

DISCUSSÃO DO ENSINO DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS COM AMPARO DA TECNOLOGIA

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Resumo:

Neste minicurso discutiremos a noção de integral imprópria. Este conceito matemático possibilita a generalização da noção de integral de Riemann, originalmente estabelecido apenas para funções contínuas (e limitadas). Assim, diante da profusão de critérios matemáticos que determinam/descrevem o comportamento para uma classe maior de funções, exemplificaremos com cinco teoremas ou testes, com ênfase na interpretação gráfico-geométrica e na identificação de comandos básicos do *software Geogebra*, que permitem uma interpretação dinâmica do conceito de convergência. Esperamos, pois, proporcionar o caráter de praticidade do uso da tecnologia em sala de aula, no âmbito do ensino do Cálculo e Análise Real. O elemento que tencionamos indicar, fruto das situações que trazemos neste escrito, refere-se ao fato de que evidenciamos o caráter indefectível das práticas acadêmicas que priorizam o formalismo a algebrização das atividades. O desafio vem no sentido de aliar o cuidado com o rigor (matemático), de modo concomitante ao uso da tecnologia.

Palavras-chave: Padrões gráficos; Técnicas de Integração; Ensino.

1. O contexto histórico da noção de integral e sua evolução

A História da Matemática fornece informações relevantes que nos permitem compreender o processo tortuoso e não linear atinente à evolução da noção de integral. De fato, no âmbito da transição do século XIX para o século XX, as contribuições de L. Cauchy, Bernhard Riemann e K. Weierstrass foram decisivas, no sentido de descrever, matematicamente, o significado preciso para o símbolo $\int_a^b f(x)dx$, onde f é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Todavia, antes disso, registramos no século XVII algumas situações que indicam as limitações e inconsistências dos instrumentos conceituais com que dispunham os matemáticos há época. Neste sentido, Eves (1969, p. 380) aponta que o próprio conceito de integral exigiu o estabelecimento de uma definição formal, culminando com o que hoje chamamos de integral de Riemann.

Quando nos atemos ao percurso histórico envolvendo à sua evolução, compreendemos o caráter heurístico que condicionou tanto a aceitação, bem como a rejeição desta noção matemática, pelos investigadores dos séculos passados, como assim

nos reportam alguns autores (MARTIN-GONSALEZ, 2006). Neste sentido, recordemos a discussão entre o matemático John Wallis e o filósofo Thomas Hobbes, estreitamente vinculada ao entendimento da região do espaço, na qual, temos definido o gráfico (trombeta de Gabriel) que exibimos na figura 1. Hodiernamente, evidenciamos o caráter estrutural e formal dispensado por autores de livros (DJAIRO, 1996; LIMA, 2006) a esse conceito, no contexto do ensino de Análise Real.

Salientamos, pois, em nosso âmbito de interesse, o problema da generalização da noção de integral, originalmente, descrito, para certa classe de funções desconsideradas nos trabalhos de Riemann. Na próxima seção, apresentaremos alguns resultados atinentes a uma classe de funções (contínuas) com domínio ilimitado, do tipo $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ou funções (contínuas), com imagem ilimitada, definidas em intervalos do tipo (a, b) , $[a, b)$ ou $(a, b]$. Nosso objetivo será a discussão do comportamento gráfico das integrais com o auxílio computacional. Evidenciaremos, nesse minicurso, outras vias para a apropriação desse saber, sobretudo, o entendimento de propriedades gráfico-geométricas.

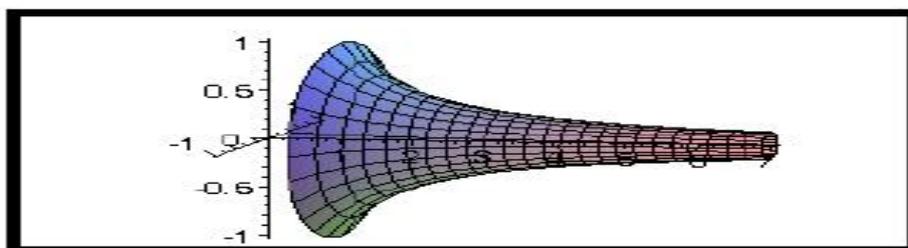


Figura 1. A trombeta do anjo Gabriel discutida em Gonzalez-Martin (2006, p. 82)

