

INTUIÇÃO E LÓGICA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA O POSTULADO DAS PARALELAS

Claudio Reis Teixeira¹
IM/UFRJ
claudiort@gmail.com

Ana Carolina Souza da Silva¹
IM/UFRJ
anacarolss10@hotmail.com

Bruna Coutinho Souza¹
IM/UFRJ
bruna_coutinha_souza@hotmail.com

Mário Keniichi Gushima Moura¹
IM/UFRJ
ken1.mario@gmail.com

Resumo:

Este trabalho apresenta os resultados parciais de uma pesquisa que busca entender como intuição e lógica estão presentes no desenvolvimento da matemática e no ensino desta disciplina. A revisão bibliográfica incluiu a relação entre intuição e lógica na visão de Poincaré e concentrou-se na noção de retas paralelas, considerando os registros históricos. Para a pesquisa de campo, foram entrevistadas 399 pessoas de diferentes níveis de escolaridade, que responderam por escrito à pergunta “O que você entende por retas paralelas?”. A partir das análises quantitativa e qualitativa do resultado dessa pesquisa de campo, concluiu-se que a noção intuitiva de retas paralelas não permanece com o avanço da escolaridade, sendo influenciada pela introdução da lógica no ensino.

Palavras-chave: Intuição e Lógica; retas paralelas; Euclides.

1. Introdução

As potencialidades da história no ensino da Matemática têm sido discutidas desde o século XVII com Clariaut. No início do século XIX, tais discussões passaram a fazer parte de congressos internacionais sobre o ensino de Matemática (MIGUEL ET AL, 2009, p. 9).

No uso da história no ensino da matemática os seguintes aspectos merecem destaque:

¹ Orientados pela Professora Emérita Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, IM/UFRJ.

- O aluno percebe que a matemática é uma criação do homem para resolver, de início, problemas do seu cotidiano e, posteriormente, uma linguagem para entender e descrever o universo físico e social;
- O professor compreende que, assim como a humanidade precisou de tempo para assimilar e dominar um conceito, o seu aluno também necessita desse tempo.

Ao estudar a história da matemática, percebe-se o papel da intuição e da lógica no seu desenvolvimento.

O exame dos documentos que chegaram até os nossos dias prova que, usando a intuição, os mesopotâmios, os egípcios e os chineses encontraram soluções práticas para resolver problemas de seu cotidiano, desenvolvendo noções avançadas de cálculo e fórmulas empíricas para problemas de medir a terra para dividi-la, assim como medições envolvidas nas construções arquitetônicas e no armazenamento de cereais.

Nas últimas décadas, historiadores matemáticos têm analisado a motivação de Euclides para escrever Os Elementos, tendo como referências comentários de Proclus e Pappus, bem posteriores a Euclides. Os comentários de Proclus, filósofo neoplatônico do século V, sobre Os Elementos tinham a clara evidência de defender as ideias de Platão, mostrando a superioridade dos teoremas sobre os problemas, ou seja, da lógica sobre a intuição, quando afirma

Estes diferem daqueles porque lidam com construções, ao passo que os teoremas procuram demonstrar propriedades inerentes aos seres geométricos [...] os teoremas enunciam a parte ideal desses seres geométricos que pertencem ao mundo das ideias, e os problemas constituem um modo pedagógico de se chegar aos teoremas (ROQUE, 2012, p. 152).

Poincaré era categórico quando afirmava no princípio do século XX

Euclides, por exemplo, edificou uma estrutura científica na qual seus contemporâneos não podiam encontrar defeito. Nessa vasta construção, da qual cada peça, contudo, deve-se à intuição, podemos ainda hoje, sem demasiado esforço, reconhecer a obra de um lógico (POINCARÉ, 1995, pp.15-16).

A obra de Euclides é considerada paradigma da ciência dedutiva até os nossos dias.

