



# A Análise de Modelos como uma atividade de Modelagem Matemática e o Pensamento Matemático Avançado

## The Analysis Model as a Mathematical Modeling Activity and Advanced Mathematical Thinking

Nabila Iasbik Giroti<sup>1</sup>

Adriana Helena Borssoi<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste artigo, investigamos o contexto educacional de uma disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, com o objetivo de identificar indícios do Pensamento Matemático Avançado (PMA) manifestados por estudantes de Engenharia ao desenvolverem uma atividade de modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos. O quadro teórico aborda a modelagem matemática, a análise de modelos, e explica por que a análise de modelos pode ser entendida como atividade de modelagem matemática. A pesquisa, de natureza qualitativa, utiliza a Análise de Conteúdo do relatório escrito por um grupo de estudantes ao estudarem o movimento no plano inclinado. Concluímos que a análise de modelos se configurou como uma atividade de modelagem matemática e permitiu evidenciar os subprocessos de Representação e Abstração, característicos do PMA.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Ensino Superior. Equações Diferenciais Ordinárias. Plano Inclinado.

**Abstract:** In this article, we investigate the educational context of a course on Ordinary Differential Equations, aiming to identify signs of Advanced Mathematical Thinking (AMT) demonstrated by Engineering students while developing a mathematical modeling activity from the perspective of model analysis. The theoretical framework addresses mathematical modeling, model analysis, and explains why model analysis can be understood as a mathematical modeling activity. The research, which is qualitative in nature, uses Content Analysis of the written report by a group of students studying motion on an inclined plane. We conclude that model analysis constituted a mathematical modeling activity and allowed for the identification of the subprocesses of Representation and Abstraction, which are characteristic of AMT.

**Keywords:** Mathematics Education. Higher Education. Ordinary Differential Equations. Inclined Plane.

## 1 Introdução

Este artigo traz para a discussão resultados parciais da pesquisa de mestrado de Giroti (2024) ao investigar a Modelagem Matemática, a Análise de Modelos e o Pensamento Matemático Avançado no âmbito do Ensino Superior. A pesquisa é parte das investigações do grupo de pesquisa *modelagem matemática no Contexto Educacional*, que tem por objetivo

---

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Londrina, Paraná — Brasil • ✉ [nabiliasbik@alunos.utfpr.edu.br](mailto:nabiliasbik@alunos.utfpr.edu.br) • **ORCID** <https://orcid.org/0009-0001-1174-7287>

<sup>2</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Londrina, PR — Brasil • ✉ [adrianaborssoi@utfpr.edu.br](mailto:adrianaborssoi@utfpr.edu.br) • **ORCID** <https://orcid.org/0000-0002-1725-6307>

investigar a modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos. O estudo também é alinhado ao projeto de pesquisa *Recursos educacionais para os processos de ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática*, do qual participam pesquisadores integrantes de um programa de pós-graduação na modalidade profissional. O objetivo do projeto está no desenvolvimento de recursos educacionais, incluindo aqueles que envolvem tecnologias digitais, e na análise da sua utilização em diversos ambientes e com sujeitos de diferentes níveis de ensino.

Devido à natureza do programa de pós-graduação, o delineamento da pesquisa levou em consideração desenvolver atividades de modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos (Soares & Javaroni, 2013; Blomhøj & Niss, 2021) com o objetivo de investigar aspectos do Pensamento Matemático Avançado (Tall, 2002; Dreyfus, 2002) dos alunos de uma disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) com vistas a elaboração de um produto educacional. Para isso, buscou-se fundamentação na literatura em Educação Matemática bem como em documentos orientadores do curso, nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (DCN de Engenharia) (Brasil, 2019).

Além de indicações presentes nas DCN de Engenharia, na literatura, como indicado em Blomhøj e Niss (2021), há defesa de que o desenvolvimento da competência em modelagem matemática é crucial no ensino de disciplinas científicas em que modelos matemáticos de diferentes tipos e em diferentes domínios científicos são necessários. Além disso, atualmente, os modelos matemáticos têm ganhado destaque, sejam por força da pandemia, das mudanças climáticas, das guerras ou devido às inovações tecnológicas com inteligência artificial etc. (Blomhøj & Niss, 2021; Alzeri, 2024).

Blomhøj e Niss (2021) alegam que estudos sobre a capacidade de analisar e relacionar modelos matemáticos existentes são escassos na literatura. Os autores discutem o que é necessário para compreender e analisar criticamente modelos existentes e indica que a análise de modelos é uma componente importante da modelagem matemática. Para os autores, considerando a perspectiva do ensino superior, a tônica é colocada na aprendizagem sobre os modelos, e não na sua investigação.

Alzeri (2024) se pauta no legado de Paulo Freire e aborda o estudo com modelos matemáticos numa perspectiva crítica no contexto da sala de aula da Educação Básica, o que, segundo o autor, busca “ultrapassar a aprendizagem unicamente dos aspectos matemáticos neles envolvidos” (p. 17), e traz para o debate “o necessário diálogo crítico sobre características pertinentes à existência desses modelos em cada contexto social no qual atuam, em interação com os seres humanos e o mundo que os comporta” (p. 17).

As perspectivas discutidas por estes autores são de grande relevância, especialmente levando em conta a temática da presente edição do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM): *Pensar a Educação Matemática pela pesquisa frente aos desafios do cotidiano escolar e responsabilidade social*. Nossa pesquisa pode contribuir em alguma medida para a discussão, embora o recorte que trazemos se volte a investigar alunos ao se envolverem com a análise de modelos e a certos processos de pensamento matemático.

Neste artigo, buscamos evidenciar: *Que indícios do PMA são manifestados por estudantes de Engenharia Mecânica quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos?* Para isso, inicialmente pretendemos caracterizar o que entendemos por modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos, para então apresentar uma atividade implementada e analisada no sentido de responder à questão de pesquisa.



A fim de compartilhar a trajetória da pesquisa e seus resultados, na sequência trazemos aspectos teóricos sobre modelagem matemática, Análise de Modelos e Pensamento Matemático Avançado, aspectos metodológicos da pesquisa, considerações sobre o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos e a análise qualitativa da mesma com dados de um grupo de alunos participantes e as considerações finais.

