A existência das geometrias não euclidianas no ensino de Matemática: restrições da geometria euclidiana e origem de outras geometrias

Non-Euclidean geometries in teaching mathematics: the restrictions of Euclidean geometry and the origin of other geometries

Milenko Schiavetti Basilio Kovacevic[1]
Sonia Barbosa Camargo Igliori[2]

Resumo: O objetivo deste artigo é demonstrar a possibilidade da existência das geometrias não euclidianas no sistema educacional, tomando como apoio a relevância histórica e cultural e as limitações da geometria euclidiana para a compreensão de fenômenos reais. A contextualização epistemológica proposta pela TAD foi essencial para perceber que a geometria euclidiana fornece os fundamentos tecnológico-teóricos que justificam as técnicas empregadas em atividades práticas, ou seja, estabelece um raciocínio para uma ação e diversas justificativas para sua existência. Concernente à origem da geometria esférica na Antiguidade, essa contextualização está em atividades provenientes, principalmente, da astronomia e da navegação. O desenvolvimento do conhecimento matemático, relacionado à validade do quinto postulado, impulsionou o surgimento das geometrias não euclidianas, hiperbólica e elíptica, conceitos que só foram contextualizados no século XX, na teoria da relatividade.

Palavras-chave: Geometria Esférica. Geometria Hiperbólica. Transposição Didática. Teoria Antropológica do Didático. Modelo Epistemológico de Referência.

Abstract: The aim of this research is to demonstrate the possibility of non-Euclidean geometries existing in the educational system, relying on historical and cultural relevance and the limitations of Euclidean geometry for understanding real phenomena. The epistemological contextualization proposed by ADT was essential to understand that Euclidean geometry delivers the technological-theoretical foundations that justify the techniques used in practical activities, in other words, it establishes a reasoning for an action and various justifications for its existence. Concerning the origin of spherical geometry in antiquity, this contextualization is found in activities stemming mainly from astronomy and navigation. The development of mathematical knowledge, related to the validity of the fifth postulate, led to the emergence of non-Euclidean geometries - hyperbolic and elliptical, concepts that were only contextualized in the 20th century in the theory of relativity.

Keywords: Spherical Geometry. Hyperbolic Geometry. Didactic Transposition. Anthropological Theory of the Didactics. Epistemological Reference Model.

1 Introdução

Na área da Educação Matemática, a procura por métodos e estratégias eficazes para o ensino de geometria tem sido constante. A geometria, com sua diversidade de formas, características e relações espaciais, desafia tanto educadores quanto alunos a explorarem um universo de ideias complexas e abstratas. Entre as várias teorias e abordagens que surgiram ao longo do tempo, a Abordagem Ecológica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) se destaca como um modelo teórico para compreender e aperfeiçoar o ensino de geometria.

[1] Pontifícia Universidade Católica • São Paulo, SP — Brasil • ✉ oknelimlili@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0003-2041-553X
[2] Pontifícia Universidade Católica • São Paulo, SP — Brasil • ✉ soniaigliori@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-6354-3032

ISSN 2764-3158

A abordagem da Teoria Antropológica do Didático, criada por Yves Chevallard, oferece uma visão para analisar os métodos de ensino e de aprendizagem da Matemática, considerando a Educação Matemática como um sistema ecológico. Nesse sistema, o conhecimento matemático faz parte de um ambiente educacional em constante transformação, indo além dos aspectos cognitivos e pedagógicos.

Segundo Artaud (1997), a TAD possibilita a análise dos processos de transposição didática ao considerar as interações entre objetos, indivíduos e instituições, com base na problemática ecológica. Essa abordagem busca responder às questões propostas por Chevallard em 1997: o que existe ou não existe? O que deve existir? O que poderia existir? Quais são as condições que facilitam, permitem ou, ao contrário, dificultam ou até impedem a existência de determinado objeto?

De acordo com a autora, as respostas a essas perguntas podem esclarecer as condições de existência da Matemática no sistema educacional. Essas respostas derivam de uma investigação epistemológica que visa desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência (MER), que auxilia na ampliação dos estudos didáticos e na explicação da razão de ser, no caso específico, das geometrias não euclidianas.

Assim, neste artigo, buscamos, por meio de um estudo epistemológico, as razões de ser das diferentes geometrias, no sentido de entender por que algumas não fazem parte do sistema educacional vigente. Além disso, lançar luz sobre os desafios e oportunidades específicas que surgem ao ensinar geometria, uma disciplina que, frequentemente, exige uma mudança significativa na maneira como os alunos percebem e interagem com o espaço e as formas.

À medida que avançamos neste estudo, configura-se que a compreensão da dimensão epistemológica das geometrias não euclidianas é fundamental para promover uma Educação Matemática mais eficaz e significativa, que subsidia a capacitação de professores para o seu ensino. O ensino dessas geometrias, que geralmente não foram abordadas tanto na Educação Básica quanto na Superior, implica superar desafios para a busca de contextos que lhes deem sentido, além de sensibilidade para as interações complexas entre os componentes do sistema educacional.

Tal ensino aborda os desafios dessa disciplina de forma mais contextualizada e sensível às interações complexas entre os componentes do ecossistema educacional, incluindo as geometrias não euclidianas que enriquecem o entendimento do espaço. Nesse caso, a dimensão ecológica da TAD pode ser aplicada ao mostrar como as teorias cosmológicas são adaptações matemáticas na busca para compreender o universo. Isso enfatiza a Matemática como uma ferramenta fundamental para a exploração do ambiente cósmico e para a construção de modelos que representam sua evolução.

Os meios para atingir os objetivos da pesquisa estão descritos nas seções 2 a 5, de forma sucinta, em consonância com o espaço permitido para a escrita do artigo. Nelas, incluem-se: duas teorias, as primeiras geometrias e os Elementos de Euclides, as geometrias não euclidianas e limitações da geometria euclidiana. A seção 6, completa o artigo, sendo dedicada às considerações finais.

2 Transposição Didática e Teoria Antropológica do Didático

De acordo com Chevallard (2018, p. 23), a Transposição Didática surge para determinar o porquê dos conteúdos de saber estudados em uma sala de aula, em um processo de transição desse conteúdo do saber sábio ao saber ensinado. Essa teoria possibilita identificar duas transposições possíveis: a transposição didática externa e a interna. A primeira é realizada no âmbito do que Chevallard denominou de noosfera (sistema de escolas, sociedade e a esfera acadêmica) e refere-se às transformações do saber sábio em saber a ser ensinado. Nesse processo, é necessária uma seleção, pois nem todo saber sábio é adequado para o ensino; uma adaptação para o contexto escolar, que o simplifica, tornando-o acessível e o relaciona à realidade dos alunos, bem como uma organização de forma lógica e coerente que facilita o aprendizado.

