Estudo sobre Possíveis Relações entre *O Método* de Arquimedes e o *Cálculo Infinitesimal* de Leibniz

Study on Possible Relations between Archimedes' "Method" and Leibniz's "Infinitesimal Calculus"

Elisangela Pavanelo[1]
Fredy Enrique González[2]

Resumo: Reporta-se um estudo sobre as possíveis relações entre *O Método* (Arquimedes) e a *Análise Infinitesimal* (Leibniz), as quais serão procuradas examinando alguns dos trabalhos desenvolvidos por eles; no caso de Arquimedes, foram considerados o comprimento do círculo e a área da parábola; em Leibniz, exemplificamos um processo de Cálculo ao se trabalhar com os infinitésimos. Com essa pesquisa, procurou-se compreender como as ideias presentes nos estudos desses dois pensadores se desenvolvem no âmbito da Matemática, mantendo a perspectiva filosófica. A investigação realizada permitiu perceber uma proximidade dos procedimentos usados por Arquimedes aos idealizados por Leibniz no tratamento dado por ele aos conceitos essenciais do Cálculo, mesmo mantendo diferenças em relação às ideias sobre o infinito, assumidas por Arquimedes.

Palavras-chave: Cálculo Infinitesimal. Infinito. Filosofia da Matemática. Educação Matemática.

Abstract: This study reports on the possible relationships between "The Method" (Archimedes) and "Infinitesimal Analysis" (Leibniz), which will be sought by examining some of the works developed by them; in the case of Archimedes, the length of the circle and the area of the parabola were considered; in Leibniz, we exemplify a Calculus process when working with infinitesimals. This research sought to understand how the ideas present in the studies of these two thinkers develop in the field of Mathematics, while maintaining the philosophical perspective. The investigation carried out allowed us to perceive a similarity between the procedures used by Archimedes and those idealized by Leibniz in the treatment given by him to the essential concepts of Calculus, even maintaining differences in relation to the ideas about infinity, assumed by Archimedes.

Keywords: Infinitesimal Calculus. Infinity. Philosophy of Mathematics. Mathematics Education.

1 Introdução

As contribuições de Arquimedes para a compreensão do cálculo infinitesimal constituem um assunto que tem chamado a atenção de estudiosos da cultura matemática encontrada na Grécia antiga. Entre eles, destacam-se os trabalhos de Heat (2009/1897, p. CXLII) que afirma que – nos escritos de Arquimedes – podem ser percebidos traços antecipatórios do Cálculo Integral; a afirmação de Heat é compartilhada por Dijksterhuis (1938, p. 130), um dos mais importantes estudiosos da obra do grande geômetra siracusano; assim também é destacado por Knorr (Dijksterhuis, 1938, p. 419 e ss) e especialmente em Knorr (1982). As afirmações feitas por Heat, Dijksterhuis e Knorr e as de muitos outros que aparecem

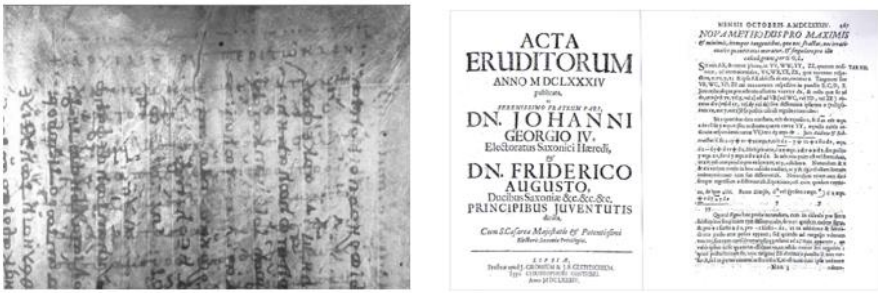
[1] Universidade Estadual Paulista – UNESP • Guaratinguetá, SP — Brasil • ✉ elisangela.pavanelo@unesp.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-2926-5793
[2] Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP • Ouro Preto, MG — Brasil • ✉ fredy.gonzalez@ufop.edu.br • ORCID https://orcid.org/0000-0002-8079-3826

ISSN 2764-3158

nas listas de referências de suas obras, constituem uma hipótese de trabalho que, contemporaneamente, é trazida a discussão por historiadores da Matemática como Eves (1995), Boyer (1974), Magnaghi e Assis (2019), e Brolezzi (1996), reforçando assim a ideia de que Arquimedes pode ser considerado como um dos precursores do Cálculo Integral. Tão reconhecida é a genialidade de Arquimedes que – em 2010 – aconteceu, em Siracusa, uma conferência internacional para destacar sua influência na Matemática, a Ciência e a Tecnologia, a qual permanece ainda transcorridos 23 séculos desde então (Paipetis & Ceccarelli, 2010).

Examinar as possíveis articulações entre os procedimentos arquimedianos de trabalho, expostos em *O Método* (Figura 1 e 2) e o *Cálculo Infinitesimal* de Leibniz oferece a oportunidade para desvelar uma possível conciliação entre as concepções filosóficas predominantes na época de Arquimedes, particularmente aquelas relacionadas com a noção de infinito, e a concepção presente nos trabalhos de Leibniz, um dos fundadores, junto com Newton, do Cálculo.

Figura 1 e 2. Página inicial de *O Método* e a Capa da edição da Acta Eruditorum de 1684



Fontes: Netz & Noel (2007, p. 137) e Leibniz (1684/1986, p. 1).

A comparação dessas duas obras foi viabilizada pelo questionamento a respeito da possível presença – no Cálculo Infinitesimal – desenvolvido por Leibniz, das ideias essenciais da Matemática expostas por Arquimedes no seu *O Método*, levando em conta que Arquimedes não dispunha dos conceitos de função e derivada, nem de limite, mas sim das ideias geométricas importantes que perpassaram o tempo, sendo essas as ideias que serão relacionadas com o Cálculo Infinitesimal.