## 2 Aspectos Teóricos

Ao nos referirmos à expressão *análise de modelo(s)*, estamos subentendendo modelo(s) matemático(s) como define Bassanezi e Biembengut (1997, p. 65), para os quais, “o Modelo Matemático de um fenômeno é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem de alguma forma, o fenômeno em questão”. Tal entendimento é alinhado com o expresso por Almeida e Vertuan (2014, p. 2): “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático”. Essa perspectiva reforça a importância de alinhar as práticas pedagógicas às discussões e pesquisas já consolidadas na área.

Quanto ao entendimento sobre Análise de Modelos nos apoiamos em Soares e Javaroni (2013), para as quais a Análise de Modelos tem o objetivo de examinar um fenômeno específico em uma área de estudo, discutindo variados conceitos matemáticos. Para elas, o modelo escolhido pode ser um clássico reconhecido na literatura ou um desenvolvido a partir de pesquisas recentes, mesmo que não seja amplamente reconhecido. Em sentido próximo, Sousa (2019) defende a Análise de Modelos como método de ensino que utiliza modelos matemáticos preexistentes, sempre partindo de situações-problema da realidade, com o objetivo de desenvolver tanto o conteúdo curricular quanto o não curricular. Soares (2015) argumenta que a análise de modelos pode ser vista como uma atividade de modelagem matemática, como propõe Niss (2015) ao definir *modelagem prescritiva*. Essa abordagem ressalta a importância de representar objetos ou estruturas de domínios não matemáticos para facilitar a tomada de decisões.

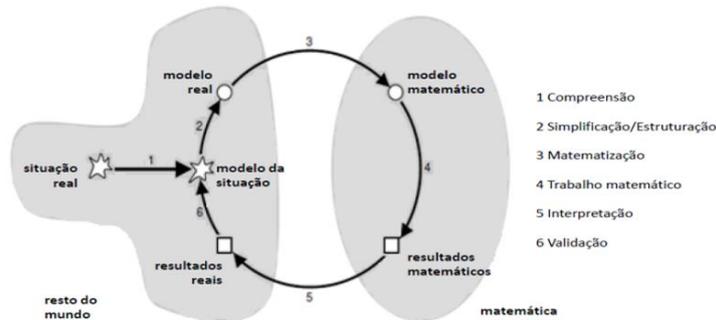
De acordo com Niss (2015), a modelagem prescritiva busca não apenas compreender o mundo, mas principalmente transformá-lo por meio de ações embasadas em análises matemáticas. Dessa forma, a modelagem prescritiva foca no produto - o modelo - e em sua aplicação em diversos contextos, permitindo que outras etapas e objetivos do processo de modelagem sejam abordados de maneira mais fluida. Nesse contexto, autores como Sousa (2019) e Niss (2015) complementam essa visão ao defender a análise de modelos e a modelagem prescritiva como abordagens que ampliam a função educativa dos modelos matemáticos.

Na modelagem prescritiva, o objetivo final é abrir caminho para tomar medidas com base em decisões resultantes de certo tipo de considerações matemáticas, ou seja, “mudar o mundo” em vez de “entender o mundo” (Niss, 2015, p. 69). Portanto, o termo modelagem prescritiva “[...] representa um movimento focado no produto (o modelo) para se concentrar nos propósitos da modelagem.” (Niss, 2015, p. 67).

É destacado em Soares (2015), que tanto a análise de modelos, conforme delineado em seus estudos anteriores como em Soares e Javaroni (2013), quanto a modelagem prescritiva de Niss (2015) estão enraizadas em um ciclo de modelagem básico, o que as caracteriza como atividades pertencentes à modelagem matemática. Com isso, na análise de modelos, o ciclo de modelagem é percebido como rudimentar, uma vez que certas etapas de um ciclo clássico (por

exemplo o da Figura 1) podem ser realizadas antecipadamente por outras pessoas ou por meio da utilização de tecnologia.

**Figura 1** – Ciclo de modelagem matemática



**Fonte:** Blum e Leiß (2005, p. 1626)

Considerando um curso de extensão como contexto educacional, Soares e Vier (2017) caracterizam as ações dos alunos:

Na análise de modelos, os estudantes iniciam o trabalho com um modelo matemático já existente e procuram entender o problema que é modelado, assim como as hipóteses e simplificações que foram utilizadas para elaborá-lo. Neste estudo, há um enfoque na interpretação do modelo, na análise de suas soluções e da influência dos parâmetros em seu comportamento, na avaliação do modelo perante o fenômeno estudado. Os estudantes, de fato, não elaboram um modelo próprio para a situação, mas podem ser encorajados a fazer modificações no modelo estudado. Além disso, como foi o caso do trabalho desenvolvido no curso de extensão, os estudantes podem não resolver o modelo para encontrar suas soluções, mas utilizar um software para ter acesso às mesmas (Soares & Vier, 2017, p. 158).

Almeida (2022) considera, ao definir e caracterizar a abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática, os elementos: “matematização da realidade e resolução de um problema; competências dos alunos em atividades de modelagem matemática; possibilidade de um *design* para atividades de modelagem na sala de aula” (p. 125), como fundamentais para a modelagem no contexto educacional. E, modelagem matemática é caracterizada pela mesma autora como um modo de fazer e obter “uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade e inclui a construção e validação de um modelo matemático” (Almeida, 2018, p. 20).

A mesma autora identifica a “matematização da realidade”, a “resolução de um problema” e o “design para atividades de modelagem” como elementos essenciais para a modelagem matemática no contexto educacional. Almeida (2018) também define modelagem matemática como um método para obter soluções através da construção e validação de modelos matemáticos. Enquanto as fases da modelagem e as ações dos alunos são reconhecidas, o *design* das atividades tem sido amplamente explorado para entender seus impactos educacionais e práticos na sala de aula.

Se por um lado as fases (ou etapas) de uma atividade de modelagem na sala de aula e as ações dos alunos em cada uma destas fases [...] são reconhecidas, por outro lado, o design dessas atividades no cenário educacional tem sido recorrentemente abordado, tanto no âmbito da determinação de uma prática em sala de aula, quanto entre o trabalho de pesquisadores/educadores interessados em investigar possíveis resultados e ganhos educacionais decorrentes desse design (Almeida, 2022, p. 132).

Na pesquisa aqui reportada, de fato, se buscou investigar a proposição de um *design* para abordar situações-problemas, à qual nos referimos como modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos.