A transposição didática interna refere-se ao processo de transformação do saber a ser ensinado em saber ensinado conduzido por um professor. O saber a ser ensinado é adaptado para o contexto escolar, simplificado, organizado e contextualizado para ser mais acessível aos alunos, de acordo com as condições de aprendizagem na escola e nas salas de aula. O professor seleciona, adapta e organiza o conteúdo a ser ensinado conforme sua visão de mundo e experiência como educador, entre outros fatores.

Para Chevallard (2018, p. 23), o saber acadêmico é o saber produzido por cientistas, considerado verdadeiro e rigoroso. No entanto, quando trata do saber sábio, relaciona-se a um saber produzido por alguém independentemente "dos níveis considerados na escala dos valores culturais na sociedade correspondente." Nesse sentido, embora o saber produzido na academia seja complexo, abstrato e considerado sábio, há saberes sábios que não são acadêmicos.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), como uma expansão da Transposição Didática, oferece uma análise mais sistemática e dinâmica do papel dos elementos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem. Ela permite uma investigação detalhada dos processos de transposição ao colocar em jogo as relações entre objetos, pessoas e instituições. Por exemplo, os professores fazem escolhas quanto aos aspectos de um conceito matemático e podem adaptar sua apresentação de acordo com o nível de conhecimento de seus alunos. Por sua vez, os alunos trazem ou desenvolvem suas próprias concepções em relação ao mesmo conceito matemático, o que pode influenciar sua jornada de aprendizagem. Além disso, os livros didáticos variam na apresentação de um conceito matemático, dependendo do enfoque escolhido pelo autor. Dessa maneira, o olhar antropológico para o saber sugere uma nova epistemologia, que considere não apenas a construção dos saberes, mas também sua utilização, seu ensino e sua aprendizagem. Destarte, para Chevallard (2018, p. 35, tradução nossa), "a TAD define a didática como a ciência das condições e restrições da difusão social das praxeologias. Assim a didática da matemática é a ciência das condições e restrições da difusão social das praxeologias matemáticas."

Em última instância, a TAD considera, segundo Chevallard (2002a), que toda e qualquer atividade humana consiste em um *saber fazer*, no qual se identifica uma tarefa t de um determinado tipo T, e uma técnica τ que exige uma justificativa, a qual o autor denomina de *tecnologia* e a representa por θ que, ao mesmo tempo que explica a técnica, a descreve e a justifica como uma maneira correta de cumprir a tarefa. Essa tecnologia, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Em suma, toda atividade humana implementa uma organização que o autor apresenta como $[T/\tau/\theta/\Theta]$, chamada *praxeologia*.

Para Chevallard (2002b), a palavra *praxeologia* enfatiza a estrutura $[T/\tau/\theta/\Theta]$. O termo grego *práxis*, que significa *prática*, refere-se ao bloco prático-técnico, que agrega os tipos de tarefas e as técnicas $[T/\tau]$. O termo grego *logos*, que significa *razão*, *discurso racional*,

ISSN 2764-3158

relaciona-se ao bloco tecnológico-teórico, composto por tecnologia e teoria [θ/Θ]. Para o autor, o mérito de usar a palavra *praxeologia* é que ela expressa um fato antropológico que é tão banal quanto fundamental: não há *práxis* sem *logos*; não há *logos* que seja para sempre inocente de implicações *praxias*. No contexto da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a praxeologia matemática desempenha um papel essencial no ensino, pois está relacionada a um tema específico, além de ser o objetivo de ensino do professor ao elaborar uma praxeologia didática.

Como destacam Almouloud e da Silva (2021, p. 117), a TAD é uma contribuição significativa para a didática da Matemática, uma vez que entende "o conhecimento matemático como uma atividade humana de estudo de tipos de problemas" e enfatiza "o estudo das organizações praxeologias didáticas concebidas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas."

Referenciando-se na TAD, Gastón (2011) afirma que um problema didático é um fenômeno complexo que pode ser analisado com base em três dimensões fundamentais: a epistemológica, a econômico-institucional e a ecológica, que devem entrar em jogo na análise de problemas de pesquisa em didática da Matemática.

A dimensão epistemológica é aquela que expressa o aspecto matemático central do problema e permite elaborar as razões históricas subjacentes à construção de determinado saber matemático, com o objetivo de elaborar um Modelo Epistemológico de Referência (MER). Essa dimensão é fundamental para a compreensão de um problema didático, pois é a partir dela que se define o que é ensinado. O saber matemático é um saber complexo e dinâmico, que está em constante evolução e, por isso, é importante considerar as suas diferentes perspectivas, bem como as diferentes formas de representá-lo.

A dimensão econômico-institucional representa a gestão didática para abordar as contingências institucionais e as regras que afetam o ensino de Matemática em instituições educacionais. Um MER construído nessa dimensão permite investigar como as praxeologias relacionadas a um objeto de ensino se comportam em uma instituição específica, considerando fatores como currículos, livros didáticos e normas institucionais.

Por fim, a dimensão ecológica, referenciada no MER construído, destaca as condições necessárias para o estudo institucionalizado de Matemática e as restrições que afetam esse estudo, além de ressaltar a importância de considerar as circunstâncias ambientais que podem influenciar o ensino e a aprendizagem de Matemática. Essas dimensões, segundo Gascón (2011), são cruciais para uma análise aprofundada dos problemas didáticos em Matemática, além de permitirem compreender não apenas o conteúdo matemático em questão, mas também questões institucionais e ecológicas que moldam a prática educacional.

O MER desempenha um papel fundamental ao permitir uma análise aprofunda dos saberes matemáticos a serem ensinados. Assim, entendemos que o estudo epistemológico é necessário para compreender as mudanças na abordagem do ensino da geometria, como a transição da geometria euclidiana para a geometria não euclidiana, bem como as limitações da abordagem euclidiana.

Tratamos, neste artigo, apenas da primeira dimensão, sem a pretensão de construir um Modelo Epistemológico de Referência, mas apontar, por um breve estudo epistemológico, a razão de ser das geometrias não euclidianas, bem como as limitações da geometria euclidiana que, em geral, é o foco no ensino de geometria na Educação Básica.