Dado o olhar filosófico assumido nesta pesquisa, foi importante esclarecer o vínculo entre o fazer (ação) e o saber (a reflexão sobre a ação); para isso, valemo-nos da íntima relação estabelecida por D´Ambrosio (2016) entre Filosofia, Educação e Matemática. Logo após estabelecido esse marco de referência, são examinadas – em detalhe – duas das contribuições, entre muitas outras, mais significativas de Arquimedes: O Comprimento da Circunferência e a Quadratura da Parábola. Já em relação aos trabalhos de Leibniz, trazemos sua obra seminal do Cálculo, publicada em 1684: Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulari pro illis calculi genus (Leibniz, 1684/1986) (Figura 1); nela Leibniz expõe as

> [...] regras de seu Cálculo, assumindo a existência dos infinitésimos, sem oferecer justificativa nenhuma; mas, introduzindo dessa forma o tratamento do contínuo, o que constitui um salto qualitativo importante, dado que implica a consideração de magnitudes que não são discretas: as magnitudes infinitesimais, que constituíram a base do cálculo [...] (González, 2024, p. 3).

A apresentação do *Cálculo Infinitesimal* de Leibniz é seguida pela do método usado por ele para determinar a reta tangente a curvas; em seguida, discutem-se as possíveis articulações dos trabalhos de Arquimedes e Leibniz. O texto é concluído pela proposta de pontos de coerência entre os processos desenvolvidos, por cada um desses pensadores, com a intenção de oferecer subsídios que possibilitem um estudo que mostre que o pensamento matemático é permeado por noções e argumentações de cunho epistemológico e de caráter qualitativo. Por fim, destaca-se a necessidade de dar continuidade à presente investigação

2 Sobre o fazer e o saber

De acordo com D'Ambrosio, existe uma relação de influência mútua entre o fazer e o saber. Segundo o autor,

> [...] é inegável que poucos refletem sobre o que estão fazendo, sobre a razão e a fundamentação de sua ação, sobre seus objetivos e consequências não imediatas. Vejo filosofia como a reflexão ampla sobre ação: a razão de se estar agindo, a fundamentação dessa ação, os objetivos e consequências não imediatas da ação (D'Ambrosio, 2016, p. 22).

É com essa premissa que trazemos nosso estudo: busca fundamentação sobre a ação e o fazer na Matemática. Quando refletimos e questionamos sobre o que estamos fazendo, ou ensinando, buscamos elaborar hipóteses, analisar indícios, semelhanças e diferenças que nos ajudem a discutir sobre um determinado fenômeno. O fenômeno que nos dispomos a estudar para este trabalho são as ideias presentes no *Método* de Arquimedes e no *Cálculo Infinitesimal* de Leibniz.

Assim, D'Ambrosio ainda nos faz atentar que uma Filosofia de Educação Matemática é uma associação entre literacia e materacia. Literacia significando o fazer,

> [...] a repetição de passos automatizados ou mecanizados, utilizando códigos, como os alfabéticos e numerais, e regras como a gramática e as operações, e a manipulação de dados, geralmente codificados, mediante memorização e treinamento ou com auxílio de tecnologia (D'Ambrosio, 2016, p. 33).

Segundo o autor é – sem dúvida – necessário, pois a literacia torna possível a comunicação em uma cultura.

Já a Materacia é o saber,

> [...] analisando e interpretando os dados e os códigos manipulados, reconhecendo neles o significado do fazer. A materacia procura entender e explicar a essência do simbólico, implícito, mas geralmente não explicitado nos símbolos integrados de uma cultura (D'Ambrosio, 2016, p. 33).

D'Ambrosio acredita que a Filosofia da Educação Matemática possibilita eliminar as dicotomias entre o fazer e o saber e entre o emocional e o racional, o que, para ele, é um dos maiores obstáculos à aprendizagem da matemática. Quando nos dispomos a refletir sobre o que, como e por que estamos ensinando, temos argumentos para apresentar aos nossos alunos que a Matemática é uma construção puramente humana.

3 Dois trabalhos de Arquimedes

De acordo com Brolezzi (1996), as contribuições de Arquimedes são significativas, principalmente porque os gregos não admitiam o infinito; sendo assim, não consideravam a soma infinita de parcelas. Sabe-se também que a ideia intuitiva por traz do Método de Exaustão é a de limites. Faremos então uma apresentação de dois trabalhos de Arquimedes importantes para o objetivo do presente estudo: o Comprimento da Circunferência e a Quadratura da Parábola. Em todos os cálculos apresentados nesta seção, serão utilizadas as notações e simbologias atuais, uma vez que – originalmente – esses cálculos foram realizados de forma retórica.

Os referenciais teóricos utilizados para embasar a apresentação dos trabalhos de Arquimedes foram as obras *O Método de Arquimedes: Análise e Tradução Comentada* (2019); *O Método Ilustrado de Arquimedes Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade* (2014), ambos de Magnaghi e Assis. Esses dois livros são traduções diretas de textos de Arquimedes em grego.

3.1 Sobre o Método da Exaustão

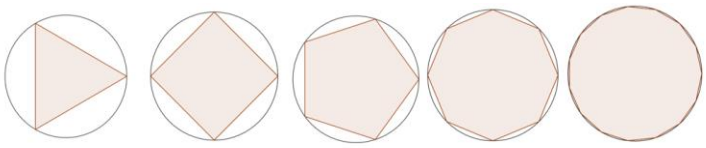
Para discutirmos os trabalhos de Arquimedes sobre O Comprimento da Circunferência e a Quadradura da Parábola, faz-se importante apresentar ideias essenciais sobre o Método da Exaustão, foi criado pelo matemático grego Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), usado e aperfeiçoado por Euclides (c. 300 a.C.) e – principalmente – por Arquimedes. Ele se baseia na seguinte proposição:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, chegar-se-á em alguma etapa desse processo a uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie fixada previamente (Euclides, 2009, p. 354).