Para Soares e Javaroni (2013) a Análise de Modelos é definida como abordagem de ensino e requer uma série de etapas. Primeiramente, é necessário realizar um estudo aprofundado do fenômeno em questão. Em seguida, é preciso analisar as hipóteses que foram consideradas durante a elaboração do modelo. Além disso, é fundamental compreender o significado de cada termo do modelo em relação ao fenômeno em estudo. Posteriormente, é importante investigar o comportamento das soluções do modelo e como este comportamento se relaciona com o fenômeno observado bem como com as hipóteses adotadas. Outro ponto relevante é examinar a influência dos parâmetros do modelo no comportamento das soluções, o que possibilita realizar previsões e avaliar o impacto de possíveis intervenções no fenômeno. Por fim, é interessante realizar uma análise crítica das limitações do modelo. Essas etapas estabelecidas por Soares e Javaroni (2013) para a Análise de Modelos são complementadas pelos procedimentos detalhados por Blomhøj e Niss (2021), que oferecem um aprofundamento na avaliação crítica dos modelos matemáticos.

Blomhøj e Niss (2021) delineiam um conjunto de etapas essenciais para a análise de modelos matemáticos. Consideram que é necessário identificar os elementos básicos do modelo, seguido pela identificação das informações e dados utilizados. Em seguida, é importante reconhecer as hipóteses e simplificações adotadas durante a formulação do modelo. Posteriormente, é importante identificar a aplicação de conceitos matemáticos no modelo, bem como os procedimentos matemáticos utilizados, inferências realizadas e os resultados obtidos a partir desses processos. Uma vez concluída a análise, é fundamental realizar uma avaliação crítica do modelo, levando em consideração sua formulação, relevância e confiabilidade. Essas etapas permitem que se chegue a uma conclusão global sobre o modelo analisado.

Quando todas as etapas de um ciclo de modelagem estão presentes na elaboração de um modelo, a análise de modelos pode ser interpretada como um reflexo desse ciclo. Isso significa que a análise de modelos engloba as etapas de identificação do problema, formulação do modelo, resolução matemática, interpretação dos resultados e validação do modelo, refletindo assim o processo completo de modelagem. Ao analisar um modelo já existente, os estudantes passam por um processo semelhante ao ciclo de modelagem, examinando criticamente cada aspecto do modelo para compreender sua eficácia, limitações e aplicabilidade. Essa abordagem proporciona uma compreensão mais profunda do modelo e do fenômeno que ele representa, contribuindo para o desenvolvimento do processo de modelagem (Blomhøj & Niss, 2021). Esse entendimento de que a análise de modelos reflete o ciclo completo de modelagem se alinha com o ciclo de modelagem proposto por Blum e Leiß (2005) e com a abordagem investigativa descrita por Almeida e Silva (2012).

Blum e Leiß (2005) sugerem o ciclo de modelagem (Figura 1) como orientador da ação do professor, onde enumeram ações cognitivas: 1. Compreensão - de uma situação oriunda da realidade, 2. Simplificação/Estruturação - que envolve delimitar a situação para ser estudada, 3. Matematização - busca pela simplificação da situação e representação por um modelo matemático, 4. Trabalho matemático - para resolver o modelo usando as ferramentas matemáticas, 5. Interpretação - com a discriminação das variáveis matemáticas em torno do modelo, 6. Validação - busca pela coerência da resposta do modelo em relação à situação da realidade, que pode levar o modelador a revisitar o ciclo. No mesmo sentido, Almeida e Silva (2012) consideram o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática uma atividade de investigação que requer do aluno um conjunto de ações cognitivas que estão



associadas às transições dos alunos ao passarem de uma fase à outra.

Como parte do embasamento teórico da pesquisa, assumimos o referencial do Pensamento Matemático Avançado, considerando que Dreyfus (2002) e Tall (2002) defendem que o PMA é fundamental na aprendizagem de definições matemáticas complexas, que são encontradas em diversos níveis educativos, especialmente no Ensino Superior. De acordo com Dreyfus (2002), o PMA envolve um conjunto de processos mentais que incluem a capacidade de representar problemas matemáticos, visualizar soluções, generalizar princípios matemáticos, entre outras habilidades cognitivas.

A representação e a abstração são dois conceitos importantes do PMA. Para Dreyfus (2002), elas são processos complementares que possuem direções opostas. A natureza do PMA está ligada aos processos cognitivos que sustentam o conhecimento matemático, pois influenciam na maneira como o indivíduo aprende, compreende e aplicam conceitos matemáticos. O PMA é composto por subprocessos de aprendizagem que interagem entre si e compreende: representar, visualizar, classificar, conjecturar, analisar, generalizar e abstrair, o que será considerado, por nós, intrínsecos à análise de modelos. Entendemos, segundo Dreyfus (2002), que a representação é o processo de criar e manipular modelos ou imagens mentais que simbolizam conceitos matemáticos e suas relações. Enquanto a abstração é o processo cognitivo pelo qual se extrai e se generaliza o conhecimento essencial a partir de situações específicas ou objetos matemáticos concretos.

Os subprocessos, aos quais vamos nos referir na análise dos dados são: PMA1 - Representação Simbólica: habilidade de utilizar símbolos e notações para expressar e manipular conceitos matemáticos; PMA2 - Representação Mental: capacidade de formar representações internas de objetos ou processos matemáticos, resumindo suas características essenciais em "objetos mentais"; PMA3 - Visualização: uso de imagens mentais para tornar conceitos matemáticos mais tangíveis e compreensíveis; PMA4 - Mudança de Representações: habilidade de alternar entre diferentes formas de representar um conceito matemático, adaptando-se às necessidades da situação; PMA5 - Modelação: criação de modelos matemáticos que simulam características de objetos ou situações reais; PMA 6 - Generalização: capacidade de extrair padrões gerais de informações específicas, ampliando a aplicabilidade dos conceitos matemáticos; PMA 7 - Sintetização: processo de combinar elementos para formar um todo integrado, especialmente em contextos de objetos matemáticos complexos (Dreyfus, 2002).

A seguir, vamos explorar e discorrer sobre os aspectos metodológicos adotados para então fazermos a descrição e análises da atividade desenvolvida em sala de aula, considerando a análise de modelos como uma atividade de modelagem matemática.

### 3 Aspectos Metodológicos

Com o propósito de aprofundar a compreensão do objeto de estudo, a pesquisa (Giroti, 2024) adotou uma abordagem qualitativa, inspirada na Análise de Conteúdo de Bardin (2011). Nesse contexto, o foco está direcionado para a compreensão do significado que os participantes na investigação atribuem às suas próprias experiências.