Na seção 3, no estudo da dimensão epistemológica, abordamos a gênese e as razões para o surgimento de diferentes geometrias na Antiguidade, principalmente da geometria esférica, quando houve a necessidade de buscar meios de navegação marítima e a curiosidade em

ISSN 2764-3158

calcular fenômenos em astronomia.

3 O surgimento das geometrias e Os Elementos

Quando se discute geometria, surge inevitavelmente a pergunta: qual geometria descreve melhor a natureza? No contexto da geometria do universo, é possível que estejamos, em vez disso, desvendando apenas a concepção do que pensamos ser a verdade, ou seja, uma construção da mente humana que não necessariamente reflete a realidade.

Na época de Euclides, a geometria era dividida em duas áreas distintas: a geometria esférica, relacionada ao céu, e a geometria do *quintal da casa*. Conforme explicado por Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948), a geometria celeste e a trigonometria surgiram principalmente no campo da astronomia. Observadores antigos perceberam que os astros pareciam se mover em órbitas circulares concêntricas, com centros coincidentes em um ponto celestial fixo. Devido à falta de conhecimento sobre a rotação da Terra, que poderia explicar em parte o movimento aparente das estrelas, do Sol, da Lua e dos planetas, os antigos conceberam a ideia de que esses corpos celestes estavam ligados a uma esfera celeste centralizada na Terra, girando em torno de um eixo que atravessava nosso planeta.

Para Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948), a geometria celeste era essencial para compreender processos astronômicos importantes, principalmente para egípcios e babilônios. Os egípcios utilizavam conceitos geométricos em seus estudos astronômicos para o planejamento e a construção de edifícios e estruturas, visando garantir medidas precisas e alinhamento com constelações e equinócios. Observavam o céu noturno para desenvolver calendários lunares e solares, além de prever eventos astronômicos, como eclipses. Eram especialistas na medição de terras e estabelecimento de limites de propriedade por princípios geométricos, para medir áreas de campos agrícolas ao longo das cheias do Rio Nilo e planejar monumentos, como as pirâmides. Apesar de basearem a maioria de suas medições em geometria plana, a compreensão da Terra como uma esfera desempenhava um papel indireto nessas atividades.

Para os autores, os fenícios eram conhecidos por suas habilidades de navegação, especialmente no Mar Mediterrâneo, quando utilizavam conhecimentos práticos de trigonometria esférica para garantir o sucesso das viagens. Para determinar sua latitude na esfera celeste e sua posição no mar, eles faziam uso do astrolábio, instrumento fundamental que media a altura angular das estrelas acima do horizonte. Já os babilônios, conhecidos por seus estudos em astronomia, observavam o movimento dos corpos celestes por meio da geometria do céu, buscando compreender a posição e o deslocamento de planetas, estrelas e constelações na esfera celeste. Até esse ponto, podemos dizer que as razões de ser da geometria do céu são a necessidade da esfera celeste para prática de navegação marítima e para cálculos astronômicos que mobilizam, diretamente, as concepções de figuras esféricas e de trigonometria em sua forma rudimentar.

Para resolver situações que envolvem a medição da altura de astros, é necessário utilizar conceitos fundamentais de trigonometria. Além disso, pode ser preciso aplicar conhecimentos de geodésicas, que indicam que o caminho mais curto entre dois pontos em uma esfera é um arco de um círculo máximo que os conecta. Quando esses pontos não são antipodais, ou seja, não estão em extremidades opostas de um diâmetro da esfera, há apenas um caminho de comprimento mínimo entre eles. Por outro lado, se forem antipodais, existem infinitos círculos máximos que os conectam.

Assim, é possível resumir que a necessidade de medir a altura de um astro acima do horizonte, a distância entre dois astros ou comparar suas trajetórias aparentes leva ao

ISSN 2764-3158

desenvolvimento de tarefas de medição e comparação que exigem representações e cálculos. Essas necessidades conduzem ao desenvolvimento de ferramentas de navegação, além de elementos de geometria esférica e trigonometria, tanto para representações cartográficas quanto para calibração de instrumentos astronômicos, como os astrolábios fenícios, e técnicas para resolver as tarefas apresentadas.

Diferentes tipos de tarefas que envolvem astronomia e navegação foram identificados, para os quais os antigos desenvolveram técnicas de solução baseadas em conhecimentos específicos dessas áreas e em uma trigonometria rudimentar. Embora os cálculos fossem aceitáveis em muitos casos, a razão de ser desses conhecimentos e técnicas era a necessidade de resolver problemas práticos relacionados à astronomia e à navegação. Naquela época, faltava uma teoria que sistematizasse a geometria esférica, o que impediu a plena compreensão e o aproveitamento dos conhecimentos e técnicas desenvolvidos pelos antigos.

Já a geometria do *quintal de casa*, aquela que, segundo a lenda, Arquimedes usava para realizar seus cálculos quando foi assassinado por um soldado romano, era utilizada para resolver problemas cotidianos desde a Antiguidade. Para Carrera (2009, p. 71), essa geometria é a "de um pátio fechado por paredes no qual apenas se pode desenhar o que a areia que cobre o solo permitir." Essa afirmação nos conduz a imaginar que se tratava de geometria plana, mas sua razão de ser eram problemas do cotidiano, como medição de terras para cálculo de impostos para os egípcios.

Embora todas as civilizações que temos conhecimento, de uma forma ou de outra, tenham desenvolvido conhecimentos geométricos, foi Euclides, no século III a.C., que ficou conhecido como o pai da geometria com a publicação de *Os Elementos*, uma obra que sistematizou a geometria desenvolvida até então. Podemos entender essa obra, segundo a TAD, como o *logos* que veio para explicar racionalmente a *práxis* desenvolvida para a resolução de diferentes tipos de tarefa.

A obra *Os Elementos* (ΣΤΟΙΧΕΙΑ), que consiste em 13 livros, contribuiu científica e culturalmente para a humanidade por mais de 22 séculos, tornando-se o mais antigo trabalho científico ainda em uso. O que tornou esse livro tão famoso é a sua sequência simples e lógica de teoremas e problemas, que influenciou o pensamento científico. Grande parte da geometria encontrada atualmente nos livros de Matemática foi retirada basicamente dos seis primeiros livros dessa obra.