2. Critérios de convergência para integrais impróprias

Encontramos uma profusão de critérios matemáticos que detém um caráter decisivo, no sentido de determinar o comportamento de integrais do tipo $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ou $\int_a^b f(x)dx$, para funções com domínio ilimitado ou funções contínuas em intervalos semi-abertos (abertos, etc). Nesta seção apresentaremos alguns dos teoremas que devem ser explorados no mini-curso. No próximo segmento, descrevemos exemplos de atividades com arrimo na interpretação gráfica extraída do *software Geogebra*. Vejamos alguns deles.

Teorema 1 (Critério da Comparação) se existe uma função $g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq k \cdot g(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Então: (i) se $\int_a^b g(x)dx$ converge, então $\int_a^b f(x)dx$ converge; (ii) se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, então $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Teorema 2 (Teste ‘p’) Dada uma função $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Integrável em todo $[a, b] \subset [a, \infty)$. Considerando ainda o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^p \cdot f(x)) = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Então, se tem:

(i) se $L \neq 0$ e $p > 1$, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente. Se $L \neq 0$ e $p \leq 1$, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente; (ii) se $L = 0$ e $p > 1$, então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge; (iii) se $L = \infty$ e $p \leq 1$, então $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Teorema 3 (Critério de Cauchy): Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ em que $f|_{[a,r]}$ é integrável para $\forall r > a$. Nessas condições $\int_a^\infty f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, existe $M > 0$ e $B > A > M$ se tem $\left| \int_A^B f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Teorema 4 (Teste de Abel): Assumindo que as funções f e g definidas em $[a, \infty)$ e satisfaz as seguintes condições: (i) g é monótona e limitada em $[a, \infty)$; (ii) a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente. Então, a integral $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ é convergente.

Teorema 5 (teste de Dirichlet para integrais impróprias): Sejam $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, com f monótona, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, f' integrável em $[a, x]$ com $\forall x > a$. Tem-se também que g contínua e $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ limitada, em que $G : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Nestas condições, a integral $\int_a^\infty f(x) \cdot g(x)dx$ converge.

Vale observar que as respectivas demonstrações podem ser encontradas no rol dos escritos indicados em nossas referências, todavia, o entendimento das propriedades matemáticas vinculadas a cada teorema é condição *sine qua non* para o discernimento e identificação das propriedades gráfico-geométricas que doravante discutiremos.

3. Exploração da noção de integral imprópria com o uso do *software Geogebra*

Apontamos na literatura, alguns trabalhos (ALVES, 2012a; 2012b; 2012c) que descrevem o empenho metodológico com vistas à criação de um cenário didático de investigação matemática, que valoriza a visualização, como elemento impulsionador para a aprendizagem e entendimento. Neste cenário, a tecnologia atua de modo não secundário.

Vejamus uma primeira situação descrita com o auxílio das seguintes funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Reparemos o comportamento descritivo/qualitativo gráfico

dessas duas funções. Na figura 1, depreendemos que até o ponto A (intersecção dos dois gráficos), o crescimento das contribuições das áreas sob o gráfico da função $g(x)=1/\sqrt{x}$ supera as contribuições de área sob o gráfico da função $f(x)=1/x$. Daí, podemos esperar, intuitivamente, que ao empregarmos o Teorema Fundamental do Cálculo – TFC (LIMA, 2006, p. 233) num intervalo $[1, a]$, com $1 < a$, tenhamos tal relação entre as integrais.