A Análise de Conteúdo é empregada para explorar e entender o conteúdo de diversos tipos de dados, oferecendo uma base significativa para a pesquisa. Sua eficácia está relacionada à coerência do objeto de estudo, aos princípios metodológicos adotados e à manutenção de um padrão e organização em todas as etapas do processo de análise. Em resumo, ela pode ser compreendida por meio de uma sequência técnica bem definida: em um primeiro momento é realizado uma Pré-Análise, com uma leitura flutuante sobre o que se deseja explorar e é feita a



definição do *corpus* para a análise; depois, é realizado a Exploração do Material, com a definição de unidades de contexto e unidades de registro; por fim, realiza-se o Tratamento dos Resultados, com a interpretação dos mesmos (Bardin, 2011).

O contexto educacional em que a pesquisa foi desenvolvida envolveu a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias oferecida para alunos de Engenharia Mecânica de uma Universidade Federal que estava sob a responsabilidade da segunda autora (professora) e compreendeu o estágio supervisionado da primeira autora (pesquisadora). Embora o planejamento da disciplina com vistas ao desenvolvimento da pesquisa tivesse se iniciado no primeiro semestre letivo de 2022, com o delineamento e implementação de atividades de modelagem matemática na perspectiva da Análise de Modelos, a coleta dos dados analisados ocorreu com uma turma de 45 alunos no primeiro semestre letivo de 2023. Neste artigo, apenas uma das atividades desenvolvidas será analisada, a que denominamos “movimento no Plano Inclinado”.

A atividade foi implementada ao longo de dois encontros de 100 minutos cada, em abril de 2023, com a turma organizada em 10 grupos de três ou quatro integrantes, dos quais 9 grupos participaram e concluíram a atividade. Além do tempo em sala de aula, os grupos tiveram um prazo para concluir e enviar os relatórios pelo Moodle, que mediava todo o processo de avaliação da disciplina. A avaliação ocorreu em etapas: após a submissão da primeira versão do relatório, os grupos receberam feedback com sugestões de aprimoramento e puderam interagir com a professora para esclarecer dúvidas antes de postar a versão final. Após a entrega, os alunos responderam individualmente a um formulário de avaliação sobre o trabalho em grupo, a participação individual e a análise de modelos.

Embora os encontros destinados à atividade tenham sido gravados, tomamos a produção escrita e arquivos gerados por meio de softwares como *corpus* para análise como um ponto de partida para responder: *Que indícios de Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes de um curso de Engenharia que participam de atividades de modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos?* Com a produção escrita e coletiva, em vez de considerar as individualidades, buscamos interpretar a compreensão do grupo, o que pode revelar indícios de PMA advindos das interações e que talvez não fossem identificáveis em análises individuais.

A escolha do Grupo A, com quatro integrantes, se deu após realizamos uma leitura flutuante dos nove relatórios dos grupos e elencamos aquele cujo desenvolvimento perpassou as fases da modelagem matemática e análise de modelos e tenha sido realizado por um grupo coeso, que se referem a um grupo de indivíduos que trabalham bem juntos, e compartilham objetivos comuns. De fato, todos do grupo A estavam presentes nas aulas destinadas à atividade, buscavam referências em conteúdos já estudados, interagem com a professora, enviaram mais de uma versão do relatório, levando em conta as considerações de *feedback* deixadas, além de ter sido um dos grupos que se propôs a comunicar para os colegas de turma o trabalho realizado (não houve tempo para que todos os grupos apresentassem).

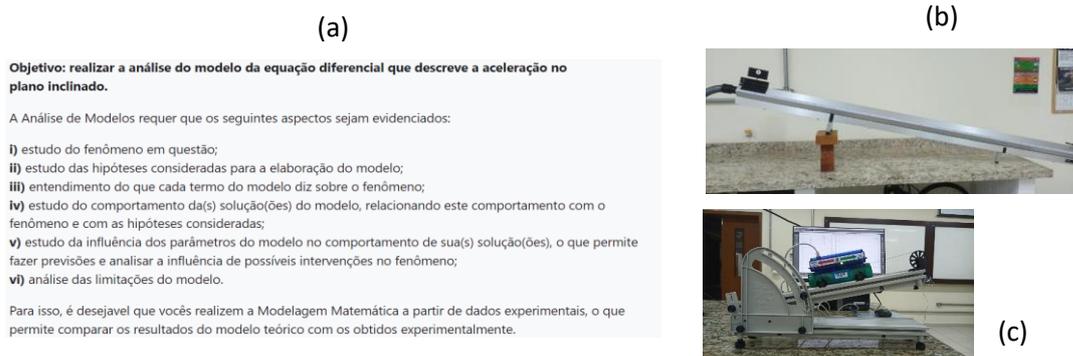
Considerando que o desenvolvimento do Grupo A se configurou como uma atividade de modelagem matemática, investigamos em quais fases da modelagem matemática, Análise de Modelos e processos do Pensamento Matemático Avançado os alunos estavam engajados. Assim, na Exploração do Material (Bardin, 2011) considerando como unidade de contexto as fases da modelagem matemática (MM1 – MM4) e as fases da análise de modelos (AM1 – AM6), e buscamos indícios dos processos do PMA, de tal modo que, a partir da definição das unidades de contexto norteadas pela modelagem matemática e análise de modelos,

identificamos as unidades de registro de acordo com indícios dos processos do PMA. Logo, os processos do PMA podem ser compreendidos como categorias a priori que nortearam o olhar para os dados.

#### 4 Descrição e Análise da atividade “movimento no Plano Inclinado”

Os grupos foram orientados, conforme Figura 2a, de que deveriam realizar a análise do modelo que descreve a aceleração no plano inclinado e que teriam disponível o espaço da sala de aula e de um laboratório de Física localizado próximo à sala. Nesse ambiente, os alunos contavam com o suporte da professora, da pesquisadora e de um técnico de laboratório que deixou disponível dois equipamentos que representavam um plano inclinado: o Equipamento 1 (E1) consistia em um trilho de ar com um corpo deslizando chamado de "cavaleiro" (Figura 2b); o Equipamento 2 (E2), composto por um conjunto que incluía uma rampa ajustável a diferentes ângulos de inclinação, à qual estavam acoplados um carrinho e um acelerômetro (Figura 2c). O E2 registrava a aceleração em cada inclinação por meio de um software. No E1, os alunos optaram por registrar o movimento do cavaleiro no trilho de ar em diferentes inclinações por meio de gravações em vídeos com seus *smartphones*.