O livro I de *Os Elementos* inicia com a apresentação dos conceitos primitivos de *ponto*, *linha*, *plano*, *ângulo*, *círculo* e assim por diante. Por exemplo, ponto é um lugar único no espaço, que não tem partes nem grandeza; linha é um comprimento sem largura; as extremidades de uma linha são pontos; uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos dela mesma; uma superfície é o que tem comprimento e largura; as extremidades de uma superfície são linhas; uma superfície plana é aquela que se mantém uniforme com suas linhas retas; um ângulo em um plano é a inclinação mútua de duas linhas que se cruzam e não se encontram na mesma reta; um círculo é uma figura plana bordada por uma única linha (chamada periferia), de modo que todas as linhas retas desenhadas a partir de um ponto localizado dentro da própria figura até aquela linha (a periferia do círculo) são iguais. Esse ponto é chamado de centro do círculo; o diâmetro de um círculo é qualquer linha reta que passa pelo centro e é delimitada de cada lado pela periferia do círculo; dividindo o círculo em dois semicírculos (Bicudo, 2009).

Notamos que essas não são definições estritas, mas sim explicações de elementos geométricos, com a intenção de criar uma representação intuitiva para cada um deles na consciência humana. Euclides organizou *Os Elementos* a partir de axiomas e postulados, sendo estes últimos de teor explicitamente geométricos. Nas várias edições *Os Elementos*, o número de postulados e axiomas não é o mesmo, mas é comumente aceito que a geometria baseada em Euclides tem nove axiomas e cinco postulados. De acordo com Bicudo (2009, p. 98), os postulados, na forma em que Euclides os apresentou, são:

> I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Por sua natureza, os postulados são reivindicações estritamente geométricas e expressos em forma de exigências ou suposições que enfatizam seu caráter construtivo, principalmente os três primeiros, que serviram como base para a teoria das estruturas geométricas durante séculos. Os dois últimos postulados, no entanto, não podem ser considerados de caráter construtivo. Na geometria moderna, o quarto postulado é uma afirmação a ser comprovada. Já o quinto postulado apresenta complexidade, sendo equivalente ao axioma das paralelas, estabelecido no século XVIII pelo matemático escocês John Playfair. Ele afirma que, por um ponto exterior a uma reta, passa apenas uma outra reta paralela. Isso despertou a atenção de outros matemáticos e os forçou a tentar derivá-lo de outros axiomas da geometria. Esse enunciado nos permite ver que o quinto postulado necessita de duas assunções distintas: por um lado, que exista uma reta paralela a uma reta dada a partir de um ponto exterior a ela e, por outro, que essa reta é única. Tal discussão terá um papel fundamental na evolução subsequente da geometria.

De acordo com Carrera (2009), é curioso que Euclides, no prefácio do postulado V, tenha imposto que "em certas condições" duas retas se intersectam – existe um ponto que pertence simultaneamente a ambas – ao se referir ao caso das circunferências e ao postulado I, que trata da menor distância entre dois pontos na superfície de uma esfera. No entanto, ao "[...] abordar o caso das circunferências, considerou-o tão evidente e irrefutável que nem sequer o impôs" (Carrera, 2009, p. 68).

Destarte, Bicudo (2009, p. 62) refuta que, na edição da *Euclidis Opera Omnia*, publicada por Heinrich Menge no século XIX, no volume VIII, encontra-se a obra *Os Phenomena* (Aparências do Céu), com 18 proposições feitas por Euclides acerca de geometria esférica. Basicamente, a obra *Os Phenomena* trata de astronomia, e suas proposições são apresentadas em forma de demonstrações geométricas estabelecidas por observação de *fenômenos celestes*: *círculo que limita*, *horizonte* e a expressão *círculo meridiano*, que aparece pela primeira vez. Segundo Bicudo (2009), Euclides tomou como referência a obra *Sobre esferas em movimento*, do matemático contemporâneo Autolycos de Pitane, além de *Os Phenomena*. Essas proposições foram publicadas por completo, algumas citadas ao longo de *Os Elementos*, por exemplo, a proposição I do livro V de Euclides, a proposição II no quarto e sexto e a proposição X no segundo.

Ademais, Bicudo (2009, p. 62) afirma que, em *Os Elementos*, Euclides aproveita outro trabalho de geometria esférica, *Sphaerica*, de autoria desconhecida, para declarar que "[...] se sobre uma esfera dois círculos se bissectem, são ambos grandes círculos, e, na demonstração se supõe frequentemente que o leitor conhecia outros teoremas do tipo."

Entretanto, é notável que as representações apresentadas por Euclides sejam planas e a esfera não seja efetivamente representada. Além disso, ele optou por adotar, como geometria *verdadeira*, uma forma de geometria ideal, caracterizada por construções que adquiriam validade exclusivamente como representações puras, que transcendem a experiência empírica. A única justificativa plausível para tal escolha reside, possivelmente, na presença de uma inclinação platônica inerente à concepção de geometria ideal, que se revela desvinculada de qualquer outra realidade além daquela imanente à própria noção fundamental de geometria. Proposições específicas da geometria esférica são utilizadas por Euclides apenas quando ele trata de astronomia.

Os gregos antigos, particularmente na era helenística, desenvolveram um interesse crescente pela astronomia e pela esfera celeste. Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948) destacam que a geometria esférica, como uma disciplina matemática mais formal e abstrata, foi desenvolvida posteriormente por matemáticos gregos e romanos, como Menelau de Alexandria e Cláudio Ptolomeu.

Menelau de Alexandria, que viveu por volta do século I a.C., escreveu uma obra chamada *Sphaerica* (também conhecida como *Sobre as Seções da Esfera*), na qual desenvolveu uma teoria sistemática para a geometria esférica. Por isso, frequentemente ele é creditado como o pioneiro da geometria esférica.

De acordo com Hermiz (2015), sabemos que Menelau escreveu dois tratados, intitulados *Elementos de Geometria* e *Sobre o Triângulo* e, pelo menos, parte de um catálogo de estrelas. Nessas obras, explorou propriedades de seções cônicas (círculos máximos) em uma esfera e estabeleceu princípios fundamentais para a resolução de problemas em geometria esférica. Para além disso, tentou provar diretamente quase todas as proposições que apresentou. Seus escritos influenciaram matemáticos posteriores, incluindo Cláudio Ptolomeu.

Para Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948), Cláudio Ptolomeu, um matemático e astrônomo greco-egípcio que viveu no século II d.C., é amplamente conhecido pelo seu trabalho em astronomia e em geografia, que se tornaram fundamentais para o desenvolvimento da astronomia, da cartografia e da navegação. Sua obra *Almagesto* incluía uma seção dedicada à geometria esférica, na qual Ptolomeu desenvolveu métodos para descrever o movimento dos planetas e das estrelas em uma esfera celeste imaginária, utilizando coordenadas esféricas.