O método sinalizado estabelece um modo de encontrar a área de uma figura inscrevendo – dentro dela – uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Se a sequência for construída corretamente, a diferença entre o n-ésimo polígono e a figura que os contém se tornará arbitrariamente pequena à medida que n cresce. Ao tempo em que essa diferença se torna pequena, os valores possíveis para a área da figura são sistematicamente limitados inferiormente pelos polígonos cada vez maiores.

Esse Método pode ser ilustrado como na Figura 3, que mostra a ideia da medida do círculo.

Figura 3: Ilustração do método da exaustão

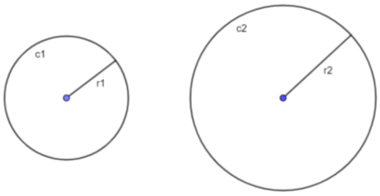


Fonte: Acervo do Autor

3.2 Sobre a Medida da Circunferência

Arquimedes já sabia que o perímetro ou comprimento da circunferência de um círculo é proporcional a seu diâmetro. Na sua época o teorema descrevendo esta proporcionalidade deveria ser expresso da seguinte maneira: "Os comprimentos de duas circunferências estão entre si como seus diâmetros". Isto é, sejam c_1 e c_2 os perímetros ou comprimentos das circunferências de raios r_1e r_2, respectivamente, como na Figura 4:

Figura 4: Ilustração das circunferências c1 e c2



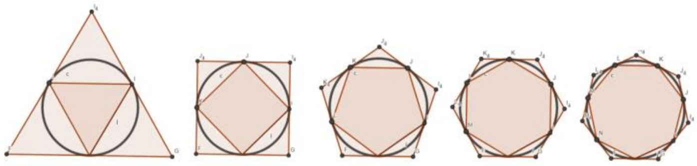
Fonte: Acervo do Autor

Sejam $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$ os diâmetros dessas circunferências. O teorema da proporcionalidade entre os comprimentos e os diâmetros pode ser expresso – matematicamente – da seguinte maneira:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Arquimedes, apesar de não fazer nenhuma referência sobre a irracionalidade da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, obtém uma aproximação muito boa para esta razão, apresentada em seu trabalho Medida do Círculo, ao encontrar limites superiores e inferiores para esta razão circunscrevendo e inscrevendo um círculo em dois polígonos regulares de n lados. A Figura 5 ilustra a ideia sobre as circunferências de mesma medida com polígonos inscritos e circunscritos.

Figura 5: Ilustração dos polígonos inscritos e circunscritos



Fonte: Acervo do Autor

Podemos compreender, de modo intuitivo, que se aumentarmos o número n de lados dos polígonos, os seus perímetros se aproximam do valor do comprimento da circunferência que está entre eles. Ao inscrever e circunscrever uma circunferência com polígonos regulares de 96 lados, Arquimedes encontrou o seguinte resultado: a razão da circunferência de qualquer círculo para seu diâmetro é menor do que $3 + \frac{1}{7}$ mas maior do que $3 + \frac{10}{71}$. Utilizando uma notação atual da matemática, podemos representar esta ideia da seguinte forma:

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{c}{d} < 3 + \frac{1}{7}$$

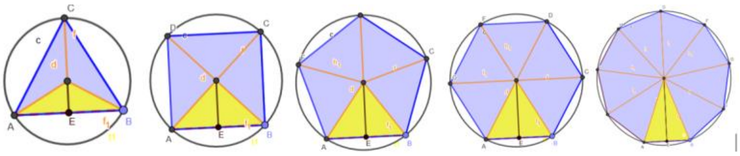
O que nos fornece:

$$3{,}1408 < \frac{c}{d} < 3{,}1429$$

Os resultados obtidos por Arquimedes para os limites que representam a razão do comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, com números tão simples, ganharam destaque na antiguidade grega (Magnaghi & Assis, 2019).

Arquimedes foi além, pois do mesmo modo que a circunferência pode ser aproximada pelo perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos, a área de um círculo também pode ser aproximada pela área dos polígonos inscritos e circunscritos. Quanto maior for o número de lados desses polígonos, melhor será a aproximação da área do círculo (Magnaghi & Assis, 2019). Na Figura 6 ilustramos essa ideia.

Figura 6: Ilustração aproximação da área do círculo



Fonte: Acervo do Autor

Em outros trabalhos, Arquimedes se dispões da mesma ideia para encontrar o volume da esfera (Magnaghi & Assis, 2019).

3.3 Sobre a Área de um Segmento Parabólico

Já em relação ao trabalho sobre a área de um segmento parabólico, Arquimedes consegue demonstrar que um segmento parabólico é 4/3 do triângulo de mesma base e vértice (o vértice do segmento é o ponto a partir do qual a perpendicular à base é maior).

De acordo com Roque (2012), Arquimedes, chegou defendeu um método que permitia entender certas realidades matemáticas usando a mecânica, ainda que este método possibilitasse apenas a descoberta de propriedades que deveriam ser, em seguida, demonstradas geometricamente. Adicionalmente,

> que alguns dos resultados demonstrados dessa maneira por Arquimedes eram obtidos de modo puramente mecânico. Haveria, portanto, uma distinção entre métodos de descoberta, que poderiam ser mecânicos, e métodos de demonstração, que deveriam ser puramente geométricos (Roque, 2012, p. 120).

