

## PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS EM FRACTAIS: UM ESTUDO DE CASO NO ENSINO MÉDIO

*Claudia Márcia Ribeiro de Azeredo*  
*Instituto Federal Fluminense – Campus Campos Centro*  
*cmrazeredo@hotmail.com*

*Michelle Dinelli de Souza*  
*Instituto Federal Fluminense – Campus Campos Centro*  
*michelledinellis@yahoo.com.br*

*Silvia Cristina Freitas Batista*  
*Instituto Federal Fluminense – Campus Campos Centro*  
*silviac@iff.edu.br*

*Gilmara Teixeira Barcelos*  
*Instituto Federal Fluminense – Campus Campos Centro*  
*gilmarab@iff.edu.br*

### **Resumo:**

Investigações geométricas podem contribuir para a aprendizagem de Matemática, ao facilitar aspectos essenciais como visualizações, formulação de hipóteses e desenvolvimento do pensamento espacial. Nesse sentido, esse artigo visa descrever um estudo de caso envolvendo progressões geométricas e fractais, no Ensino Médio. Além da relação entre os tópicos mencionados, buscou-se evidenciar que a Geometria Fractal, tema geralmente ministrado em níveis de ensino mais avançados, é viável também para o Ensino Médio. Para tanto, estabeleceu-se uma sequência didática que incluiu aula expositiva e uso de vídeo, material concreto e o simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”. Diante dessa proposta, este artigo inicialmente aborda a Geometria Fractal e o relacionamento desta com as progressões geométricas. A seguir, são caracterizados os recursos utilizados no estudo de caso e descritos os procedimentos metodológicos adotados. Finalizando, são analisados os resultados obtidos. Os mesmos evidenciaram que é viável no Ensino Médio o estudo de fractais, subsidiando o de progressões geométricas.

**Palavras-chave:** Geometria Fractal; Progressões Geométricas; Simulador de fractais

### **1. Introdução**

A Matemática está presente em diversas situações do cotidiano como, por exemplo, no apoio a outras áreas do conhecimento, servindo de instrumento para lidar com diferentes situações ou, mesmo, como forma de desenvolver habilidades de pensamento (BRASIL, 2002).

As tendências curriculares atuais para o ensino de Matemática, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009), convergem ao considerar que as investigações geométricas são fundamentais para auxiliar a compreensão de aspectos essenciais de temas matemáticos e do espaço em que vivemos. Os autores destacam a importância de estudar conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria em situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção de conceitos.

O teórico Jerome Bruner<sup>1</sup>, de acordo com Moreira (1999), destaca o processo da descoberta, por meio da exploração de alternativas, e o currículo em espiral. Os conteúdos a serem estudados precisam ser percebidos pelo aluno em termos de problemas, relações e lacunas que ele deve preencher, a fim de que a aprendizagem seja considerada significativa e relevante. O currículo em espiral significa que o aluno deve ter oportunidade de ver o mesmo tópico mais de uma vez, em diferentes níveis de profundidade e em diferentes modos de representação. Dessa forma, Bruner defende que é possível ensinar qualquer assunto, de maneira adequada, a qualquer aluno, em qualquer estágio de desenvolvimento (MOREIRA, 1999).

Com base na importância das investigações geométricas e na teoria de aprendizagem de Bruner, este artigo visa descrever um estudo de caso, envolvendo progressões geométricas e fractais, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma instituição federal. Além de analisar o papel da Geometria Fractal subsidiando o estudo de Progressões Geométricas (PG), busca-se, também, discutir a viabilidade do estudo dessa geometria, por alunos do Ensino Médio, uma vez que esse tema é, geralmente, ministrado em níveis de ensino mais avançados.

Para tanto, foi estruturada uma sequência didática, que contou com auxílio de vídeo, de material concreto e do simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”<sup>2</sup>. O referido simulador é um objeto de aprendizagem (OA) digital, de uso gratuito. Ressalta-se que a importância das tecnologias digitais no ensino de Matemática, como instrumento facilitador da aprendizagem, tem sido defendida por diversos pesquisadores (SERRES e BASSO, 2009; MARIN e PENTEADO, 2011; GRAVINA e MEIER, 2012). Também, em termos específicos de estudos associando progressões

---

<sup>1</sup> Psicólogo estadunidense, autor de diversos trabalhos na área da Educação.

<sup>2</sup> <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/11959>>.

geométricas e fractais, essas tecnologias têm sido utilizadas (ROMAN, 2004; GONÇALVES, 2007; FARIA, 2012). O próprio desenvolvimento da Geometria Fractal está intimamente relacionado ao uso do computador, uma vez que as imagens surgem a partir de procedimentos recursivos, bastante facilitados pelos recursos computacionais (ALMEIDA, 2006).