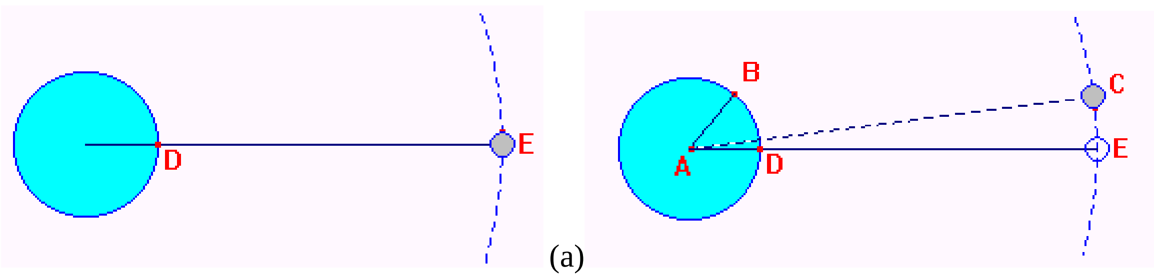
A geometria esférica, desenvolvida por Menelau e aprimorada por Ptolomeu, permitiu a descrição precisa das posições de corpos celestes na esfera celeste e a determinação das coordenadas, como ascensão reta e declinação. Essas coordenadas eram cruciais para a criação de mapas celestes e para as navegações marítimas, que usavam estrelas como pontos de referência.

Observa-se que o desenvolvimento da geometria esférica foi impulsionado pela aplicação de técnicas derivadas da prática de navegação e de cálculos astronômicos na esfera celeste. No entanto, havia uma lacuna na existência de uma teoria sistematizada que pudesse fundamentar os conhecimentos práticos da trigonometria esférica. Essa carência persistiu até que Menelau de Alexandria empreendeu a sistematização do estudo de objetos geométricos na superfície de uma esfera e, consequentemente, da trigonometria esférica. Embora o contexto astronômico tenha servido como pano de fundo para suas demonstrações, é importante notar que ele as apresentou como estritamente geométricas. Contudo, em alguns casos, tais demonstrações parecem ter aplicabilidade limitada ou interesse restrito fora de seus domínios de aplicação astronômica.

De acordo com Hermiz (2015), nesse ponto, devemos ser muito claros sobre o tipo de "trigonometria" que existia na matemática grega antiga. As "funções" trigonométricas, tal como as concebemos atualmente, não existiam embora, já na época do Hiparco, havia tabelas de aproximações para comprimentos de cordas correspondentes a determinados comprimentos de arco e a problemas astronômicos. Para eles, dado um círculo celeste de raio 1, um arco da circunferência de comprimento θ, ou seja, uma corda, $Crd(\theta)$ seria o comprimento do segmento de reta entre os pontos extremos desse arco, que pode ser considerada como uma função trigonométrica primitiva. Quando a circunferência dada tem raio R, um arco de comprimento θ subtende um ângulo de medida $\frac{\theta}{R}$ que, quando R = 1 podemos ver que: $sen\theta = \frac{1}{2}Crd(2\theta)$. Segundo Hermiz (2015), a forma mais antiga da função seno foi inventada por matemáticos indianos para substituir a função de corda e, assim, eliminar os passos desnecessários de duplicar arcos e reduzir pela metade suas cordas que, frequentemente, apareciam nas utilizações gregas da função corda.

Para ilustrar podemos considerar como um tipo de Tarefa: calcular a distância da Terra a planetas do sistema solar. Uma tarefa desse tipo seria calcular a distância da Terra à Lua, para a qual Ptolomeu desenvolveu uma técnica que, de acordo com Bongiovanni (2005, p.2), consiste em "imaginar um observador na posição D da superfície da Terra que observa a Lua na posição E (Figura 2a). Após um tempo t, o observador estará na posição B e a Lua na posição C (Figura 2 (b))."

Figura 2: Representação da Terra e da Lua para cálculo da distância entre elas

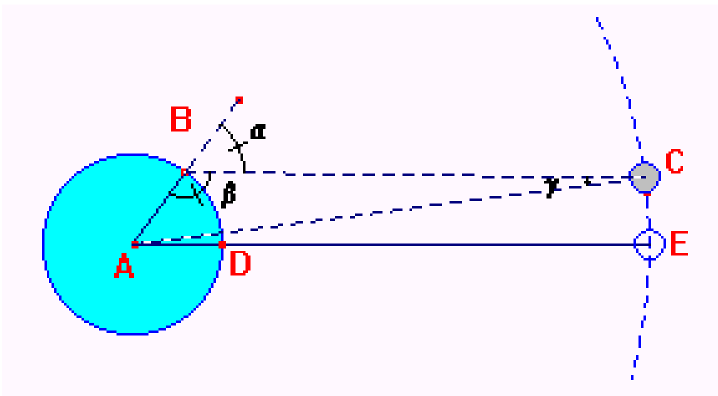


(a) (b)

Fonte: Bongiovanni (2005, p. 2)

Supondo um tempo de 4 horas, temos que o ângulo BAD mede 60º. Sabendo que a Lua dá um giro de 360º ao redor da terra em 27,3 dias, após 4 horas o ângulo CAE será de 2º (Figura 3) e, portanto, o ângulo CAB mede 58º.

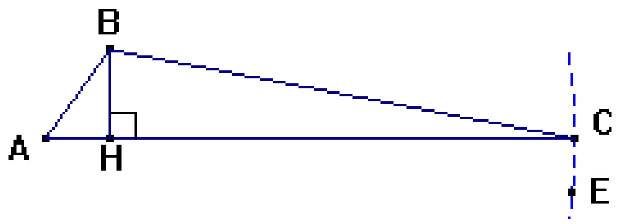
Figura 3: Representação dos ângulos para cálculo da distância da Terra à Lua



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 2)

Observando a Figura 3 podemos determinar que o ângulo α mede 58,8º, para t = 4 e, como consequência, o ângulo β mede 121,2º e o ângulo BCA mede 0,8º. Para o cálculo considera-se o triângulo BAC (Figura 4) em que BC representa a distância de um observador na Terra à Lua, temos que $m(BAC) = 60° - 2° = 58°$. Para obter a medida de BH calcula-se o seno de 58°, ou seja, $sen58° = \frac{BH}{6300}$ em que 6300 representa o raio da Terra na época (AB) e o seno de 58° é obtido de uma tabela trigonométrica desenvolvida pelo próprio Ptolomeu.