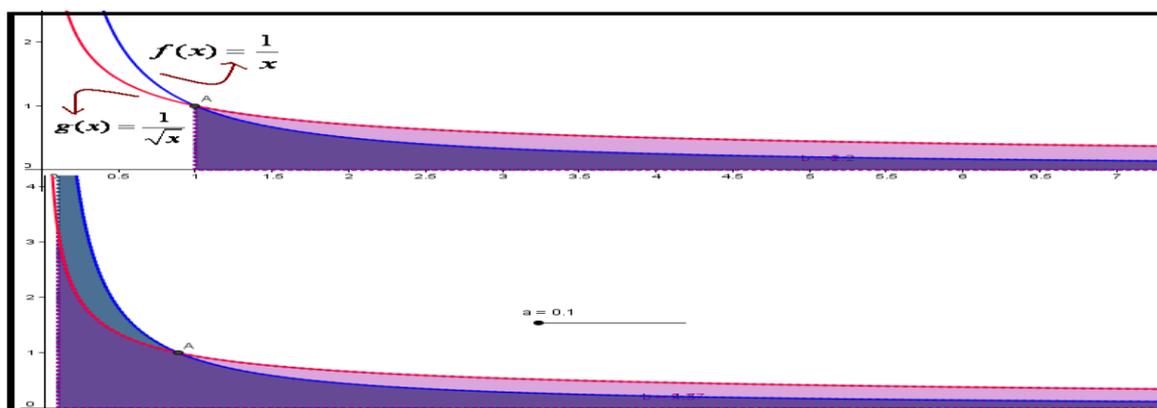


Figura 2. Descrição e interpretação gráfico-geométrica do teorema 1.

Por outro lado, a partir do ponto $A(1,0)$, quando fazemos $x \rightarrow 0^+$ (tender a zero), com base na figura 1, divisamos que o crescimento da função $f(x)=1/x$ supera agora o da função $g(x)=1/\sqrt{x}$. Outra questão que não podemos desconsiderar é a perda da continuidade de ambas as funções no ponto $x=0$. Daí, em virtude de não podermos aplicar TFC, surge, pois, a necessidade do uso da noção de integral imprópria. Nesse caso, descrevemos as seguintes integrais $\int_0^a \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^a \frac{dx}{x}$ e $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$. No que segue da atividade, vamos investigar que o comportamento numérico coincide com o comportamento qualitativo e geométrico que indicamos na figura 1. Agora, podemos empregar o Teorema 1, discriminado em cada região acima, para $0 < x \leq 1$ e $1 \leq x < a$, $\forall a$, que permite comparar e descrever desigualdades entre tais integrais.

Com base na figura 1, sem efetuar cálculos analíticos, esperamos obter a relação

$$\int_1^a \frac{dx}{x} \leq \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}}, \text{ para qualquer } 1 < a. \text{ Enquanto que } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Nossa Discussão em relação ao Teorema 2 gira em torno da busca por uma integral que coaduna ao modelo matemático descrito por este teorema. Deste modo, passamos a considerar as seguintes integrais: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$ e $\int_0^{10000} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$. A ideia heurística envolvendo esse caso é que, ao calcularmos a integral imprópria, e na ocasião

em que se tenha a convergência da integral, poderemos comparar e prever o valor de uma integral definida, em intervalos do tipo $[0, 10^{10}]$. O problema é que, nesses casos, a determinação do valor da integral definida se torna bastante fastidioso, todavia, com o

Teorema 2 (teste p), podemos prever que ocorre $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx \approx \int_0^{10000} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$.

Mas, vejamos que o Teorema 2 exige a verificação do seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^p \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^p \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{(p-7/6)}}{(\sqrt{1+1/x}+1)(\sqrt[3]{1+1/x^2})} \right).$$

Por fim,

temos que analisar os casos: (i) $p-7/6 > 1$ se tem que esse limite não existe; (ii) se $p-7/6 = 0$ vale 1. No caso do Teorema 3, podemos adotar a seguinte integral

$I = \int_1^\infty \arctg(x) dx/x^2$. Reparemos que para usar o teorema de Cauchy, devemos averiguar

que o limite de $G(x', x'') = \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\arctan(x) dx}{x^2} \right| \begin{matrix} x' \rightarrow \infty \\ x'' \rightarrow \infty \end{matrix} \rightarrow 0$ é zero. Reparemos ainda que

o Teorema do Valor Médio para integrais, nos permite escrever:

$$\left| \int_{x'}^{x''} \frac{\arctan(x) dx}{x^2} \right| = |\arct g(x)| \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} \right| = |\arct g(x)| \leq \frac{\pi}{2} \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} \right| = \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| \xrightarrow{x' \rightarrow \infty, x'' \rightarrow \infty} 0.$$

Na figura

abaixo, divisamos o comportamento de convergência da integral $I = \int_1^\infty \arctg(x) dx/x^2$. Na

figura 3, o caráter descritivo-qualitativo reside no fato de que embora lidemos com uma função $f(x) = \arctg(x)/x^2$ definida em $\mathbb{R} - \{0\}$, podemos depreender, com origem no gráfico da figura 3, que as contribuições de área tendem, paulatinamente, a zero.