O livro 1 d'Os Elementos apresenta 23 definições, 5 postulados e 5 axiomas (ou noções comuns, segundo a terminologia da época). O exame das 23 definições permite concluir que as 7 primeiras são os termos primitivos (terminologia atual) na construção de uma ciência dedutiva. Observa-se que o termo “retas paralelas” não é usado por Euclides na formulação do 5º postulado, hoje denominado Postulado das Paralelas, apesar de constar na definição 23.

A partir das definições, postulados e noções comuns que, segundo Poincaré, são devidos à intuição, Euclides construiu a obra de um lógico.

Para entender a afirmação de Poincaré, é importante atentar para os vários tipos de intuição por ele formulados:

Temos, pois, várias espécies de intuição; primeiro, o apelo aos sentidos e à imaginação; em seguida, a generalização por indução, por assim dizer calcada nos procedimentos das ciências experimentais; temos, enfim, a intuição do número puro, [...] e que pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático (POINCARÉ, 1995, p. 19).

Por outro lado, a supremacia da lógica sobre a intuição na pesquisa matemática do fim do século XIX até primeiros anos do século XX suscitou acalorados debates entre matemáticos e filósofos. Poincaré foi um dos grandes debatedores. Seu livro “O valor da ciência” começa com o capítulo “A intuição e a lógica na matemática”, onde mostra que a lógica e intuição são complementares.

[...] a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção (POINCARÉ, 1995, pp. 22- 23).

Com relação ao ensino da matemática Poincaré era taxativo:

Já tive oportunidade de discorrer sobre o lugar que a intuição deve guardar no ensino das ciências matemáticas. Sem ela, os jovens espíritos não poderiam iniciar-se na inteligência da matemática; não aprenderiam a amá-la, e só veriam nela uma vã logomaquia; sem a intuição, sobretudo, jamais se tornariam capazes de aplicá-la (POINCARÉ, 1995, p.20).

As ideias de Poincaré sobre intuição e lógica e sua crítica sobre o ensino da matemática motivaram nosso grupo a desenvolver esta pesquisa sobre a evolução histórica do Postulado das Paralelas (PP), também chamado Postulado de Euclides.

Pelo exame do enunciado do PP:

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO, 2009, P. 98)

fica evidente que este não era intuitivo, levando matemáticos e filósofos a questionarem, por mais de 20 séculos: é um postulado ou um teorema?

Um problema que também preocupava os matemáticos era que a redação de Playfair sobre o PP tratava, simultaneamente, da existência e unicidade da reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto.

Só no século XIX, tendo como postulado a redação de Playfair, que definia logicamente a Geometria Euclidiana, onde existia tal reta e esta era única, o PP foi esclarecido de uma vez por todas. Posteriormente, a sua negação passou a definir, logicamente, as geometrias não euclidianas, onde era negada a unicidade ou era negada a existência da reta do PP.

Numa primeira etapa de nosso trabalho, com a pesquisa bibliográfica procurou-se mostrar como intuição e lógica estão presentes na evolução histórica do Postulado das Paralelas. Na segunda etapa, por meio de uma pesquisa de campo, buscou-se verificar se a noção intuitiva de retas paralelas permanece com o avanço da escolaridade.

2. Desenvolvimento da Pesquisa

Os Elementos de Euclides, na tradução cuidadosa de Irineu Bicudo (2009), foi base para trabalhar as primeiras atividades da pesquisa.

Do exame da definição 23: “Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.” (BICUDO, 2009, p. 98), pode-se concluir que a intuição guiou Euclides na sua redação, o que não satisfazia os matemáticos contemporâneos, pois para eles os elementos geométricos deveriam ser definidos em função de suas medidas. Ao pretender esclarecer a redação do PP surgiu uma questão: o que são retas paralelas?

Segundo Veloso (1998, p. 345, 346), foram identificadas as seguintes “definições” (equivalências teóricas) vinculadas ao PP:

- Possidônio (I a.C.): Retas paralelas são equidistantes;
- Clávio (1574): Todos os pontos equidistantes de uma reta dada formam uma linha reta;
- Cataldi (1603): Retas que não são equidistantes convergem numa direção e divergem na outra.