Figura 4: Triângulo ABC: o centro e um ponto da superfície da Terra e a Lua



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 2)

Considerando o triângulo retângulo AHB o $sen0{,}8° = \frac{BH}{BC}$ do qual se obtém a medida BC procurada. Basicamente, o discurso tecnológico-teórico toma por base os nos conhecimentos de triângulo e de trigonometria da época. As tarefas desse tipo são resolvidas por essa técnica até hoje, com a diferença de que temos mais precisão nos cálculos, pois podemos utilizar mais casas decimais do que as quatro que Ptolomeu usava. Essa técnica pode ser usada também para o tipo de tarefa: calcular a distância de um observador na Terra até estrelas mais próximas.

Diante exposto, evidenciamos que, por um lado, podemos identificar inúmeras praxeologias matemáticas, determinadas por necessidades práticas, que têm suas técnicas desenvolvidas e justificadas por uma geometria e uma trigonometria rudimentar. Por outro lado, a geometria esférica da época também era uma ferramenta essencial para a astronomia e para a navegação que permitiu aos astrônomos estudarem os movimentos dos astros e aos navegadores navegarem longas distâncias com precisão. Desta maneira, a razão de ser da geometria esférica, está na Astronomia – para calcular a posição dos planetas e das estrelas, determinar as dimensões e a forma da Terra e estudar os movimentos dos astros, bem como na navegação, para calcular a posição de um navio no oceano, determinar a direção a ser seguida e evitar obstáculos.

Por outro lado, a discussão da possibilidade de demonstração do quinto postulado, ocorrida entre alguns matemáticos durante séculos, provocou o surgimento de outras geometrias e a sistematização da geometria esférica sob o ponto de vista da existência de paralelas.

4 As geometrias não euclidianas

De acordo com Carrera (2009), os especialistas da obra euclidiana concordam que a estrutura de *Os Elementos* é de autoria do próprio Euclides e, em particular, o V postulado, conhecido como *axioma das paralelas*, assegura que, "sob certas condições, duas retas intersectam-se necessariamente". Segundo Bicudo (2009, p. 120), Euclides só utiliza esse postulado a partir da proposição 29 do livro I. Para Carrera (2009), a geometria que não depende do quinto postulado é chamada de *geometria neutra* e, consequentemente, se baseia em pouco menos de 30 proposições presentes na obra *Os Elementos*.

A proposição 31 do livro I afirma que: "pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada" (Bicudo, 2009, p. 121). Na demonstração, Euclides se apoia na proposição 17 do livro I: "os dois ângulos de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos" (Bicudo, 2009, p. 111), a qual garante a existência de uma paralela, mas não a sua unicidade, já que esta não pode ser deduzida de nenhum dos outros postulados. Essa observação introduz uma verdadeira transformação, conforme será elucidada posteriormente, em grande parte, atribuída ao questionamento da autoridade inquestionável de Euclides.

Convencido da impossibilidade de estabelecer o quinto postulado de Euclides a partir dos outros quatro, o matemático russo Nikolai Lobachevsky formulou uma nova geometria que desafiava os princípios estabelecidos por Euclides. Nessa nova abordagem, o quinto postulado foi substituído por uma hipótese alternativa. Segundo Carrera (2009, p. 73), Lobachevsky publicou, em um artigo de 1829, intitulado *Os princípios da geometria*, a primeira geometria construída a partir de uma hipótese que contradizia o postulado euclidiano das paralelas: por um ponto exterior C a uma reta AB pode passar mais do que uma reta paralela dentro do plano ABC e que não intersecta a reta AB. Considerando esse postulado, ele deduziu uma geometria harmônica e consistente que marcou, na história da Matemática, a primeira vez em que foi empregada a expressão *geometria não euclidiana*.

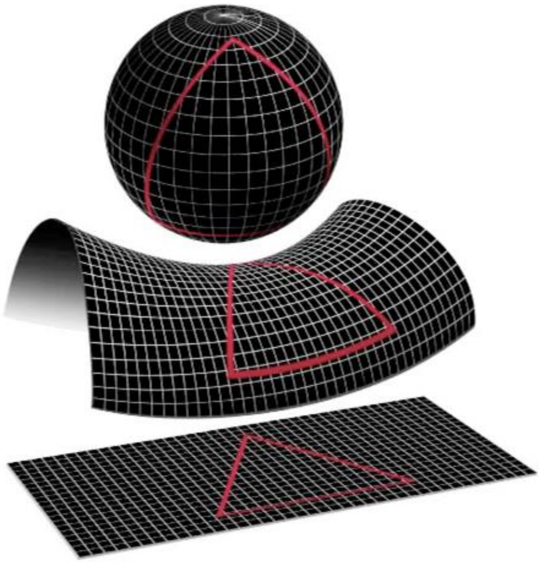
Em paralelo a Lobachevsky, o matemático húngaro Janos Bolyai chegou às mesmas conclusões, mas suas descobertas só foram publicadas em 1832, após uma correspondência com Carl Friedrich Gauss. Em uma das cartas em que discutiam seus trabalhos a respeito da nova geometria, Gauss respondeu que não poderia elogiar o trabalho de Bolyai porque "implicaria em elogiar a si mesmo", dada a concordância de pontos de vista entre eles (Carrera, 2009, p. 74). Essa carta sugere que Gauss também chegou à conclusão de que o postulado das paralelas, na geometria euclidiana não se seguia, necessariamente, dos quatro postulados anteriores e que ele próprio havia desenvolvido outras geometrias consistentes. Atualmente a geometria desenvolvida por Lobachvesky e Bolyai é conhecida como *geometria hiperbólica* e sua característica principal é que, dada uma reta e um ponto não pertence a ela, podem passar mais que uma reta paralela à reta dada, conhecido como postulado de Lobachevsky.

Diante do exposto, pode-se considerar que a razão de ser da geometria hiperbólica reside em fornecer um exemplo de uma estrutura geométrica consistente que não depende do quinto postulado de Euclides, o que mostrou que esse postulado não é intrinsecamente necessário para se construir uma geometria válida, o que foi um marco na história da matemática. A geometria hiperbólica ajudou a desafiar a ideia de que a geometria euclidiana era a única forma de geometria possível e expandiu nosso entendimento das possibilidades geométricas.

Quanto à geometria esférica, outra importante geometria não euclidiana, foi necessário aguardar pelo trabalho de outro conhecido de Gauss, o matemático alemão Bernhard Riemann que, em sua tese intitulada *Sobre os Fundamentos da Geometria*, de 1854, generalizou a geometria esférica e outros casos, em uma abordagem que considerava apenas a curvatura métrica dos diferentes espaços e as propriedades que dela decorrem. Para Riemann, como mostra a Figura 5, no espaço euclidiano, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°; no espaço esférico essa soma é superior a 180° e esse espaço possui uma curvatura positiva; enquanto no hiperbólico, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180° e possui uma curvatura negativa.