O cálculo da área de um segmento parabólico é um exemplo de descoberta com o trabalho desenvolvido com base em seu novo Método. Esse trabalho aparece no livro de Arquimedes *O Método*, descoberto em Constantinopla, por J. L. Heiberg (1854-1928), em 1906. Arquimedes – no prefácio escrito em forma de carta para Eratóstenes – descreve seu método mecânico, sinalizando:

> Arquimedes a Eratóstenes, saudações. Eu te enviei anteriormente alguns teoremas que encontrei, tendo indicado seus enunciados, convidando-te a encontrar as demonstrações que não mostrei até o momento (...) Mas percebendo, como afirmo, que você é estudioso, que domina de modo excelente a filosofia e que sabe apreciar a pesquisa matemática sobre as coisas que se apresentem, considerei [interessante] descrever e definir neste mesmo livro as características de um método pelo qual será possível adquirir os recursos para poder abordar assuntos de matemática por meio de considerações mecânicas [...) Com efeito, certas propriedades que inicialmente me pareceram evidentes por via mecânica, foram demonstradas posteriormente por via geométrica, pois uma demonstração feita por meio desse método [mecânico] não corresponde a uma verdadeira demonstração. Porém, é mais fácil conseguir a demonstração depois de ter adquirido algum conhecimento dos objetos da pesquisa por meio desse método, do que procurar sem nenhum conhecimento. [...) estou persuadido de que [este método] trará uma contribuição não pequena para a matemática. Pois sou da opinião de que alguns dos contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram. Portanto, descrevo

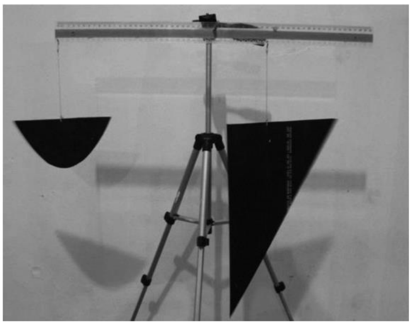
ISSN 2764-3158

> inicialmente o primeiro [teorema] que me foi revelado pela mecânica. Isto é, que todo segmento de parábola é [equivalente a] quatro terços do triângulo que tem mesma base e mesma altura. Em seguida [descrevo] cada um [dos outros teoremas] examinados pelo mesmo método (Magnaghi & Assis, 2019, p. 20).

Entendemos que o próprio Arquimedes menciona nesta sua carta que a quadratura da parábola foi o primeiro teorema geométrico que lhe foi revelado pelo seu método mecânico. Com a descoberta de *O Método*, pode ser conhecida a forma como Arquimedes havia chegado à ideia deste teorema por meio da mecânica.

> Em particular, Arquimedes considerou uma alavanca em equilíbrio sob a ação gravitacional terrestre, com uma parábola e um triângulo apoiados sobre os braços da alavanca em distâncias específicas do fulcro, como indicado pela Figura 7. Conhecendo o centro de gravidade do triângulo, o equilíbrio desta alavanca permite que se obtenha a área da parábola em termos da área do triângulo, sendo este seu objetivo (Magnaghi & Assis, 2019, p. 81).

Figura 7: Alavanca em equilíbrio com a seção parabólica e o triângulo apoiados apenas por seus centros de gravidade.



Fonte: Magnaghi & Assis, 2019, p. 80.

Como consequência da Quadratura da Parábola, surge o que provavelmente foi a primeira série infinita da Matemática: uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$. Desse modo, entendemos ser importante o processo utilizado por Arquimedes para encontrar a soma dessa série, evitando fazer o valor da variável n tender ao infinito.

Problema: mostrar que $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}$

Segundo Arquimedes $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}$

Isso segue do seguinte fato: $\frac{1}{4^k}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^k}=\frac{4}{3\times 4^k}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^{k-1}}$

Desse modo, $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^n}\right)=$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\cdots=$$

$$=1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Arquimedes realizou o Cálculo da área sob a parábola antecipando-se – assim – em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral. A base do método de Arquimedes está em considerar que superfícies são constituídas por retas. Não sabemos se considerava que haveria infinitos segmentos de retas compondo a área de uma figura. Parece que os considerava como indivisíveis, pois chegava a muitos resultados pelo método da balança, usando o princípio do nivelamento como quem estivesse pesando mecanicamente uma coleção de lâminas finas ou de fitas de algum material pesado.

Podemos observar, já nas palavras finais do prefácio, uma semelhança do método mecânico de Arquimedes com o dos indivisíveis de Leibniz, que deu origem ao seu Cálculo Diferencial e Integral. Ambos os métodos são intuitivos e geométricos e enquanto Arquimedes conseguiu resolver problemas importantes para sua época, o método de Leibniz contém os ingredientes que facilitaram as descobertas e que, no século XVII, foram decisivas para grandes avanços na matemática.

4 O Cálculo Infinitesimal de Leibniz

De acordo com Cifuentes (2011), ao estudarmos a história da matemática, no que refere à reta euclidiana – por exemplo – identificamos diferentes momentos em sua interpretação, seja por uma associação de cada número real a um ponto da reta, seja envolvendo a noção de infinitésimo. O autor destaca – então – o período inicial do cálculo infinitesimal no século XVII, cuja discussão teórica pode remontar às épocas de Zenão de Eléia (século V a.C.), Eudoxo de Cnido (século IV a.C.) e Arquimedes de Siracusa (século III a.C.).

Outro assunto que merece destaque no estudo histórico da Matemática é o de se determinar a reta tangente a uma curva, passando por um ponto. Esse problema – atualmente – se resolve fácil desde a criação do Cálculo Diferencial; diferentes métodos foram apresentados, desde os tempos remotos, pois a questão das tangentes já interessava os geômetras da antiguidade, como Euclides, Apolonio e Arquimedes. Vamos aqui, focar nas ideias proposta Leibniz.

De acordo com muitos pesquisadores do tema Moreira (2019), Lacerda (2016) e Piauí (2022), Leibniz tinha um interesse especial pela matemática dos infinitos. Vários dos trabalhos que ele publicou nas *Acta Eruditorum* são consagrados a resolver problemas geométricos contendo dificuldades envolvendo o infinito e exigindo cálculos com o infinito.