Na primeira fase de nosso trabalho, no período entre 2011 e 2012, foi realizada uma pesquisa de campo na cidade do Rio de Janeiro com 399 pessoas de várias faixas etárias e graus de escolaridade. Em nível de Ensino Fundamental e Médio foram entrevistadas pessoas tanto de Escolas Públicas quanto Privadas e em nível Superior a grande maioria foi de pessoas da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Os dados utilizados para nossa análise foram as respostas desse público à seguinte pergunta: “O que você entende por retas paralelas?”

A intenção era verificar se a intuição é uma constante que independe do grau de escolaridade do indivíduo, através da análise das respostas obtidas da amostra assim distribuída: 119 pessoas do ensino fundamental, 193 do ensino médio e 87 do ensino superior (diversos cursos, dentre eles: Pedagogia, Filosofia, Letras, Engenharia e Licenciaturas em: Física, Dança, Ciências Biológicas, Química e Matemática).

As respostas obtidas foram inicialmente classificadas de acordo com o seguinte critério:

Nota 0 – Não lembram ou não sabem;

Nota 1 – Deram uma resposta errada;

Nota 2 – Resposta parcialmente correta. Seria uma resposta certa, mas no decorrer da resposta também aparece algo errado, ficando no meio termo. Para ilustrar melhor, veja-se um exemplo: “Duas linhas infinitas que seguem lado a lado sem se tocar” (faltou frisar que são linhas retas);

Nota 3 – Resposta totalmente correta. Vale evidenciar que, devido ao pouquíssimo número de respostas citando que as retas devem estar no mesmo plano (apenas quatro), resolveu-se relevar esse quesito, considerando-as, portanto, como “Nota 3”. Mas, para

deixar claro, as pessoas que responderam que “são duas retas que não se encontram no espaço” ou respostas semelhantes, ou seja, lembraram-se de citar o espaço, mas não o plano, foram classificadas com Nota 1. De fato, retas reversas não são paralelas, mas não se encontram.

3. Resultados da Pesquisa

3.1 Análise Quantitativa dos dados

Com essa classificação inicial, foram obtidos os seguintes resultados, expostos nos gráficos a seguir:

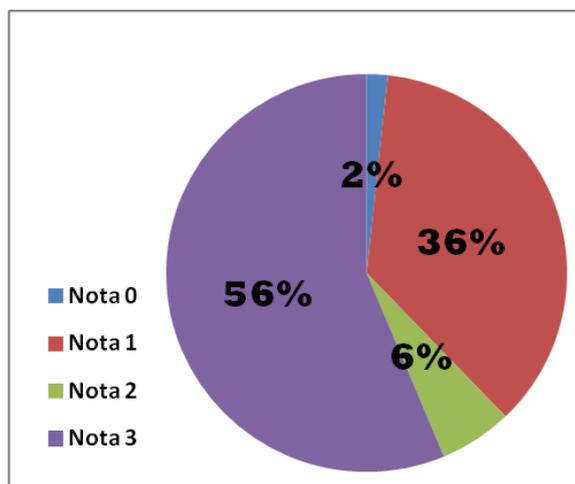


Gráfico 1 - Classificação das respostas do Ensino Fundamental

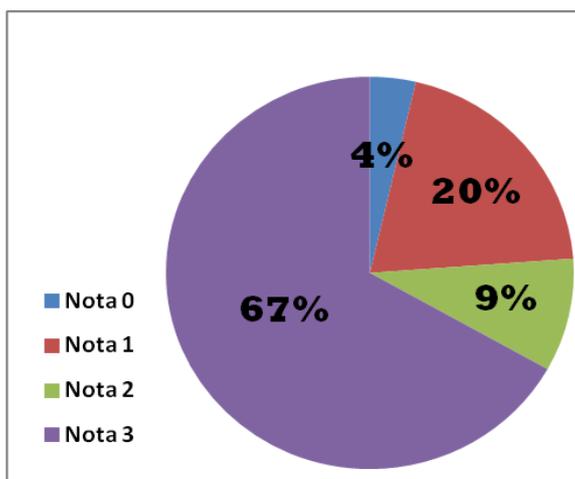


Gráfico 2 - Classificação das respostas do Ensino Médio

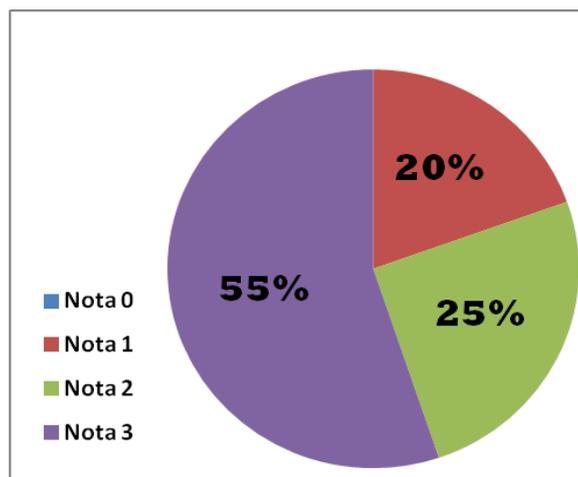


Gráfico 3 - Classificação das respostas do Ensino Superior

E a classificação total, onde consta a porcentagem dos entrevistados de todas as escolaridades em um gráfico único. Nele podemos ver melhor que, das 399 pessoas, impressionantes 39% (155 entrevistados) não acertaram completamente o conceito de Retas Paralelas.

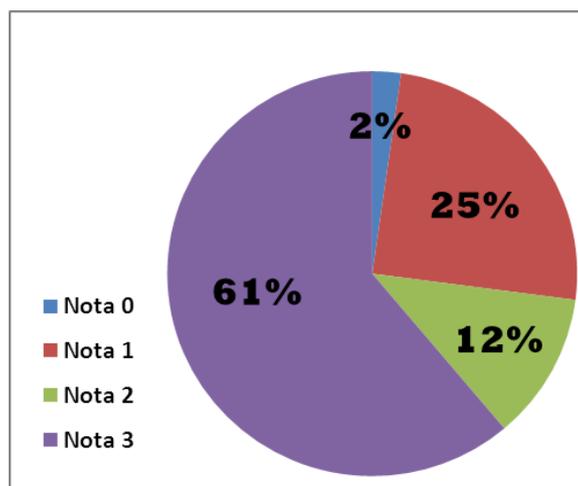


Gráfico 4 – Classificação de todos os Entrevistados

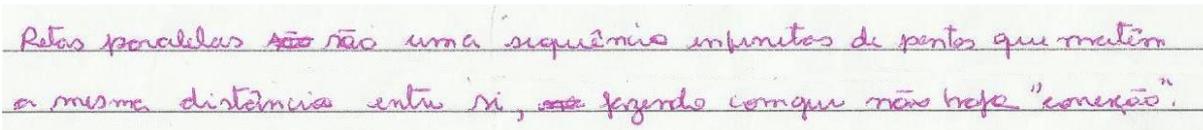
3.2 Análise Qualitativa dos dados

Além dos resultados quantitativos, foi feita também uma análise qualitativa em relação à intuição e à lógica presentes nas respostas, relacionando-as com as teorias relativas ao PP estudadas. A seguir, constam exemplos dessas respostas com algumas observações feitas pelo grupo de pesquisa.

coisas que não se encontram.