Riemann demonstrou que o espaço euclidiano, juntamente à geometria euclidiana que o caracteriza, era apenas um caso específico de um espaço com curvatura constante e valor zero. A geometria de Riemann ou Riemanniana é também conhecida como *geometria elíptica* e sua característica é dada por uma reta e um ponto não pertencente a ela, por esse ponto não passa qualquer paralela à reta dada.

Figura 5: Representação de um triângulo nas geometrias esférica, hiperbólica e euclidiana.



Fonte: https://wmap.gsfc.nasa.gov/universe/uni_shape.html (domínio público)

A geometria esférica, que pode ser comparada à representação da superfície esférica de um globo terrestre, tem seus pontos seguindo a definição euclidiana, mas as retas não, pois nessa geometria, elas se caracterizam por círculos máximos. Se definirmos uma reta, no sentido do primeiro postulado de Euclides, como a menor linha que liga dois pontos as retas se cruzam necessariamente. Portanto, em geometria esférica, dada uma reta, não é possível traçar qualquer paralela a ela por um ponto dado.

Podemos então dizer que essas geometrias se desenvolveram no contexto da Matemática e sua razão de ser está no questionamento do quinto postulado de Euclides, ou seja, temos um saber, *logos*, que não se constituiu para resolver qualquer tarefa prática. Temos *logos*, que até aquele momento, não estava relacionado a qualquer *práxis*.

Concluído que o postulado das paralelas não podia ser deduzido dos quatro anteriores, em 1899, David Hilbert escreveu *Fundamentos de la Geometria* em que retomou *Os Elementos* de Euclides para melhor fundamentá-lo sem recorrer à intuição nem a desenhos (Hilbert, 1953). Os objetos básicos, pontos, retas e superfícies, ou mesmo cadeiras, mesas e canecas de cerveja, nas palavras de Hilbert, eram definidos pelos axiomas e por relações entre eles. Mas qual o alcance dessa geometria?

5 As Limitações da geometria euclidiana

Na fundamentação da Teoria Antropológica do Didático, Chevallard sugere que o saber matemático é construído social e culturalmente e influenciado por fatores contextuais, como a linguagem, as instituições educacionais, as práticas de ensino e as formas de comunicação matemática. A Teoria Antropológica do Didático oferece um arcabouço analítico que lança luz sobre as limitações inerentes à geometria euclidiana, por meio de uma abordagem que enfatiza a análise das práticas matemáticas. O ambiente educacional, em geral, traz consigo concepções moldadas pela geometria euclidiana tradicional que entram em conflito com conceitos que não se alinham harmoniosamente com essa estrutura, como é o caso dos relacionados à geometria não euclidiana que provocam obstáculos conceituais específicos.

No caso da geometria euclidiana, ela vem para proporcionar um discurso tecnológico teórico, para resoluções, principalmente de tarefas cotidianas que surgiram desde a Antiguidade, ou seja, ela se torna o *logos* que justifica diferentes *práxis*. No entanto, sua

ISSN 2764-3158

limitação em contextos não euclidianos é atribuída ao fato de que ela foi desenvolvida em um contexto histórico e cultural específico, em que a geometria era vista como uma disciplina independente da física. Seus axiomas e postulados foram formulados em um ambiente em que a geometria era entendida como uma ciência dedutiva e rigorosa, baseada em um conjunto de verdades absolutas e universais. Porém, com o desenvolvimento da física, a geometria euclidiana mostrou-se inadequada para descrever fenômenos físicos complexos, como a curvatura do espaço-tempo em relatividade e a dualidade onda-partícula em mecânica quântica, que implica em uma geometria do Universo.

A maneira como as geometrias não euclidianas respondem à necessidade de descrever com precisão o espaço curvo do universo implica em uma análise histórica do desenvolvimento da geometria esférica em relação à cosmologia e à física moderna, além de envolver a compreensão de aplicações da geometria esférica na modelagem espacial e sua influência nas práticas matemáticas. Nesse sentido, a geometria no universo está vinculada aos objetos geométricos compreendidos em uma superfície esférica.

No entanto, de acordo com Luminet, Starkman e Weeks (2016), na teoria da relatividade geral, Einstein estabeleceu que, quando há concentração de grandes massas ou energias, o espaço e, por consequência, as retas são deformadas. Tal afirmação nos conduz à pergunta: qual a geometria do Universo? Se as grandes massas ou energias alteram localmente sua geometria, o universo globalmente é euclidiano, hiperbólico ou elíptico? De acordo com o autor, a resposta dessa questão deve ser procurada fora da Matemática, porque as três geometrias são válidas; as três estão estabelecidas formalmente e se uma for consistente as outras também são. Há mais de um século Carl Friedrich Gauss apresentou a mesma pergunta que fizemos aqui: como é o Universo? Que geometria tem? E concluiu que “se pudesse medir os 3 ângulos internos de um triângulo formado por 3 estrelas longínquas, obteria a geometria do universo” (Green, 2005, p. 84). Sabemos que se a soma dos 3 ângulos for maior que 180°, igual a 180° ou menor que 180° a geometria do universo será, respectivamente, elíptica (esférica), euclidiana ou hiperbólica.

De acordo com Luminet, Starkman e Weeks (2016), em 1981, o físico norte-americano Alan Guth introduziu o conceito de Densidade do Universo: a massa total da matéria por unidade de volume, em que mostra que existe um valor crítico ρ_0 que determina a natureza geométrica do Universo e que implica em sua evolução futura. Se a densidade fosse maior que ρ_0 a geometria seria esférica e o futuro do universo seria um colapso; se fosse igual a ρ_0 a geometria seria euclidiana e a expansão suave; e se fosse menor que ρ_0 a geometria do universo seria a hiperbólica e a expansão forte. A massa calculada até hoje é menor que 10% de ρ_0 e, portanto, o universo parece hiperbólico e expande-se fortemente. Tais questões conduzem a discussões a respeito da finitude ou não do universo que não discutiremos neste artigo.