Assim, tendo em vista os objetivos propostos, aborda-se, na seção 2, a Geometria Fractal e o relacionamento deste tema com as PG. Na seção 3, são caracterizados os recursos utilizados no estudo de caso. Na seção 4, relata-se a metodologia adotada e, na seção 5, são analisados os resultados obtidos. Finalizando, na seção 6, são tecidas algumas considerações sobre a experiência realizada.

## **2. Geometria Fractal**

Por volta da primeira metade do século XIX começaram a ocorrer questionamentos sobre a Geometria Euclidiana. Foi observado que, por exemplo, os contornos das montanhas, a superfície dos pulmões humanos, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra e diversos fenômenos na natureza não podem ser descritos por essa Geometria. Nesse contexto surgiu a Geometria Fractal, fazendo uso de dimensões fracionárias, como a dimensão 0,5, por exemplo, típica de um objeto que é mais do que um simples ponto com dimensão zero, porém menos do que uma linha com dimensão 1 (OLIVEIRA, 1994).

O estudo dos fractais está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório. Essa ciência trouxe consigo a perspectiva de ver ordem e padrões onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível. Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos. Tentar simplificá-las, empregando formas usuais da Geometria Euclidiana, como círculos, esferas, cones, entre outras, seria completamente inadequado. Os fractais podem fornecer aproximações para essas formas (BARBOSA, 2002).

A Geometria Fractal possui aplicações em diversas áreas do conhecimento humano. Para biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas. Para os médicos, possibilita uma nova visão da anatomia interna do corpo (CFTC, 2010). Porém, é importante mencionar que não basta ter

dimensão fracionária para ser um fractal. É preciso que o objeto seja auto-semelhante: suas partes devem se parecer muito entre si e representar o todo. Outra propriedade de um fractal é ser fruto de um processo iterativo, o que significa, em termos matemáticos, repetir uma fórmula inúmeras vezes. É dessa repetição que surge a imagem (OLIVEIRA,1994).

Benoit Mandelbrot (1924-2010) é considerado o “pai” da Geometria Fractal. Deve-se a esse matemático a denominação “fractais”, baseada no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar.

Dois franceses Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978) também merecem ser lembrados pelos seus trabalhos, ainda que em pesquisas não conjuntas. Seus resultados forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot (Figura 1) e para o Conjunto de Julia (Figura 2).

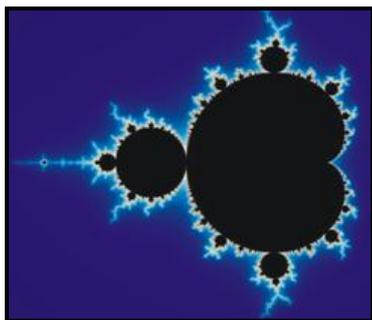


Figura 1: Conjunto de Mandelbrot  
Fonte: CFTC, 2010.

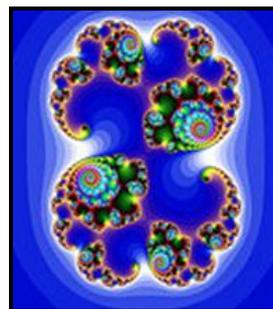


Figura 2: Conjunto de Julia  
Fonte: CFTC, 2010.

Outros exemplos de fractais: i) Conjunto de Cantor - resultante da remoção sucessiva do terço central de um segmento de reta (Figura 3); ii) Triângulo de Sierpinski - conjunto resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro, quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos congruentes (Figura 4); iii) Curva de Koch - resultante da divisão sucessiva de um segmento em três partes congruentes e posterior substituição do segmento intermediário por um triângulo equilátero sem a base (que seria o segmento intermediário) (Figura 5).

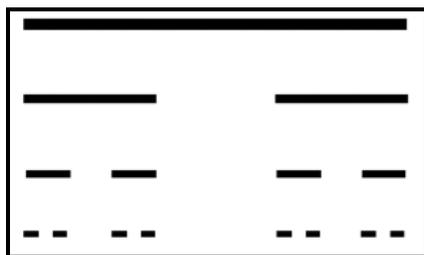


Figura 3: Conjunto de Cantor  
Fonte: SALLUM, 2005.