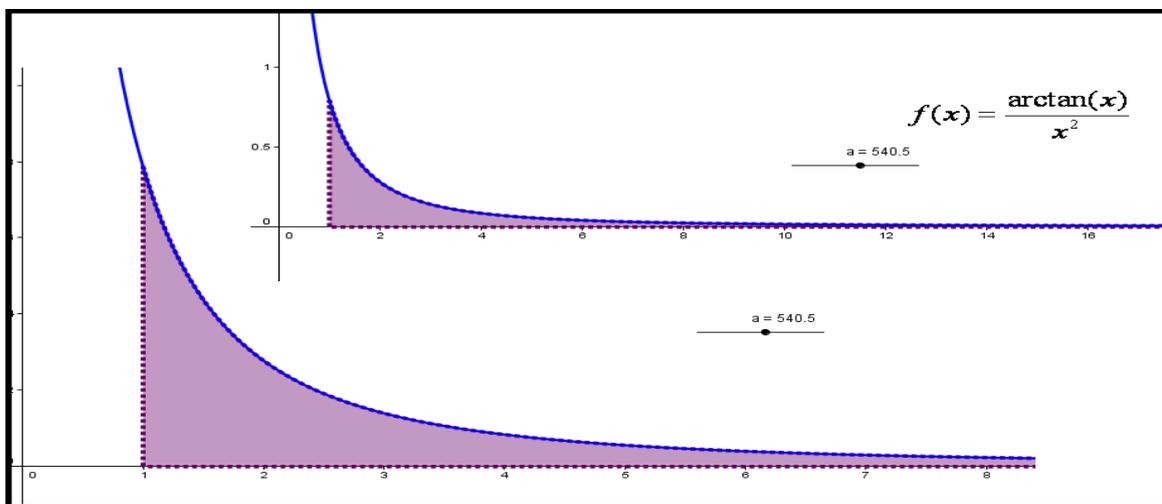


Figura 3. Descrição geométrico-gráfica de integral convergente no caso do teorema 3.

Podemos usar o critério de Cauchy na seguinte integral $I = \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(x)dx}{x^2}$, usando a noção de convergência absoluta. De fato, basta ver que $\left| \int_{x'}^{x''} \frac{\text{sen}(x)dx}{x^2} \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} \right| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| \xrightarrow{x', x'' \rightarrow \infty} 0$. Assim, esta integral converge absolutamente e, por teorema, $I = \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(x)dx}{x^2}$ convergirá. O efeito geométrico-gráfico de empregar a noção de convergência absoluta é indicada na figura 4 abaixo. Neste caso, tomamos os gráficos das funções $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x^2}$ e $g(x) = \frac{|\text{sen}(x)|}{x^2}$. As contribuições de área diminuem.