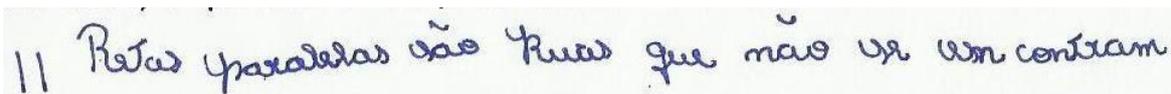
“Coisas que não se encontram (sic)” - Ensino Fundamental - Nota 1

O exemplo acima representa o perfil das respostas do ensino fundamental, que tenderam a ser mais simples, concisas e diretas, comparativamente aos demais níveis escolares. É possível identificar mais facilmente a intuição, a noção elementar de retas paralelas, na resposta acima. Porém, para efeito de classificação, a resposta foi incompreensível (com o termo “coisas”), resultando na Nota 1.



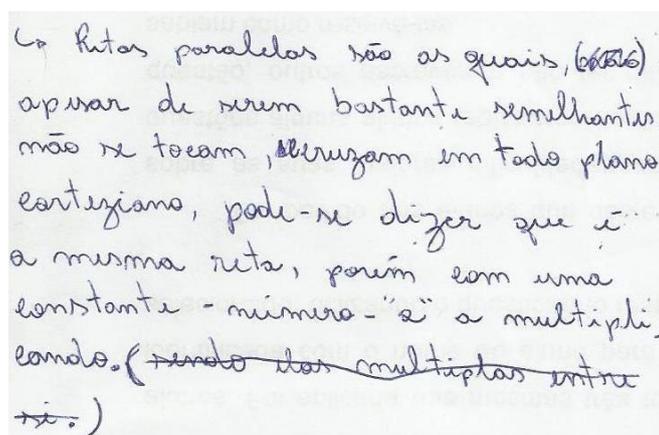
“Retas paralelas são uma sequência infinitas (sic) de pontos que mantém a mesma distância entre si, fazendo com que não haja ‘conexão’.” - Ensino Superior – Engenharia Ciclo Básico Nota 1

Neste caso, o entrevistado tentou usar a noção de distância entre cada par de pontos, mas se confundiu.



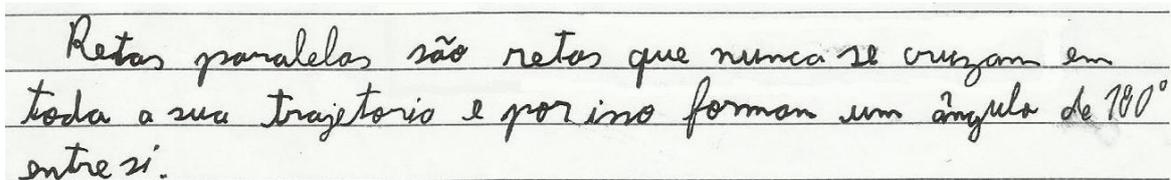
“Retas paralelas são Ruas que não se encontram.” - Ensino Fundamental - Nota 2

Nota-se a diferença entre essa resposta e as outras de alunos do Ensino Superior com a mesma classificação. O aluno do Ensino Fundamental, acima citado, tenta fugir da ideia matemática e responder da forma mais simples possível, muito mais intuitiva. Apesar disso, como a pergunta era sobre retas, essa resposta foi classificada como Nota 2, pois ruas não são retas.



“Retas paralelas são as quais, apesar de serem bastante semelhantes, não se tocam, se cruzam em todo plano cartesiano (sic), pode-se dizer que é a mesma reta, porém com uma constante - número - “a” a multiplicando.” - Ensino Superior - Licenciatura em Física - Nota 2

Neste exemplo, o autor da resposta poderia ter falado simplesmente que são retas que não se tocam. Mas, na tentativa de explicar melhor, o aluno se equivoca. Quando fala da constante, nota-se uma tentativa de estabelecer uma analogia com a translação de retas no plano cartesiano, algo como funções definidas pelas leis $f(x) = x$ e outra $g(x) = x + a$, por exemplo, que seriam retas paralelas. Portanto, a ideia seria de somar uma constante, e não de multiplicar, como ele escreveu.