Segundo as ideias de Leibniz seria possível, de acordo com os conceitos sobre infinitos e infinitesimais, transformar, por meio de movimentos contínuos; por exemplo, polígonos em círculo sem realizar saltos. Desse modo, conceber uma curva como um polígono infinitangular:

> Sinto que este método e outros em uso até agora podem todos ser deduzidos a partir de um princípio geral, que uso para medir figuras curvilineares, que uma figura curvilínea deve ser considerada o mesmo que um polígono com lados infinitos (Leibniz, 1920, p. 146).

Leibniz em ‘Novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, válido para quantidades irracionais’, apresenta seu modo de encontrar uma tangente:

> Temos apenas que ter em mente que encontrar uma tangente significa desenhar uma linha que conecta dois pontos da curva a uma distância infinitamente pequena, ou o lado contínuo de um polígono com um número infinito de ângulos que – para nós – toma o lugar da curva. Essa distância infinitamente pequena sempre pode ser expressa por um diferencial [...] (Leibniz, 1920, p. 276).

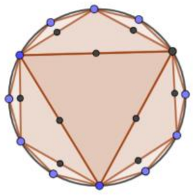
Assim quando Leibniz elabora seu modo de encontrar a reta tangente a uma curva, ele

ISSN 2764-3158

a trata como se fosse uma secante: aquela reta que não toca, mas antes corta a curva em dois pontos distintos; nesse caso, claro, dois pontos cuja distância seria ‘infinitamente pequena’.

A curva em questão não se apresenta como uma figura que não tem lados, mas sim como equivalente a um polígono tendo um número infinito de lados, a Figura 8 ilustra essa ideia. Com essa clareza, Leibniz se debruçou sobre um problema matemático que que muitos matemáticos também discutiam, qual seja: encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva.

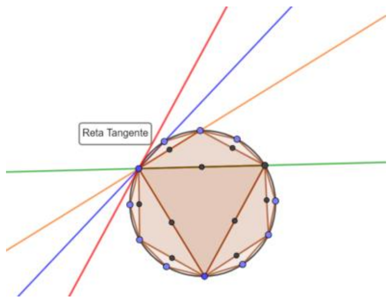
Figura 8: Sequência dos polígonos inscritos



Fonte: própria autor

Podemos pensar em uma circunferência e nela inscrevemos um triângulo. A partir da divisão dos lados desse triângulo, temos hexágono e repetimos esse procedimento reiteradamente. Jamais chegaremos a um polígono que coincida com a circunferência, pois – por menor que seja o segmento de reta que traça o lado do polígono – esse segmento de reta é divisível ao infinito. Assim, a todo polígono obtido por esse procedimento conseguimos outro em seguida, de modo que nunca teremos o último polígono; no entanto, a circunferência encerra essa sequência infinita: ela é o limite dessa sequência. A circunferência – então – já não é um polígono porque não tem lados, mas encerra a sequência dos polígonos inscritos.

Figura 9: retas secantes se aproximando da reta tangente



Fonte: própria autor

Para Leibniz a reta tangente – como ilustrado na Figura 9 – é o limite dessa sequência de retas secantes. Em termos práticos, podemos dizer que a tangente tem uma propriedade que é a negação do que a constitui como tangente. Leibniz usa isso para realizar o seu cálculo até o momento que lhe convier, chegando a um determinado momento que diz: essa distância “d” é tão pequena que podemos dizer que é igual a zero, não é grandeza nenhuma.

Essa afirmação gera muitas discussões sobre ser infinitamente pequeno, ser menor do que qualquer grandeza dada, pois se trata de uma noção absurda, para a época, uma vez não existe, naquele momento histórico, a ideia do infinitamente pequeno. Ele aceita todos esses argumentos, mas não está recorrendo a uma grandeza que não conseguimos conjecturar, uma grandeza impossível, mas sim, está usando símbolos para aplicar a algo que já recai mais sobre aqueles símbolos. É como se ele usasse nomes para se referir a objetos que não são mais nomeados pelos nomes dados inicialmente. Ele usa o nome secante para se referir a algo que não é mais secante, mas sim tangente, para poder trabalhar com a fórmula da secante à tangente.

Leibniz entende que seu método para encontrar a reta tangente é eficaz; em seu trabalho

ISSN 2764-3158

sobre o Cálculo Diferencial, destaca:

> Se quiséssemos resolver esse problema pelos métodos tangentes existentes, removendo irracionais, então seria uma tarefa muito tediosa e às vezes insuperável [...] mesmo nos mais complicados, nossos métodos são de uma facilidade surpreendente e inigualável (Leibniz, 1920, p. 279).

Entendemos que Leibniz trabalha desse modo, pois dispõe de sua Lei da Continuidade que prevê esse fato, o qual o autoriza tratar de algo por aquilo que ele não é, como se assim fosse; essa lei

> Em sua formulação mais usual, esse princípio é aplicado aos fenômenos físicos, consistindo na afirmação de que a mudança de um determinado estado físico a outro sempre se dá através de estados intermediários, nos quais há o aumento ou a diminuição de algum parâmetro físico. Assim, por exemplo, ao estado de movimento não se segue o estado de repouso completo, mas sim o de um movimento um pouco mais lento e assim por diante, de tal modo que não há, em termos estritos, jamais repouso absoluto, mas sim um movimento infinitamente lento (Marques, 2016, p. 17).