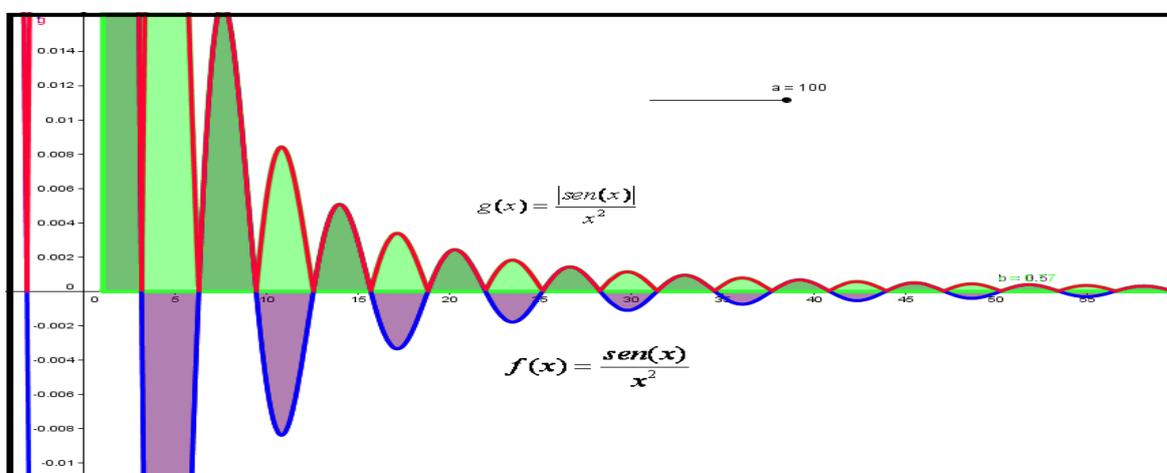


Figura 4. Interpretação gráfico-geométrica da convergência absoluta de integrais impróprias.

O efeito visual aqui reside no fato de que, para a função $g(x) = \frac{|\text{sen}(x)|}{x^2}$, as “lombadas” levadas em consideração na avaliação da integral, estão apenas na parte superior, para valores positivos das ordenadas. Em todo caso, semelhantemente ao caso da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x^2}$, depreendemos que as contribuições de área dessas “lombadas” decrescem, na medida em que $x \rightarrow +\infty$, o que nos leva a produzir ilações pertinentes à possibilidade de convergência da mesma. Tal fato pode ser verificado formalmente.

Antes de discutirmos a aplicação do *Teorema de Abel*, que permite extrairmos uma profícua interpretação heurística, com arrimo na tecnologia (apesar da extensa quantidade de hipóteses), sublinhamos que, no caso do teorema 5, temos um resultado que descreve o *teste de Dirichlet*. Para tal, consideremos a seguinte integral $\int_1^{\infty} x^q \cdot \text{sen}(x)dx$ se $q > 0$. Neste sentido, vale salientar o exemplo apresentado em Trench (2003, p. 163), quando comenta, *en passant*, que tal integral diverge quando $q > 0$. De fato, na figura abaixo, escolhemos as variações para os controles deslizantes que indicamos na figura 5.

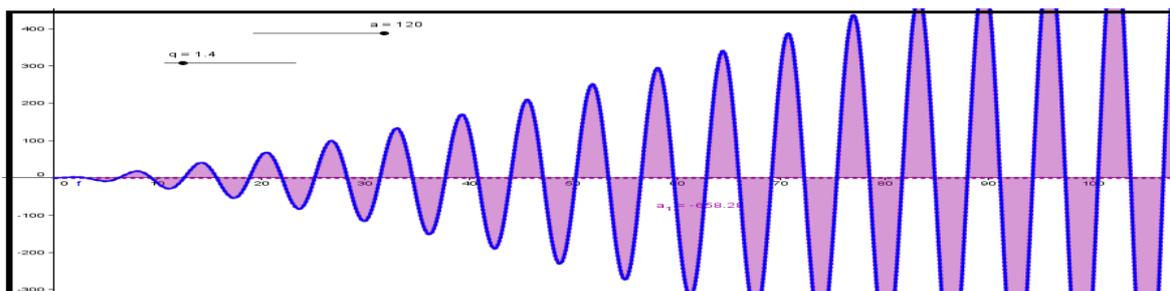


Figura 5. Descrição gráfico-geométrica da integral divergente, para $q > 0$.

Depreendemos que as contribuições de área tendem, para valores de ‘q’ positivos, e valores de $x \rightarrow +\infty$, a crescer. Daí, adquirimos o entendimento sobre seu comportamento de divergência. No teste de Dirichlet, indicaremos por $G(x) = \int_1^x x^q \cdot \text{sen}(x) dx$ e admitiremos, provisoriamente, sua convergência, para algum $q > 0$. Segue então que a integral $G(x) = \int_1^x x^q \cdot \text{sen}(x) dx$ deverá ser limitada, por definição, em $[1, \infty)$. Considerando $g(x) = x^q \cdot \text{sen}(x)$ e $f(x) = x^{-q}$. Verificamos todas as hipóteses. Com efeito, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e a função $f(x) = 1/x^q$ é riemann-integrável em $[1, \infty)$.