**Figura 2:** (a) parte do enunciado, (b) trilho de ar e cavaleiro (E1) e (c) conjunto com acelerômetro (E2)



**Fonte:** arquivo das autoras

Os alunos tinham então duas possibilidades claras: iniciar pelo estudo e análise do modelo ou iniciar pela coleta de dados no laboratório. O Grupo A fez a primeira opção, embora tenham feito a coleta de dados ainda no primeiro encontro.

A partir do modelo  $a = g \cdot \text{sen}(\theta)$ , com  $a$ : aceleração do cavaleiro,  $g$ : aceleração da gravidade e  $\theta$ : ângulo de inclinação do trilho, obtido na internet, o grupo utilizou conhecimentos teóricos para deduzir tal modelo e para reconhecer que o modelo inicial poderia ser dado por duas EDO de primeira ordem ( $\frac{dv}{dt} = g \cdot \text{sen}(\theta)$ , com  $v$ : velocidade e  $t$ : tempo e  $v = \frac{dS}{dt}$ , com  $S$ : espaço e  $t$ : tempo) que resolveram simultaneamente. Assim, os alunos formularam modelos matemáticos para descrever o comportamento do cavaleiro no trilho inclinado, incorporando ajustes em relação ao modelo inicial da literatura. A partir da resolução de Problemas de Valor Inicial (PVI) estabeleceram relação entre o resultado obtido com o modelo conhecido da Física  $S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$  e, para definir as condições iniciais ( $S_0$  e  $V_0$ ) fizeram o experimento no laboratório para diferentes inclinações e utilizaram-se do recurso de videoanálise com o software *Tracker* (Figura 3), chegando ao modelo  $X_t = At^2 + Bt + C$  ( $X_t$ : espaço no tempo  $t$  e para a inclinação de  $\theta = 2,8^\circ$ , resultou em  $A = 2,158e - 1$ ,  $B = -5,14e - 3$  e  $C = -9,140e - 1$ ). A abordagem do grupo permitiu associar o modelo teórico inicial a outro obtido a partir de uma coleta de dados empíricos com um ajuste de curva. Nesse sentido, o grupo chegou à

interpretação e validação dos resultados, como ilustrado na Figura 3 e sugerido no ciclo de Blum e Leiß (2005).

**Figura 3:** Recortes do relatório do Grupo A e texto da Conclusão

A equação em questão foi obtida através da resolução de equações diferenciais. Agora, discutiremos como a equação da aceleração pode ser determinada de forma gráfica. Para isso, utilizamos um software de análise de vídeo (Tracker), que permitiu a criação do gráfico (Figura 3) de posição em função do tempo, com ajuste polinomial, a partir do vídeo gravado durante o experimento.



Figura 3 - Distância pelo tempo do cavaleiro

| Tabela 2 - Valores para aceleração. |                  |                       |
|-------------------------------------|------------------|-----------------------|
| 'a' pela EDO                        | 'a' pelo Gráfico | 'a' pelo acelerômetro |
| 0,4738                              | 0,4316           | 0,40                  |

Fonte: Autoria Própria (2023)

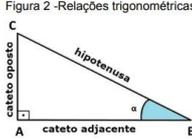
Ao comparar os valores de aceleração obtidos através da Equação Diferencial Ordinária (EDO), do gráfico de posição por tempo e do acelerômetro, pode-se notar uma diferença significativa entre eles. [...] Por outro lado, é interessante notar que a aceleração calculada pelo gráfico é a que mais se aproxima da correta, medida pelo acelerômetro. Isso demonstra a importância de utilizar equipamentos precisos e confiáveis para a coleta de dados experimentais, uma vez que eles são fundamentais para validar ou refutar hipóteses e teorias na física. Por fim, é válido ressaltar que o confronto entre diferentes resultados obtidos por diferentes métodos é essencial para aprimorar a compreensão dos fenômenos físicos e para identificar possíveis fontes de erros experimentais, levando a um refinamento contínuo das teorias científicas.

**Fonte:** arquivo das autoras

Trazemos no Quadro 1 recortes do relatório do Grupo A, as unidades de registro com indícios dos processos de representação do PMA (PMA1 – PMA5). Considerando como unidade de contexto as fases da modelagem matemática e da análise de modelos.

**Quadro 1** – Processos de Representação referentes à análise da atividade

| Processo         | Descrição  | Evidências   |
|------------------|--|--|
| Simbólica – PMA1 | Momento em que o grupo conseguiu manipular os símbolos como se fossem objetos mentais.           | <p>Um plano inclinado é uma superfície plana que forma um ângulo com o eixo horizontal. A partir de um diagrama de forças é possível escrever uma equação para a aceleração.</p> <p>Figura 1 - Diagrama de Força em um plano inclinado</p> <p>Fonte: PREPARA ENEM (2021)</p> <p>No plano inclinado sem atrito, a aceleração será constante, e dependerá da noção do que é força peso, que é uma força que surge da atração gravitacional entre dois corpos constituídos de massa. Assim ela é calculada pelo produto da aceleração da gravidade com a massa.</p> |
| Mental PMA2      | Quando conseguiram representar os processos matemáticos e físicos a partir de suas propriedades. | <p>Para determinar a aceleração, utilizando essas concepções deve-se decompor a força peso na direção do eixo x (1) e na direção do eixo y (2), e aplicar às relações trigonométricas.</p> $P_x = P \cdot \sin(\theta) \quad (1)$ $P_y = P \cdot \cos(\theta) \quad (2)$ <p>Fazendo uso da segunda lei de Newton, que diz que a força (F) é o produto da massa (m) com a aceleração (a), e substituindo a força pela força peso, é possível obter uma nova equação (3).</p> $m \cdot g \cdot \sin(\theta) = m \cdot a \quad (3)$                                 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| <p>Visualização – PMA3</p>  | <p>Utilizaram imagens para realizar representações.</p>                         | <p>Para o cálculo do ângulo, retorna-se a Figura 1 e retoma-se as relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Tais relações referem-se a seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante. O seno será suficiente para encontrar o ângulo da inclinação do plano.</p>  <p>Fonte: TODA MATÉRIA (2022)</p> <p>A partir do triângulo da Figura 2, é possível calcular o seno do ângulo (alfa) com a equação (4).</p> $\text{Sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad (4)$ <p>A fim de isolar o ângulo (<math>\alpha</math>) aplica-se a equação (5).</p> $(\alpha) = \arcsen\left(\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}\right) \quad (5)$ |
| <p>Mudança de representações e alternâncias entre elas – PMA4</p> | <p>Conseguiram fazer mais de uma inferência acerca do mesmo modelo.</p>         | <p>A partir da equação (3) da aceleração no plano inclinado, e sabendo que a aceleração é uma variação de velocidade (<math>dv</math>) em um período de tempo (<math>dt</math>), foi possível escrever a equação (8) na forma normal de uma EDO.</p> $\frac{dv}{dt} = g \cdot \text{sen}(\theta) \quad (8)$ <p>Analisando matematicamente, é possível trabalhar pelo método de variáveis separáveis, deixando <math>dv</math> de um lado e <math>dt</math> de outro, e integrando ambos os lados, como mostra a equação (9).</p> $\int dv = \int (g \cdot \text{sen}\theta) dt \quad (9)$   |
| <p>Modelação – PMA5</p>   | <p>Obtiveram um modelo, que pode ser considerado como uma estrutura mental.</p> | <p>A fim de determinar a constante C, foi utilizado um Problema de Valor Inicial (PVI) com a condição de que <math>S(0)</math> é igual a zero. Isso nos permitiu concluir que a constante C é igual a zero. Como resultado, obtivemos uma solução particular para a Equação Diferencial Ordinária (EDO), dada pela equação (14).</p> $S(t) = \frac{g \cdot \text{sen}\theta \cdot t^2}{2} \quad (14)$   |