Mesmo que longa e pela sua articulação com a ideia leibniziana sobre o infinito, acredita-se necessário fazer uma citação direta de como Leibniz faz referência a sua Lei de Continuidade:

> Não acontece nada de repente, e uma das minhas máximas fundamentais e mais confirmadas é que a natureza nunca dá saltos: quando falei sobre isso nas primeiras Nouvelles de la République des letres, chamei-a de Lei da Continuidade, e esta lei tem um uso considerável na Física: ela estabelece que sempre nos movemos do pequeno para o grande e vice-versa, através do intermediário, tanto em graus como em partes, e que o movimento nunca nasce imediatamente do repouso, nem se reduz a ele, mas sim através de um movimento menor, da mesma forma que nunca se completa a travessia de uma linha ou comprimento sem ter atravessado primeiro uma linha menor; tudo isso apesar do fato de que aqueles que estabeleceram as leis do movimento não apontaram esta lei, mas mantiveram que um corpo pode receber instantaneamente um movimento contrário ao precedente. Isso nos leva a pensar que percepções captáveis também advêm daquelas que são muito pequenas para serem notadas, através de graduações. Pensar de outra forma é conhecer pouco sobre a imensa sutileza das coisas, que sempre e em toda parte envolvem um infinito atual (Leibniz, 1993, p. 49).

Ele enfatiza a ideia de continuidade e gradualidade na natureza, em oposição a mudanças abruptas e saltos. Essa compreensão está alinhada com a sua filosofia, em cujo âmbito argumenta que a realidade é composta por uma série de "mônadas" individuais que estão interligadas e que todas as mudanças ocorrem de maneira contínua. Entende que na imensa sutileza das coisas, as mudanças não são abruptas, porém contínuas, o que conduz a pensar na presença de um infinito atual em todos os lugares. Isso pode ser uma referência à complexidade subjacente da realidade e à ideia de que mesmo nas menores partes da natureza, existe uma profundidade infinita a ser explorada, engravidando o pensar sobre o infinito. Infinito, como o que não possui fim, aquilo a que é contraditório atribuir um fim. Séries infinitas seriam séries sem fim; e a divisibilidade infinita do contínuo quereria dizer que o contínuo não é composto de partes ou elementos que sejam indivisíveis ou nulos (Moreira, 2001, p. 170).

A Lei da Continuidade constitui um dos modos pelos quais Leibniz consegue manter um diálogo entre sua lógica, a Matemática e a Filosofia. De Risi (2016) afirma que

> Dado o grande interesse de Leibniz pela lógica, seu envolvimento em discussões fundamentais sobre as novas técnicas infinitesimais, sua ampla erudição em história da matemática e suas preocupações didáticas com a educação científica, não é surpresa que ao longo de sua vida ele tenha dedicado uma parte considerável de seu tempo a investigar a essência do raciocínio geométrico ou o sistema de princípios necessários para fundamentar toda a matemática. Além disso, embora Leibniz frequentemente tenha traçado analogias entre suas descobertas matemáticas e suas visões metafísicas, pode-se dizer que essas duas disciplinas só se fundem de fato em seu trabalho sobre os fundamentos da geometria. Nesse campo, as teses filosóficas mais audaciosas de Leibniz sobre a natureza do espaço, seus programas ambiciosos em lógica e epistemologia, e sua expertise matemática em lidar com os teoremas mais celebrados de Euclides simplesmente se combinam em uma única ciência. Ele rotulou suas várias pesquisas sobre o tema sob o nome geral de análise situs (De Risi, 2016, p. 3).

O mesmo De Risi sinaliza que Análise Situs – nome dado por Leibniz para um conjunto de investigações matemáticas e filosóficas sobre os fundamentos, desenvolvimento e formalização da geometria – constitui "a tool designed to rigorize and ground the geometrical sciences." (De Risi, 2018, p. 251,). Mas convém esclarecer que A suposta conexão entre as pesquisas geométricas de Leibniz e a topologia, no entanto, parece derivar apenas do fato de que esta última disciplina era comumente chamada de Análise Situs no século XIX.

5 Possibilidades de relações entre os trabalhos de Arquimedes e Leibniz.

Ao analisarmos as ideias e demonstrações geométricas desenvolvidas por Arquimedes, podemos compreender que elas não consideram o infinitesimal. Tanto Eudoxo quanto Arquimedes afirmam que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto se queira, não propondo a ideia de continuar o processo infinitamente. Corroborando essa afirmação, Cifuentes (2011) destaca que o método de exaustão permitia, ao pensamento grego, eliminar o infinito da matemática, transformando o aproximado em exato, o que, em termos aristotélicos, significa transformar potências em atos. Ainda, segundo Cifuentes, "a aplicação do princípio de Arquimedes, ou do princípio de Eudoxo, ao método de exaustão pode ser ainda interpretada como um recurso de simplicidade nos procedimentos de argumentação matemática" (Cifuentes, 2011, p. 655).

Brolezzi (1996) destaca que a diferença entre o método da exaustão e o limite do Cálculo Infinitesimal, está no fato dos gregos não fazerem uma passagem ao infinito, pois não conheciam a ideia do continuum. Esse fato pode decorrer da concepção aristotélica que se tinha na época sobre o infinito. O conceito de infinito potencial, elaborado por Aristóteles, negava que o infinito pudesse ser atual. Para Aristóteles, o infinito não é substância nem determinação substancial, mas existe somente como disposição de grandezas.

Para Aristóteles,

> E se, em sentido absoluto, é impossível [206a] haver lugar infinito, e todo corpo está em um lugar, é impossível que haja algum corpo infinito. De fato, o que existe algures está em algum lugar, e o que está em algum lugar existe algures. Se, com efeito, nem como quantidade o infinito é – pois seria certa quantidade, como dois ou três côvados; afinal, isso é o que significa a quantidade – tampouco está em algum lugar, porque neste caso existiria

> algures, isto é, ou em cima, ou embaixo, ou em alguma outra das seis direções, e cada uma delas é certo limite. Que, com efeito, em ato (enérgeia) não há corpo infinito, isso é evidente por estas razões (Aristóteles, 1992, p. 105).