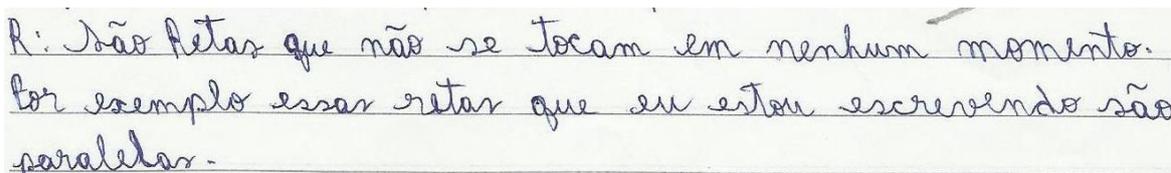


Retas paralelas são retas que nunca se cruzam em toda a sua trajetória e por isso formam um ângulo de 180° entre si.

“Retas paralelas são retas que nunca se cruzam em toda a sua trajetória e por isso formam um ângulo de 180° entre si” - Ensino Superior - Engenharia Ciclo Básico - Nota 2

Novamente, há uma definição coerente: “retas que nunca se cruzam”; porém, depois o aluno inclui a noção de ângulo entre elas. Como duas retas que não são concorrentes formam um ângulo entre si?

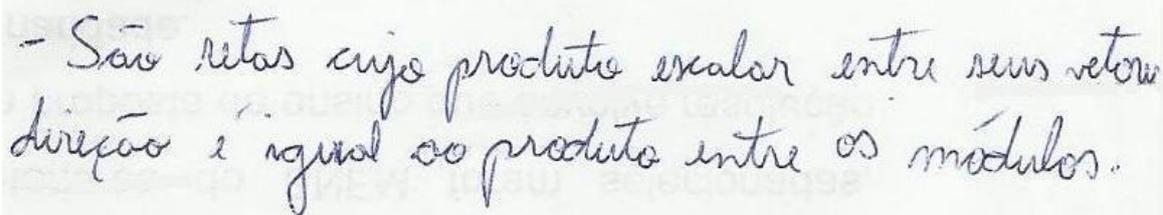
Esse tipo de erro, tentando deixar a resposta complexa e acabando por tropeçar em algum momento, foi o mais encontrado nas respostas classificadas com Nota 2 do Ensino Superior e Ensino Médio.



R: São retas que não se tocam em nenhum momento. Por exemplo essas retas que eu estou escrevendo são paralelas.

São retas que não se tocam em nenhum momento. Por exemplo essas retas que eu estou escrevendo são paralelas.” - Ensino Fundamental - Nota 3

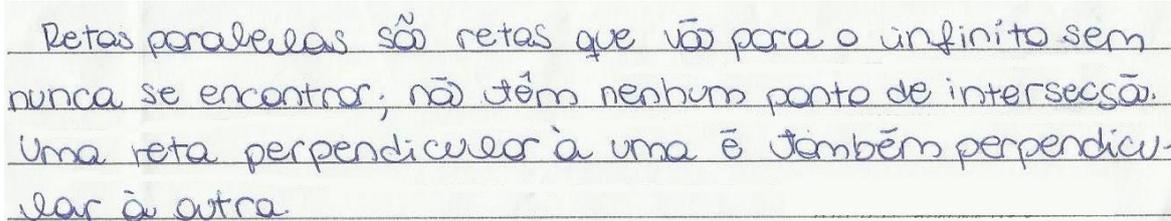
Prosseguindo com os exemplos, agora com Nota 3, percebe-se a notória diferença de algumas respostas, relacionada diretamente à escolaridade. Os alunos do ensino fundamental permanecem dando respostas simples e diretas (como o exemplo acima), buscando concretizar o conceito e novamente tentando não se prender à matemática. No ensino superior, os alunos dão respostas que utilizam noções cada vez mais elaboradas, como mostrado abaixo:



- São retas cujo produto escalar entre seus vetores direção é igual ao produto entre os módulos.