Devemos concluir, pois, que a convergência dada pelo produto $\int_1^\infty f(x) \cdot g(x) dx = \int_1^\infty x^{-q} \cdot x^q \cdot \text{sen}(x) dx = \int_1^\infty \text{sen}(x) dx$. O que é uma contradição, visto que, com o apoio do *software*, podemos verificar o comportamento da integral imprópria e perceber que $\int_1^\infty \text{sen}(x) dx$ diverge. A contradição aqui é oriunda do fato de havermos feito a suposição da existência de um certo $q > 0$. Portanto, contamos sempre com a divergência de $\int_1^\infty x^q \cdot \text{sen}(x) dx$, segundo o teorema 5. Após tal pequena digressão, consideremos, em conclusão, a seguinte integral $\int_1^{+\infty} \text{arctg}(x) \cdot (\text{sen}(x)/x^q) dx$, com $q > 0$. Segundo o teorema 4, designaremos por $f(x) = \text{sen}(x)/x^q$ e $g(x) = \text{arctg}(x)$ (limitada, monótona, crescente). Ora, pelo teorema 5, depreendemos que a integral $\int_1^{+\infty} (\text{sen}(x)/x^q) dx = \int_1^{+\infty} \text{sen}(x) \cdot (1/x^q) dx$ é convergente. Então, de acordo com o teste de Abel (teorema 4) contaremos com a convergência da mesma. Reparemos em todos os casos de aplicação dos teoremas anteriores, o caráter de não trivialidade para a verificação formal e uso dos mesmos. Em nossa discussão, o *software Geogebra* proporciona a visualização e a produção de conjecturas imediatas.

4. Considerações e recomendações finais

Apresentamos cinco teoremas envolvendo critérios para a descrição da convergência de integrais. Tais teoremas, quando negligenciamos o papel da tecnologia, restringem a atividade do aprendiz, ao domínio e a aplicação da regras de inferências de cunho formalista. Por outro lado, nas atividades que propomos, descrevemos um cenário de aprendizagens, semelhante ao momento histórico vivenciado por matemáticos, séculos atrás, na medida em que apoiaremos nosso entendimento num pensamento heurístico. Sob este viés, a visualização/percepção das propriedades gráfico-geométricas vinculadas a cada integral funciona como elemento fundamental para o alcance de um patamar superior de compreensão (ALVES, 2012b) de propriedades fundamentais da integral imprópria.

5. Referências

ALVES, Francisco, R. V. Aplicação e exploração da tecnologia no ensino do Cálculo: os softwares Geogebra e o CAS Maple. In: VI BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. 2012a, p. 1-10. Campinas. **Anais da VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**. Disponível em: <<http://bienaldematematica.org.br/node/15>>. Acessado em: 8 jan 2013.

ALVES, Francisco, R. V. Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do software Geogebra. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA. 2012b, p. 48-55. Montevideu. **Anais do Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra** Disponível em: <<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/73.pdf>>. Acessado em: 12 jan. 2013.

ALVES, Francisco, R. V. O papel do contraexemplo no ensino do Cálculo: uma discussão com o uso do Geogebra. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA. 2012c, p. 381-388. Montevideu. **Anais do Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra** Disponível em: <<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/73.pdf>>. Acessado em: 11 jan. 2013.

DJAIRO, Guedes, F. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC. 1996. 256f.

EVES, Howard. **An introduction to the History of Mathematics**. New York: Holt, Rinehard and Winston. 1969, 479f.

HAIRER, E. & WANNER, G. **Analysis by its History**. New York: Springer, 2008, 389p.

LIMA, Elon. Lages. **Análise Real**. v. 1, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MARTIN-GONSALEZ, Alexandro. S. **La generalisation de la integral definida desde las perspectivas numéricas, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos: problemas de enseñanza y de aprendizaje** (tesis de doctareles en Didactica de la Matemática). La Laguna: Universidad de La Laguna. 2006, 498f.

TRENCH, William. **Introduction to Real Analysis**. San Antonio: Pearson Education. 2003.