilizou os alunos a reprogramar o sensor de umidade, considerando as

necessidades da planta cultivada no âmbito da trilha de aprendizagem Programação.

Ponderamos que a atividade de modelagem atingiu os objetivos previstos nas três trilhas de aprendizagem do itinerário formativo integrado e, além disso, favoreceu a retomada de conteúdos matemáticos como cálculo de área de figuras planas, proporção, operações básicas e relações métricas do quadrado inscrito em uma circunferência. Neste sentido, entendemos que o itinerário formativo integrado se mostrou um cenário com potencial para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Uma análise do aprimoramento do sensor de umidade e irrigação automática está em desenvolvimento no contexto da pesquisa de mestrado em que ações de reutilização da caixa d'água serão colocadas em prática com o plantio e o cultivo de vegetais. Para tanto, o manejo do solo com adubo orgânico produzido em composteira faz parte do projeto.

Referências

- Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da Modelagem Matemática. *Vidya*, 42(2), 121-145.
- Araújo, J. L. & Mirson, B. P. M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/ Competencies. In: H. S. Siller, V. Geiger & G. Kaiser (Eds.). *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times*. (pp. 505-514). Springer, Cham.
- Bakker, A. & Hoffmann, M. H. G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 333-358.
- Blum, W. & Niss, M. (2024). Interdisciplinary Aspects of Modelling in Mathematics Education Activities Conducted in South America. In: H. S. Siller, V. Geiger & G. Kaiser (Eds.). *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times*. (pp. 185-200). Springer, Cham.
- Brasil (2018). Ministério da Educação. *Portaria nº 1.432, de 28 de dezembro de 2018. Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio*. Brasília, DF.
- Carreira, S. & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. *ZDM*, 50(1), 201-215.
- Hoffmann, M. H. G. (2013). Cognição e pensamento diagramático. In: J. Queiroz & L. Moraes (Orgs.). *A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: implicações em ciência cognitiva, lógica e semiótica*. (pp. 101-134). Juiz de Fora, MG: UFJF.
- Hoffmann, M. H. G (2005). Signs as Means for Discoveries. In: M. H. Hoffmann & J. Lenhard E. F. Seeger (Eds.). *Activity and Sign*. (pp. 44-56). Boston, MA: Springer.
- Kadunz, G. (2016). Diagrams as means for learning. In: A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.). *Semiotics as a tool for learning mathematics*. (pp. 111- 126).Rotterdam: Sense Publishers.
- Lopes, A. C. (2019). Itinerários formativos na BNCC do Ensino Médio: identificações docentes e projetos de vida juvenis. *Retratos Da Escola*, 13(25), 59-75.
- Melo, C. B. da S. & Bisognin, E. (2021). Modelagem Matemática como proposta de itinerário formativo no Novo Ensino Médio: uma possibilidade para o desenvolvimento de habilidades e competências. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 11(1), 24-36.

- Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. London, New York: Routledge.
- Paraná. Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná. (2023a). *Caderno de Itinerários Formativos - Ementa das Unidades Curriculares ofertadas*. Curitiba, PR.
- Paraná. Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná. (2023b). *Robótica Educacional*. Curitiba, PR.
- Ramos, D. C. (2021). Atividades de modelagem matemática: um olhar para os diagramas construídos. In: L. M. W. Almeida, K. A. P. Silva & M. R. D. Veronez (Orgs.). *Elementos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática*. (pp. 133-148). São Paulo (SP): Livraria da Física, p., 2021.
- Ramos, D. C. (2020). *Modelagem Matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos*. 2020. 100f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR.
- Peirce, C. S. (2005). *Semiótica*. São Paulo, SP: Perspectiva.
- Peirce, C. S. (1972). *Semiótica e filosofia: textos escolhidos*. São Paulo, SP: Cultrix.
- Piaget, J. (1973). *Psicologia e Epistemologia: Por uma Teoria do Conhecimento* (Trad. Alvaro Cabral). Rio de Janeiro: Forense.
- Ribeiro, D. M. (2021). Semiótica dos diagramas: processos de raciocínio visual aplicados ao design. In: L. Santaella & P. Borges (Orgs.). *A relevância de C. S. Peirce na atualidade: implicações semióticas*. (pp. 263-278). Barueri (SP): Estação das Letras e Cores.
- Santaella, L. S. (2008). *A teoria geral dos signos*: como as linguagens significam as coisas. São Paulo (SP): Cengage Learning.
- Silva, E. A. & Maciel, M. D. (2021). Itinerários Formativos: da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) às práticas do professor de matemática. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 3(12), 68-79.
- Silva, K. A. P. & Martins, N. (2023). Raciocínio Diagramático em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Fundamental. *Vidya*, 43(2), 287-305.
- Silva, M. R., Krawczyk, N. R. & Calçada, G. E. C. (2023). Juventudes, novo ensino médio e itinerários formativos: o que propõem os currículos das redes estaduais. *Educação e Pesquisa*, 49, 1-18.
- Tuzzo, S. & Braga, C. (2016). O processo de triangulação da pesquisa qualitativa: o metafenômeno como gênese. *Revista Pesquisa Qualitativa*, 4(5), 140-158.
- Vygotsky, L. S. (1998). *Pensamento e linguagem*. 3^a ed. São Paulo, SP: Martins Fontes.
- Yoon, C. & Miskell, T. (2016). Visualising cubic reasoning with semiotic resources and modeling cycles. In: A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Orgs.). *Semiotics as a tool for learning mathematics: how to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts*. (pp. 89-109). Dordrecht: Sense Publishers.