Se o Universo tivesse uma face externa visível, a cosmologia seria uma tarefa mais simples. Contudo, dada a ausência dessa perspectiva, os astrônomos enfrentam o desafio de inferir a forma global do universo com base em suas características geométricas. No nosso cotidiano, percebemos o espaço como sendo euclidiano, ou seja, "plano" em escalas pequenas. Nesse contexto, as linhas paralelas nunca se encontram, os ângulos internos de um triângulo somam 180º, o comprimento da circunferência é igual a 2π e assim por diante. No entanto, seria um equívoco concluir que o Universo é euclidiano em escalas maiores, da mesma forma que seria errado afirmar que a Terra é plana apenas porque parte dela parece plana. A observação do universo revelou que a geometria euclidiana não é a única possível.

A razão de ser da geometria hiperbólica reside na necessidade premente de descrever e modelar espaços curvos com uma constante de curvatura negativa. Segundo a teoria da relatividade geral, a geometria do espaço-tempo é intrinsecamente curva, e essa curvatura é

ISSN 2764-3158

uma consequência direta da presença de massa e energia. Portanto, a geometria hiperbólica desempenha um papel crucial ao proporcionar uma estrutura matemática que permite a representação de espaços curvos e desafiar a suposição de que a geometria euclidiana seja a única forma de geometria válida e expandir nossa compreensão das geometrias possíveis no universo.

6 Considerações finais

Sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, as geometrias não euclidianas poderiam desempenhar um papel fundamental no ensino de matemática ao considerar as limitações da geometria euclidiana e sua relevância histórica e cultural. Essa contextualização histórica seria essencial para situar as geometrias não euclidianas no contexto da evolução do pensamento humano ao longo das épocas, como foi o caso da discussão do quinto postulado de Euclides, além das questões práticas do dia a dia das pessoas comuns e de estudo do Universo que vem desde a Antiguidade. Vimos que a geometria euclidiana vem para proporcionar um discurso tecnológico-teórico para práticas geométricas que resolviam problemas corriqueiros, como de medições de terras, de armazenamento etc., ou seja apresenta o *logos* que justifica a *práxis*, ou seja a geometria euclidiana possui diferentes razões de ser.

Por outro lado, a evolução do conhecimento matemático proporcionado pela discussão da validade do quinto postulado, em um contexto puramente matemático, se caracteriza como a razão de ser das geometrias não euclidianas, principalmente, a hiperbólica, pois a elíptica contém a geometria esférica que tem sua razão de ser na astronomia e na navegação. No caso da geometria hiperbólica, temos a construção de um *logos*, um saber matemático, que independe de qualquer práxis, isto é, na época de seu desenvolvimento não era visto qualquer utilidade, pois não passou da discussão da validade do quinto postulado de Euclides. Foi somente no século XX que a geometria hiperbólica foi utilizada para justificar a expansão do universo na teoria da relatividade de Einstein.

Buscamos mostrar no texto uma conexão essencial entre as três geometrias em discussões no contexto do mundo real, para sua compreensão, tanto em questões triviais do dia a dia, quanto na compreensão do planeta Terra e do Universo. Conhecer a razão de ser de saberes matemáticos auxilia na busca de contextos adequados para que os estudantes possam dar sentido a esses estudos e perceberem como conceitos matemáticos podem ser traduzidos em aplicações do mundo real. Essa abordagem fomenta o desenvolvimento do pensamento crítico, um aspecto fundamental da "razão de ser" de Chevallard, que valoriza o ensino de matemática como uma disciplina que promove a capacidade de questionar e explorar conceitos em profundidade. Kovacevic (2020, p. 80) mostra que a Astronomia Posicional, como uma aplicação da Geometria esférica, poderia ser tratada no Ensino Médio com estudos do “movimento aparente dos astros, movimento de satélites naturais e artificiais, sistemas de coordenadas relativas ao centro de galáxias, centro do sistema solar, tempo e sistemas do tempo”, pois a gênese das duas disciplinas mostra que uma é a ferramenta da outra.

Tomando como referências a Teoria Antropológica do Didático para evidenciar a razão de ser de geometrias não euclidianas pode levar o professor a construir um novo saber-fazer a partir da mobilização das Organizações Matemáticas resultantes do estudo das três dimensões do problema didático do referido objeto matemático. O estudo da dimensão epistemológica permite construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER) composto por três modelos secundários: M1 – associado à geometria euclidiana; M2 – associado à geometria esférica; e M3 – associado à geometria hiperbólica. Esses modelos serviriam como a orientação para o desenvolvimento de conhecimentos a respeito de forma, de representação e de comparação de mesmas figuras geométricas em diferentes geometrias, que são oriundos de situações que mobilizam, prioritariamente, essas concepções e que, para serem resolvidas implicam diretamente na mobilização da concepção de geometria unificada e, talvez, da concepção de Universo não euclidiano.

Por fim, a importância da compreensão de conceitos matemáticos, indo além da mera aplicação de fórmulas e técnicas, em consonância com a perspectiva de Chevallard, e por qual razal não se lembrar de Felix Kleine que advoga(m) por uma educação matemática que promova a verdadeira compreensão da disciplina e seu significado dentro do contexto mais amplo da cultura e da ciência.

Referências

AG Almouloud, S., & da Silva, M. J. (2021). Estudo das três dimensões do problema didático de números racionais na forma fracionária. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática*, *3*(2), 114-151.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la Ixième École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 101-139). Caen: ARDM & IUFM.

Bicudo, I. (2009). *Euclides: Os elementos*. São Paulo, SP: Editora UNESP.

Bongiovanni, V. (2005). *Notas de aula*. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Carrera, J. P. (2009). *Euclides – A geometria*. Lisboa: Editora RBA.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (2002a). *Organiser l'étude: Écologie et régulation*. In *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble.

Chevallard, Y. (2018). A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In S. A. Almouloud, L. M. S. Farias, & A. Henriques (Org.), *A teoria antropológica do didático: Princípios e fundamentos* (pp. 31-50). Curitiba, PR: CRV.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *14*(2), 203-231.

Green, R. M. (2005). *Spherical astronomy*. Glasgow: University of Glasgow Publications.

Hermiz, R. (2015). *English translation of the Sphaerica of Menelaus* (Thesis). San Marcos: California State University.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la geometría*. Madrid: Publicaciones del Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas.

Kovacevic, M. S. B. (2020). *Geometria esférica – O elo entre matemática e astronomia* 98f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Luminet, J. P., Starkman, G. D., & Weeks, J. R. (2016). *De l'infini: Horizons cosmiques, multivers et vide quantique*. Paris: Editora Dunod.

Rudaux, L., Vaucouleurs, G. de, & Tardi, P. (1948). *Astronomie: Les astères, l'univers*. Paris: Editora Librarie Larousse.

ISSN 2764-3158