Fonte: Autoras (2024).

Processos de Representação referentes à análise da atividade podem ser evidenciados conforme ilustrações na terceira coluna do Quadro 1. O grupo mobilizou PMA1 (simbólica) ao manipular os símbolos como se fossem objetos mentais, por exemplo ao abordarem o que é um plano inclinado e evidenciar, a partir de um diagrama de forças, uma equação para aceleração. PMA2 (mental) pode ser notada quando os alunos representaram os processos matemáticos e físicos a partir de suas propriedades, como quando determinaram a aceleração e aplicaram relações trigonométricas que estudaram em etapas anteriores da escolaridade.

Quando utilizaram imagens para mostrar o que queriam, como ao calcular o seno de um ângulo por meio da observação de uma imagem de um triângulo retângulo e ao aplicar relações métricas, evidenciamos PMA3 (visualização). Já na mudança de representação e alternância entre elas (PMA4) o Grupo fez mais de uma inferência acerca do mesmo modelo, por exemplo, ao escrever uma EDO na sua forma normal e depois trabalhar com o método de variáveis separáveis para a resolução da EDO. Ao realizarem a resolução da EDO chegaram à solução geral que permitiu relacionar a posição do “cavaleiro” em função do tempo de descida. Assim, PMA3 (modelação) é evidenciada quando o grupo utilizou um PVI para concluir que a constante do modelo obtido era igual a zero, obtendo uma solução particular para a EDO.

Além dos processos de Representação do PMA, o relatório do Grupo A também indica, parcialmente, o processo de Abstração. Isso se evidencia na capacidade de inferir

generalizações, identificar pontos em comum e expandir conceitos e questões abordadas no trabalho, conforme ilustrado no Quadro 2:

**Quadro 2** - Indício do Processo de Generalização do Grupo A na atividade

| Processo             | Descrição  | Evidências  |
|----------------------|--|---|
| Generalização – PMA6 | Capacidade de inferir generalizações e identificar pontos em comum e expandir conceitos. | Essa equação (15) foi comparada com a equação (6) e observou-se que o parâmetro A é igual à metade da aceleração. Assim, tirou-se a equação (16) da aceleração de forma gráfica.<br><br>$a = 2.A \quad (16)$<br>Substituindo o valor de A na equação (16), foi obtido um resultado de 0,4316 [m/s <sup>2</sup> ]. |

Fonte: Autoras (2024)

Após a entrega do relatório, o Grupo A se prontificou a apresentar o resultado do estudo da situação-problema para a turma. Durante a apresentação, a validação e interpretação dos resultados evidenciaram indícios do processo de generalização (PMA6) e sintetização (PMA7). Foi por meio dessa discussão que aspectos do processo de abstração se tornaram evidentes. Segundo Dreyfus (2002), abstrair é construir estruturas mentais e matemáticas, criando relações entre propriedades e objetos matemáticos. Já na generalização, o grupo inferiu e identificou pontos em comum para expandir os conceitos abordados, por exemplo quando eles obtiveram uma EDO e conseguiram chegar à equação da aceleração na sua forma gráfica.

Com base nas discussões de Soares (2015) e Sousa (2019), compreendemos que a Análise de Modelos pode ser caracterizada como um processo de modelagem matemática, em que os alunos partem de um modelo clássico e buscam entender o problema que está sendo modelado, além de realizarem suposições e simplificações a fim de adaptá-los para as condições que lhe convém, dependendo da situação-problema. Este estudo tende a ser voltado para a interpretação do modelo, análise de suas soluções e na influência dos parâmetros em seu comportamento, comparando com o que está presente na literatura.