“São retas cujo produto escalar entre seus vetores direção é igual ao produto entre os módulos.” - Ensino Superior - Licenciatura em Física - Nota 3

Esse é o tipo de resposta que requer uma reflexão mais cautelosa para se concluir que, realmente, está certa. Com certeza, esse era o tipo de resposta que nunca pensávamos encontrar nessa pesquisa, já que a pergunta foi tão simples. Mas esse é um ótimo exemplo para dizer que o aluno não foi nem um pouco intuitivo. Talvez ele simplesmente tenha reproduzido algum conceito recentemente apresentado na universidade.



Retas paralelas são retas que vão para o infinito sem nunca se encontrar; não têm nenhum ponto de intersecção. Uma reta perpendicular à uma é também perpendicular à outra

“Retas paralelas são retas que vão para o infinito sem nunca se encontrar; não têm nenhum ponto de intersecção. Uma reta perpendicular à uma é também perpendicular à outra” - Ensino Superior - Engenharia Ciclo Básico - Nota 3

Apesar de correta, percebe-se que a resposta apresenta, sem necessidade, três definições de retas paralelas, como se uma só já não satisfizesse à pergunta, não fosse suficiente.

4. Conclusões

Foi percebido, durante a análise da pesquisa, que a relação entre intuição e lógica na evolução escolar da educação matemática se deu similarmente à relação entre elas na história da evolução da matemática: os mais novos, com suas respostas mais intuitivas, assim como os primeiros matemáticos, preocuparam-se em expor o que pensam da maneira mais simples possível. Em contrapartida, conforme o grau de escolaridade dos entrevistados aumenta, suas respostas tornam-se cada vez mais complexas, recorrendo mais à lógica, como o que ocorreu com o passar do tempo e a necessidade da inclusão da lógica nos trabalhos matemáticos.

No caso da pesquisa, percebeu-se que a interferência da lógica foi acompanhada de uma deterioração da intuição, de forma que, com o avanço escolar, as respostas envolviam elementos mais complexos, mas continham equívocos, ou seja, o logicismo utilizado chega a atrapalhar o aluno. Pode-se concluir que a lógica que é ensinada no decorrer da vida escolar, ao invés de se agregar à intuição, que é tida pelos pequenos, vai, na verdade, tomando o lugar dela na maioria dos alunos. Enquanto os mais novos dizem que retas paralelas são “ruas que não se encontram” ou “coisas que não se encontram”, abstraindo totalmente o conceito matemático e respondendo de maneira simples e intuitiva, os mais velhos e com maior bagagem escolar tentam responder com uma complexidade que não é necessária, utilizando um logicismo além do que é exigido e mal interpretado.

Com isso, as respostas como “ruas que não se encontram” ou “coisas que não se encontram” acabam sendo classificadas como erradas matematicamente por falta da lógica, mesmo sendo respostas intuitivamente corretas, e as respostas com uma determinada lógica acabam sendo classificadas como erradas, pois tropeçam no desenvolvimento por falta da intuição.

Poincaré, com “O Valor da Ciência”, já expunha que tanto a lógica quanto a intuição são necessárias para a matemática e seu aprendizado. Mesmo assim, a pesquisa evidencia que essa integração infelizmente ainda é falha no ensino da Matemática na amostra analisada.

5. Agradecimentos

Agradecemos a colaboração de todos os entrevistados, das pessoas que puderam ajudar aplicando o questionário e das instituições de ensino envolvidas. Também gostaríamos de agradecer a todos do Projeto Fundão e em especial aos professores multiplicadores e estagiários integrantes do nosso grupo de pesquisa. A redação dos resultados quantitativos e qualitativos da pesquisa sobre retas paralelas, aqui apresentada, consta da monografia do Licenciado em Matemática, membro da equipe, Claudio Reis Teixeira, defendida no IM/UFRJ em 18 de fevereiro de 2013. Deste modo, a ele, também, nossos agradecimentos.

6. Referências

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

MIGUEL, A. et al. *História da Matemática e Atividades Didáticas*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

POINCARÉ, Henri. *O Valor da ciência*. Tradução Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

VELOSO, Eduardo. *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.