Em sua obra *Física*, Aristóteles diz que:

> Minha teoria não tira nada às considerações dos matemáticos, ao suprimir o infinito que existiria em ato segundo o acréscimo infinito, que não se poderia recorrer: pois os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram (Aristóteles, 1979, p. 523, Trabalho original publicado em ca. 350 a.C.).

Desse modo, faltou tanto aos gregos, como a Arquimedes, a noção da passagem ao limite, pois ele partilhada desse mesmo "horror ao infinito" (Brolezzi, 1996). Ao estudarmos a Matemática grega, encontramos indícios das ideias originais do Cálculo, principalmente em suas noções de grandezas discretas e contínuas.

Cifuentes (2011) apresenta as seguintes definições de infinito potencial e infinito atual:

> [...] (a) **o infinito potencial**, ou infinito em potência, por exemplo, o infinito dos números naturais em sua gênese indutiva, um após outro sem fim: 1, 2, 3, 4, 5,...; e (b) **o infinito atual, ou infinito em ato**, isto é, o infinito acabado, totalizado, captado ou apreendido como totalidade, por exemplo, o infinito do conjunto dos números naturais pensados simultaneamente: {1, 2, 3, 4, 5, 6,...}. Repare-se que colocar todos os números naturais em um conjunto é dar um contexto a seus elementos, é criar uma nova entidade que dá identidade a seus elementos. É como reunir uma coleção de pessoas em uma nação, sendo esta a atribuição de uma identidade a todos seus membros. Os conjuntos são formas de atribuir contexto a coleções de objetos mudando assim seu estatuto ontológico (Cifuentes, 2011, p. 662).

Em que as ideias posteriores avançam em relação àquelas apresentadas séculos antes? Um indício da resposta a esse questionamento poderia estar na ideia intuitiva do processo desenvolvido por Arquimedes, mas fundamentado, na abordagem posterior, pelo conceito de infinito atual.

Infinito atual significa o infinito categórico, ao qual só a matemática moderna organizou de um modo rigoroso. A ideia que norteia o infinito atual, é aquela de que o infinito pode ser concebido como um ente completo e acabado, onde todos os seus elementos podem ser pensados num ato único, ou ainda, na ideia do infinito como objeto.

Leibniz, em seu texto *Novos Ensaios Sobre o Entendimento Humano*, apresenta suas principais concepções sobre o infinito. Já no prefácio deixa claro que o infinito, para ele, é atual e é propriedade de todas as coisas,

> [...] as percepções grandes e notáveis provêm por graus daquelas que são excessivamente insignificantes para serem notadas. Não concordar com isso equivale a conhecer pouco a imensa sutileza das coisas, que envolve um infinito atual, em toda parte e sempre (Leibniz, 2004, p. 29).

Leibniz, com sua ideia sobre o infinito, propõe-se a encontrar o valor exato da área do círculo; para isso, sugere em lugar da solução geométrica, uma solução aritmética, que chama de Quadratura aritmética e “que consiste de fato em uma série, em que o valor exato do círculo aparece através de uma série de termos, de preferência racionais” (Leibniz, 1995, p. 76). O valor exato é dado por uma série infinita inteira, conhecida quando identificamos sua natureza e a lei de progressão.

Entendemos aí seu novo modo de operar o cálculo, um novo algoritmo, como diz Leibniz, que resolve não somente o problema das quadraturas, mas recoloca a questão em outros termos, analisando um processo de variação por uma lei invariável. Como não opera nem com figuras nem com números descontínuos, o que restam são relações, e relações que envolvem o infinito.

> A divisão do contínuo não deve ser considerada como a divisão da areia em grãos, mas como a de uma folha de papel ou de uma túnica em dobras, de maneira que possa haver uma infinidade de dobras, umas menores do que as outras, sem que jamais o corpo se dissolva em pontos ou mínimos (Leibniz, 1903, p. 615).

O infinitesimal com que Leibniz trabalha não é um indivisível infinitamente pequeno, mas um infinitamente pequeno que tende ao zero. Do ponto de vista geométrico, essas quantidades incomparáveis são quantidades que desaparecem, que “não sendo fixas ou determinadas” podem “ser consideradas tão pequenas quanto se queira em nossos raciocínios geométricos” (Leibniz, carta a Varignon, 2/2/1702, apud Burbage & Chouchan, 1993, p. 122).

Observa-se que o conceito de infinito encontrado em Leibniz está implícito na ideia de intervalo infinitesimal que, por consequência, aparecem nas grandezas tipicamente denominadas Delta e Épsilon do Cálculo Diferencial contemporâneo. Esta abordagem permite a interpretação de conceitos relativos ao infinito em um contexto algébrico que não exige um significado enquanto objeto geométrico para sua compreensão.

Por sua vez, a interpretação Aristotélica se destaca pelo apelo intuitivo de sua abordagem, favorecendo a compreensão da questão sem o pré-requisito de uma estruturação abstrata mais elaborada.

6 Conclusão

O presente trabalho investigou a possibilidade de relacionar o conceito de infinito e suas implicações segundo as abordagens de Aristóteles e de Leibniz.

Em primeiro lugar, o modo como Leibniz pensou a equação da reta tangente a uma curva se assemelha aquela como Arquimedes apresenta seu cálculo do comprimento da circunferência, bem como a sua área do círculo. Para preservar o rigor e a pertinência do seu cálculo, Leibniz mantém as consequências que sua caracterização de infinito acarreta.

A visão contemporânea sobre o tema tem como base os conceitos e resultados desenvolvidos na época de Leibniz e resultados posteriores. Entretanto, tal fato não diminui o brilho das ideias já apresentadas séculos antes por Aristóteles.