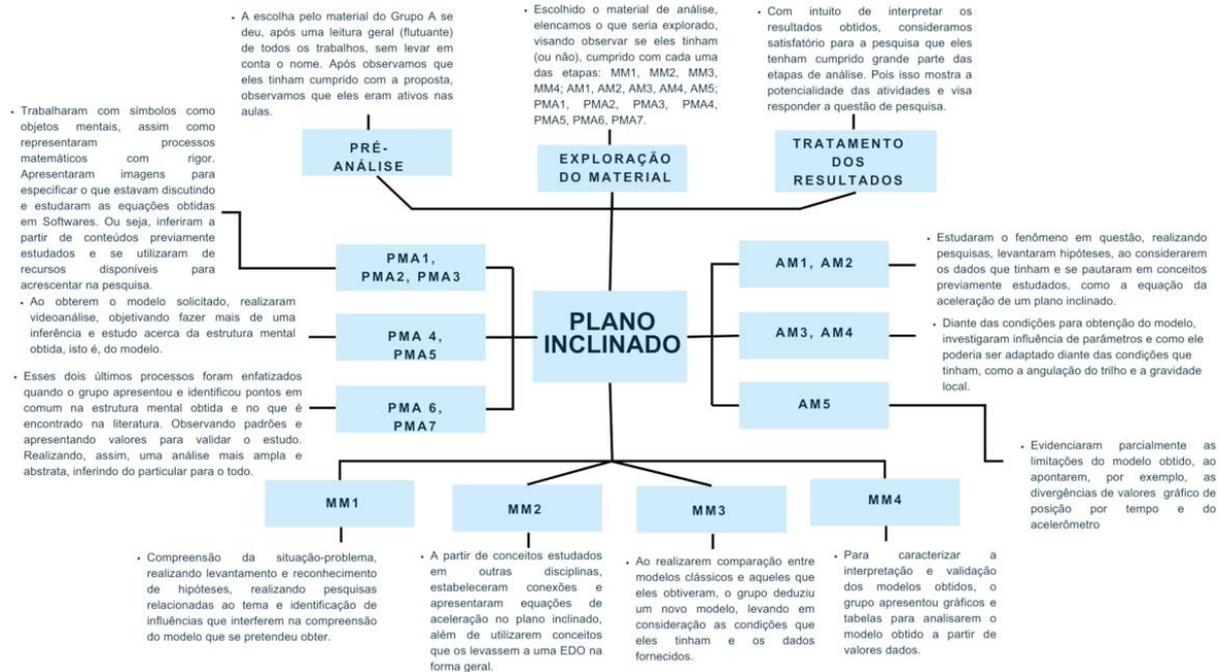
Destacamos alguns pontos que caracterizam que o grupo realizou a análise do modelo proposto: no estudo do movimento no Plano Inclinado (fenômeno em questão), eles conseguiram abordar o que é um plano inclinado, apresentaram estruturas mentais e diagramas para validar as constatações. No estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo, eles se pautaram em conceitos e conteúdos estudados anteriormente, como os conceitos físicos do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) e relações trigonométricas. No entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno, podemos destacar o momento em que eles obtiveram uma EDO na sua forma normal, partindo de uma equação sobre a aceleração no plano inclinado.

Quanto ao estudo do comportamento das soluções do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas, evidenciamos quando o grupo igualou uma solução particular com a equação de posição, obtendo a equação da aceleração no plano inclinado. Já para o estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de suas soluções, eles compararam os valores de aceleração obtidos através de uma EDO, o gráfico de posição por tempo e do acelerômetro (Figura 3), evidenciando os motivos que podem ter levado a divergências. Portanto, por meio dessas análises, conseguimos constatar que os estudantes exploraram o fenômeno estudado com objetivo de compreender a natureza do plano inclinado e suas equações subjacentes. Por fim, para a análise das limitações

do modelo, vale ressaltar que os estudantes simplificaram a realidade, identificaram as limitações e ajudaram a compreender os resultados, o que tende a auxiliar na interpretação desse modelo, destacando onde ele pode falhar devido a fatores diversos.

Com a análise realizada, entendemos que os processos do PMA evidenciados foram propiciados, em boa parte, pela natureza da atividade desenvolvida, especialmente, devido ao fato de que os alunos se envolveram nas fases do ciclo de modelagem. A Figura 4 mostra uma síntese da atividade, que foi discutida nesta seção.

**Figura 4 - Síntese da análise qualitativa dos dados para a atividade do “movimento no Plano Inclinado”**



Fonte: Giroti (2024)

Segundo Soares e Javaroni (2013), a Análise de Modelos é uma abordagem para ensinar modelos matemáticos em sala de aula, onde a ideia se embasa em analisar um modelo de um fenômeno científico ou cotidiano. Isso serve como contexto para a introdução de novos conceitos matemáticos, como neste caso, em que o grupo partiu do modelo  $a = g \cdot \sin(\theta)$  e compreendeu que poderiam discutir o movimento do “cavaleiro” a partir de duas EDO de primeira ordem  $a = \frac{dv}{dt}$  e  $v = \frac{ds}{dt}$ , o que condiz com o conhecimento sobre EDO que tinham até o momento do estudo. No entanto, o mesmo modelo poderia ser resolvido como uma EDO de segunda ordem não-homogênea ( $a = \frac{d^2s}{dt^2} = g \cdot \sin(\theta)$ ), e esta foi uma oportunidade que se mostrou de introduzir o estudo de EDO de ordem superior.

A fim de retomar a questão de pesquisa, na próxima seção trazemos algumas considerações sobre a pesquisa.

## 5 Considerações Finais

Neste artigo, analisamos uma atividade de modelagem matemática desenvolvida em uma disciplina de EDO em um curso de Engenharia Mecânica, com foco na Análise de Modelos como atividade de modelagem matemática, visando evidenciar o Pensamento Matemático Avançado (PMA) dos participantes. A pesquisa, de natureza qualitativa, concluiu que a análise de modelos foi realizada em associação com as fases de uma atividade de modelagem



matemática, o que influenciou a mobilização de diferentes processos do PMA. A partir dessa perspectiva, consideramos que a proposição de uma atividade de modelagem matemática, com condições para que os alunos percorram todas as fases de um ciclo de modelagem, incluindo coleta de dados em laboratório, registros escritos, elaboração de relatórios e interações entre alunos e professora, favorece a manifestação dos processos do PMA.

No Quadro 1 e no Quadro 2, encontramos registros que exemplificam algumas evidências de processos do PMA. Segundo Dreyfus (2002), a compreensão na mente do aluno é formada a partir de uma sequência de atividades que envolvem interações entre variados processos mentais. Evidenciando que, na pesquisa, os alunos conseguiram desenvolver e apresentar de forma satisfatória processos mentais. Especialmente porque o grupo empregou estruturas cognitivas derivadas de atividades de matemática, por exemplo quando eles analisaram o movimento do objeto sobre o plano inclinado em diferentes angulações e se utilizaram de conceitos envolvendo funções trigonométricas e equações diferenciais para modelar a situação e apontar suas limitações.

Uma limitação desta pesquisa é a análise restrita ao relatório como única fonte de dados. No entanto, pretendemos expandir este estudo em um artigo mais completo, abordando todos os aspectos relevantes com novas evidências e questões que contribuam para o avanço na área. Por exemplo, ao analisar as gravações de áudio e vídeo disponíveis no acervo da pesquisa, espera-se identificar outros aspectos e indícios, além de novas mobilizações do Pensamento Matemático Avançado. Essas análises adicionais permitirão uma compreensão mais aprofundada das ações dos alunos nas fases de modelagem matemática e de como a análise de modelos pode influenciar o desenvolvimento do PMA.