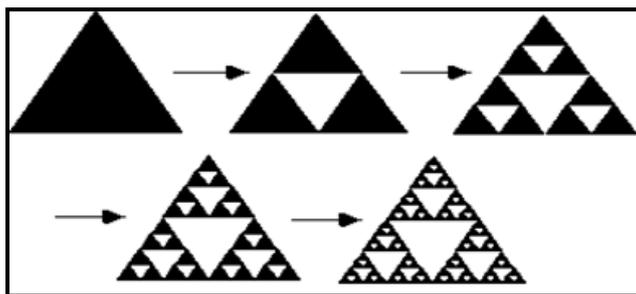


Figura 4: Triângulo de Sierpinski  
Fonte: SALLUM, 2005.

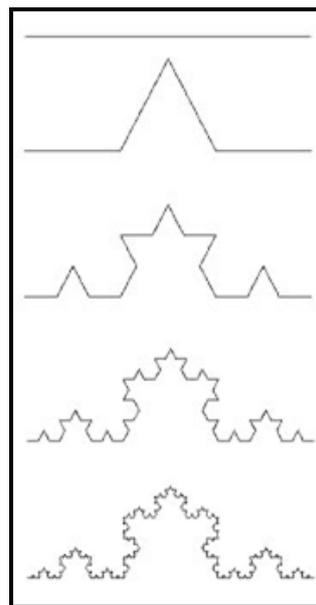


Figura 5: Curva de Koch  
Fonte: SALLUM, 2005.

## 2.1 Geometria Fractal e Progressões Geométricas

Uma progressão geométrica é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão ( $q$ ) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma seqüência na qual na taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma (DANTE, 2003).

Milani (2011) afirma que o ensino de progressões, tanto geométricas quanto aritméticas, no Ensino Médio, é feito, em geral, de forma pouco inovadora, por meio de manipulação de fórmulas e com exercícios tradicionais de sala de aula. Nesse sentido, o autor defende o trabalho com a generalização de padrões como fator motivador, pois, além de despertar a curiosidade dos alunos, apela intensamente para a estética e criatividade, gerando entusiasmo do descobrimento de regularidades. Milani (2011) ressalta, ainda, que a generalização propicia momentos para o aluno argumentar, levantar hipóteses, conjecturar, testar e validar suas conjecturas.

Nesse sentido, como defende Sallun (2005), a introdução de fractais no Ensino Médio pode trazer contribuições para o estudo de PG. O estudo de fractais, segundo essa autora, além de satisfazer a curiosidade dos alunos que já tiveram algum conhecimento dos mesmos, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas

gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente e introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite.

Assim, diversas pesquisas têm sido promovidas investigando aspectos da relação entre Geometria Fractal e PG (ROMAN, 2004; GONÇALVES, 2007; PALLES, 2007; FARIA, 2012). A pesquisa de Roman (2004) visou à construção de conceitos matemáticos relacionados à PG utilizando a Geometria Fractal, a partir dos recursos computacionais de um *software* de Geometria Dinâmica. Além de Roman (2004), também Gonçalves (2007), Pallesi (2007) e Faria (2012) utilizaram programas de Geometria Dinâmica.

Gonçalves (2007), em sua pesquisa, investigou a utilização dos fractais como fator motivador na percepção da auto-semelhança, assim como, analisou a importância da auto-semelhança para o processo de generalização das fórmulas de PG para alunos do Ensino Médio. A análise dos resultados da pesquisa, segundo a autora, mostrou que a construção, a manipulação e a observação levaram à percepção da auto-semelhança e, esta, por sua vez, facilitou o processo de generalização dos elementos matemáticos que compõem o estudo de PG. Pallesi (2007) defende a introdução do estudo dos fractais aliados ao estudo de progressões geométricas e aritméticas no Ensino Médio, como forma de motivação. Segundo a autora, o estudo de fractais pode contribuir para tornar as aulas sobre progressões mais dinâmicas e atrativas. Faria (2012) investigou as contribuições da utilização de padrões fractais para o processo de generalização do conhecimento matemático. Os resultados obtidos indicaram que o trabalho com tais padrões contribuiu para o processo de generalização de conteúdos matemáticos, dentre os quais PG, por permitir trabalhar com propriedades, como auto-semelhança e complexidade infinita.

Embora todas as pesquisas descritas abordem o mesmo tema, com objetivos, de certa forma, semelhantes ao proposto neste artigo, o diferencial do mesmo é a sequência didática proposta que além do uso de vídeo e material concreto, inclui o simulador “Progressões Geométricas em Fractais”, que não é um *software* para Geometria Dinâmica.

### **3. Recursos Utilizados no Estudo de Caso**

Nesta seção são caracterizados os recursos utilizados no estudo de caso.