A presente reflexão procura identificar os pontos de coerência entre os processos desenvolvidos por cada um desses pensadores, e assim contribuir com subsídios que possibilitem um estudo que mostre que o pensamento matemático permeado por noções e argumentações de cunho epistemológico e de caráter qualitativo.

Destaca-se a necessidade de continuidade da presente investigação, de forma a apresentar resultados que – embasados pelo rigor matemático contemporâneo – afirmam que o pensamento tanto de Arquimedes, quanto de Leibniz, quando compreendidos como procedimentos para a construção de um objeto matemático ou como um contexto para que esse objeto possa ser compreendido pela intuição.

Observamos que as ideias intuitivas aqui apresentadas serviram como base para o desenvolvimento de uma argumentação matemática rigorosa, e que ambas contêm diferenças significativas que não nos permite caracterizá-los como totalmente equivalentes. Isto motiva o desenvolvimento de estudos posteriores sobre o assunto.

Finalmente, esta discussão também contribui para a formação do professor de matemática, que consciente da existência de diferentes abordagens em diferentes épocas históricas, enriquece tanto sua formação, como a qualidade dos trabalhos desenvolvidos com seus estudantes.

A pesquisa realizada permitiu inferir sobre a proximidade dos modos de trabalho de Arquimedes aos procedimentos idealizados por Leibniz no tratamento de alguns conceitos essenciais de seu Cálculo, mesmo mantendo diferenças enquanto as ideias assumidas por Arquimedes sobre o infinito.

Referências

Aristóteles. (1992). *Aristotelis Physica. Recognovit brevique adnotatione critica instruxit W. D. Ross*. Oxonii e Typographeo Clarendoniano.

Aristóteles. (1979). *Física*. Consejo superior de investigaciones científicas.

Bicudo, I. (2009). *Os Elementos de Euclides* (Irineu Bicudo, Trad.). Editora UNESP.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática* (Elza F. Gomide, Trad.). Edgard Blücher.

Brolezzi, A. C. A. (1996). *Tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática*. [Dissertação de Mestrado]. Universidade do Estado de São Paulo.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, 14(1), 1–90.

Cifuentes, J. C. (2011). O salto arquimediano: um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. *Scientiæ Zudia*, 9(3), 645–67.

D'Ambrosio, U. (2016). Filosofia, Educação e Matemática em uma relação íntima. *Revemat*, 11, 21–35.

De Risi, V. (2016). *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry*. Springer International Publishing Science Networks. https://doi.org/10.1007/978-3-319-19863-7_1

De Risi, V. (2018). Analysis Situs, the Foundations of Mathematics, and a Geometry of Space. In M. R. Antognazza (Ed.). *The Oxford Handbook of Leibniz* (pp. 247–258). Oxford University Press.

Euclides (2009). *Os elementos* (Irineu Bicudo trad.). Editora UNESP.

Eves, H. (1995). *Introdução à história da Matemática* (Hygino H. Domingues, Trad.). Unicamp.

González, F. E. (2024, outubro/novembro). *Leibniz e Cantor: Duzentos anos de diálogo*. [Apresentação de trabalho]. X Encontro Mineiro de Educação Matemática. Montes Claros, Minas Gerais.

Heath, T. L. (2002). *The Works of Archimedes* (Traduzido e editado em notação moderna). Dover.

Knorr, W. R. (1982). Infinity and continuity: The interaction of mathematics and philosophy in antiquity. In N. Kretzmann (Ed.). *Infinity and continuity in ancient and medieval thought* (pp. 112-145). Cornell University Press.

Lacerda, T. M. (2016). Leibniz: A Infinitude Divina e O Infinito em Nós. *Cadernos Espinosanos*, 34, 39–63. https://doi.org/10.11606/issn.2447-9012.espinosa.2016.116945

Leibniz, G. W. (1961). *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (Couturat, Ed.). (Trabalho original publicado em 1903).

Leibniz, G. W. (1920). *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz* (J. M. Child, Trad., from the Latin texts published by Carl Immanuel Gerhardt). The Open Court Publishing Company.

Leibniz, G. W. (1993). *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (E. Knobloch, Ed.). Vandenhoeck & Ruprecht.

Leibniz, G. W. (1995). *La naissance du calcul différentiel* (M. Parmentier, Ed.). Paris: Vrin.

Leibniz, G. W. (2004). *Discurso de metafísica*. In G. W. Leibniz. *Discurso de metafísica e outros textos* (pp. 1 - 128). Martins Fontes.

Leibniz, G. W. (1684). Nova metthodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur. *Acta Eruditorum,* X, 467–473.

Magnaghi, C., & Assis, P. A. K. (2019). *O Método de Arquimedes: Análise e Tradução Comentada.* Instituto de Física Universidade Estadual de Campinas UNICAMP.

Marques, E. (2016). Percepção, Autoconsciência e Continuidade em Leibniz. *Cadernos Espinosanos*, 34, 15–38. https://doi.org/10.11606/issn.2447-9012.espinosa.2016.116944.

Moreira V. C. (2019). *Contínuo e Contingência I: Estrutura e Alçada da Lei da Continuidade na Lógica de Leibniz.* Kotter Editorial.

Netz, R., & Noel, W. (2007). *The Archimedes Codex. Revealing the Secrets of the World's Greatest Palimpsest.* London, UK: Weidenfeld & Nicolson.

Paipetis, S., & Ceccarelli, M. (Eds.). (2010). *The Genius of Archimedes – 23 Centuries of Influence on Mathematics, Science and Engineering* (History of Mechanism and Machine Science, vol. 11). Springer.

Piauí, W. (2023). Leibniz e a inventividade Matemática: uma introdução. In W. Piauí. *Escritos de Filosofia V: linguagem e cognição* (pp. 83–125). Cachoeirinha, RS: Editora Fi.

Roque, T. (2012). *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, Br.: Editora Zahar.

Struik, D. J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press.