Entendemos que Soares (2015) apresenta argumentos semelhantes aos da modelagem prescritiva de Niss (2015) para justificar que a análise de modelos pode ser entendida como atividade de modelagem matemática, que visa projetar objetos ou estruturas de domínios extra matemáticos. Segundo Niss (2015), as etapas do ciclo de modelagem não precisam ser seguidas rigidamente para que ocorra um processo de modelagem. Assim, a obtenção de uma EDO que descreve o movimento de um objeto em um plano inclinado, por meio de uma atividade de modelagem matemática, relaciona-se ao conceito de modelagem prescritiva. No caso apresentado, os alunos percorreram o ciclo de modelagem para entender e prever o comportamento do objeto, no entanto, ao coletar dados para alimentar o modelo teórico e obter uma solução particular para a EDO ampliaram o estudo por meio da obtenção de outro modelo, a partir da videoanálise. Ao comparar os modelos, o grupo percorreu todo ciclo de modelagem.

O processo pelo qual os alunos obtiveram uma EDO para descrever o movimento de um objeto sobre o plano inclinado desenvolveu o PMA deles, por exemplo, no momento em que os estudantes deduziram a EDO, mobilizaram a generalização e abstração, pois eles precisam abstrair os aspectos físicos do problema para transformá-los em uma questão matemática generalizada, tal como precisaram se pautar em conceitos previamente estudados em outros momentos para conseguirem compreender satisfatoriamente a situação. Deste modo, nos arriscamos a afirmar que, tanto a modelagem matemática quanto a análise de modelos exigem, ao menos, parte dos processos de Pensamento Matemático Avançado para serem desenvolvidas. Enquanto a modelagem prescritiva fornece estrutura para que os alunos analisem criticamente o modelo teórico em comparação ao modelo obtido a partir de dados empíricos.

Na atividade sobre o estudo de um plano inclinado, encontramos evidências de PMA dos alunos ao mobilizar conceitos das forças atuantes, como gravidade, força normal e atrito, utilizando trigonometria para decompor a gravidade e princípios de física e cálculo para derivar



a equação que descreve a aceleração do objeto. A atividade reforçou sua compreensão dos conceitos físicos e expandiu seu conhecimento matemático, integrando várias disciplinas para desenvolver o modelo. Com isso, os alunos praticaram e ampliaram suas habilidades matemáticas, evidenciando o PMA.

Amparados em Dreyfus (2002), concordamos que os alunos têm sido ensinados a partir do resultado das atividades dos matemáticos, em vez de serem orientados pelos processos que os matemáticos seguiram para construir esses resultados. Segundo o autor, alcançar a compreensão de um objeto matemático não se resume a definir e exemplificar um conceito abstrato. Pelo contrário, é necessário construir as propriedades desse conceito por meio de deduções a partir da sua definição, assim, vemos em atividades de modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos uma possibilidade de encaminhamento.

Levando isso em consideração, e no sentido de buscar as evidências do PMA nos registros do desenvolvimento das atividades, a partir do exercício de análise desta atividade, no texto da dissertação a qual este artigo traz um recorte (Giroti, 2024), organizamos um quadro que busca antecipar encaminhamentos possíveis para a modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos e com isso identificar o potencial de tais atividades para cada processo do PMA.

Ao compartilhar os resultados parciais da pesquisa, esperamos contribuir em alguma medida para as discussões do GT10, no sentido do que foi apontado por Almeida (2022), o de investigar possíveis resultados e ganhos educacionais decorrentes de *design* de atividades de modelagem matemática no cenário educacional.

## Referências

- Alzeri, A. L. (2024). Estudo com Modelos Matemáticos realizado sob uma perspectiva crítica (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências de Marília.
- Almeida, L. M. W. de, & Vertuan, R. E. (2014). *Modelagem Matemática na Educação Matemática*. In L. M. W. de Almeida & K. P. da Silva (Organizadoras), *Modelagem Matemática em Foco* (pp. XX-XX). Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda.
- Almeida, L. M. W. (2018). *Considerations on the use of mathematics in modeling activities*. ZDM, 50(1), 19–30.
- Almeida, L. W. (2022). *Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática*. Vydia (Santa Maria, Online), 42, 121-145.
- Almeida, L. M. W., & Silva, K. A. P. (2012). *Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência*. Ciência e Educação (UNESP. Impresso), 18, 623-642.
- Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70.
- Bassanezi, R. C., & Biembengut, M. S. (1997). *Modelação Matemática: uma velha forma de pesquisa - um novo método de ensino*. Revista Números.
- Blomhøj, M., & Niss, M. (2021). *Decoding, understanding, and evaluating extant mathematical models: What does that take?* Quadrante, 30(2), 9-36. <https://quadrante.apm.pt/article/view/24129/18995>.
- Brasil. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Superior.



- Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019.* (2019). Diário Oficial da União. <https://www.in.gov.br/web/dou/-/resolucao-no-2-de-24-de-abril-de-2019-85344528>
- Blum, W., & Leiß, D. (2005). *How do students and teachers deal with modeling problems?* In C. R. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA-12): Education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing.
- Dreyfus, T. (2002). *Advanced mathematical thinking processes*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.
- Giroti, N. I. (2024). *Modelagem matemática na perspectiva da análise de modelos: Indícios do pensamento matemático avançado no estudo de equações diferenciais ordinárias* (Dissertação de Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina.
- Niss, M. (2015). *Prescriptive modelling - challenges and opportunities*. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 67-80). Cham: Springer.
- Soares, D. S., & Javaroni, S. L. (2013). *Análise de Modelos: Possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula*. In M. C. Borba & A. Chiari (Eds.), *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Soares, D. S. (2015). *Model analysis with digital technology: A “hybrid approach”*. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences (ICTMA 16)* (pp. 453-463). New York: Springer.
- Soares, D. S., & Vier, G. (2017). *Os diálogos em um ambiente de análise de modelos e tecnologias: Queda de um objeto com resistência do ar*. *Educere et Educare*, 12(24).
- Sousa, E. S. (2019). *Análise de Modelos: um método de ensino de Matemática na Educação Básica* (Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre: PUCRS.
- Sousa, E. S. (2021). *Análise de modelos como um método de ensino de matemática na educação básica*. *Revista Práxis Educacional*, 17(45), 316-337.
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.