#### **3.1 Vídeo**

Com o intuito de despertar a atenção dos alunos para o tema, foi exibido o vídeo “A ordem na desordem”<sup>3</sup>, episódio 5 do programa “O Mundo da Matemática”, que apresenta situações que podem desencadear discussões sobre as características (auto-semelhança, complexidade infinita: iterações) e sobre o cálculo de área e de perímetro de um fractal.

O uso de vídeos, segundo Rocato (2009), pode trazer contribuições para a aprendizagem, ao possibilitar a visualização de uma matemática dinâmica, contextualizada, colaborando para um ambiente de aprendizagem mais ativo. De acordo com o autor, o professor pode, por meio do uso vídeos, promover debates e estabelecer relações com temas de outras disciplinas, ampliando e potencializando as oportunidades de construção do conhecimento. Silva (2011), também destaca a importância do uso de vídeo na Matemática e, em seu estudo, identificou que, para os professores de matemática, sujeitos da pesquisa, o vídeo é uma ferramenta capaz de motivar, tornar o ambiente da aula mais participativo e um espaço de ensino-aprendizagem diferenciado da abordagem tradicional.

### 3.2 Tetraedro de Sierpinski

Foram construídos três Tetraedros de Sierpinski (Figura 6), em diferentes níveis de iteração, com material emborrachado, para que os alunos pudessem ter uma visão concreta do fractal. Para construí-lo, utiliza-se o mesmo processo do Triângulo de Sierpinski.

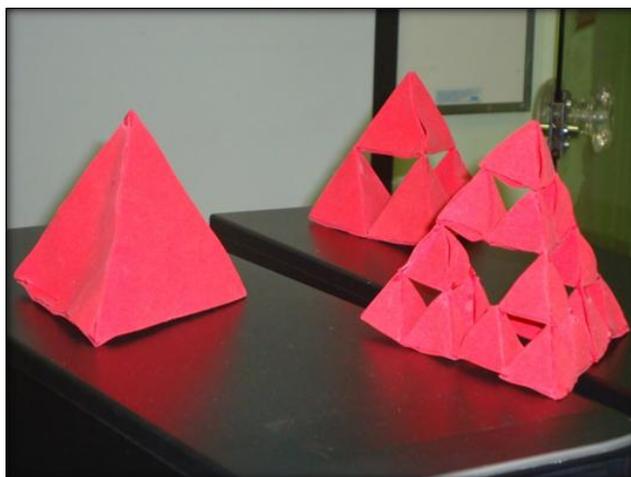


Figura 6: Tetraedros de Sierpinski construídos para o estudo de caso

### 3.3 Simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”

---

<sup>3</sup> < [http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/episodios/ep\\_05.html](http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/episodios/ep_05.html) >

Segundo Ponte, Oliveira e Varandas (2003), as tecnologias de informação e comunicação podem contribuir para a aprendizagem de Matemática, à medida que reforçam o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, assim como, relativizam a importância do cálculo e da manipulação simbólica. Nesse sentido, é importante que as atividades pedagógicas sejam planejadas adequadamente, de forma a tirar proveito do potencial dessas tecnologias. Como defendido por Kynigos et al (2009), a integração de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática implica novos tipos de atividade de aprendizagem, com foco na geração de significados, na resolução de problemas e no uso de representações na sala de aula .

Considerando-se um recurso digital em particular, caracteriza-se, a seguir, o simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”, que é considerado um OA. Segundo Macêdo et al. (2007), os OA são recursos que visam apoiar a construção do conhecimento. Os mesmos podem ser criados em qualquer mídia ou formato e podem ser simples, como uma animação ou uma apresentação de *slides*, ou complexos, como uma simulação (MACÊDO et al., 2007). Tais recursos podem ser importantes para a aprendizagem de Matemática, contribuindo, por exemplo, para investigações geométricas.

O simulador (Figuras 7 e 8) se inicia com algumas telas de introdução intuitiva aos fractais, tomando por base a Geometria Euclidiana até chegar às iterações e às medidas de perímetro das figuras fractais. Totalizando, são 15 telas de introdução e seis telas de exercícios. O simulador foi desenvolvido pela equipe de Pesquisa e Desenvolvimento da Universidade Federal do Paraná (UFPR), visando o ensino de PG por meio de fractais. Esse OA informa quando o usuário acerta, colocando as bordas do retângulo em verde e em vermelho quando ele erra e, assim, o mesmo fica impedido de ir para o passo seguinte. Além disso, conta com uma calculadora virtual personalizada que permite ao usuário fazer a entrada de dados.

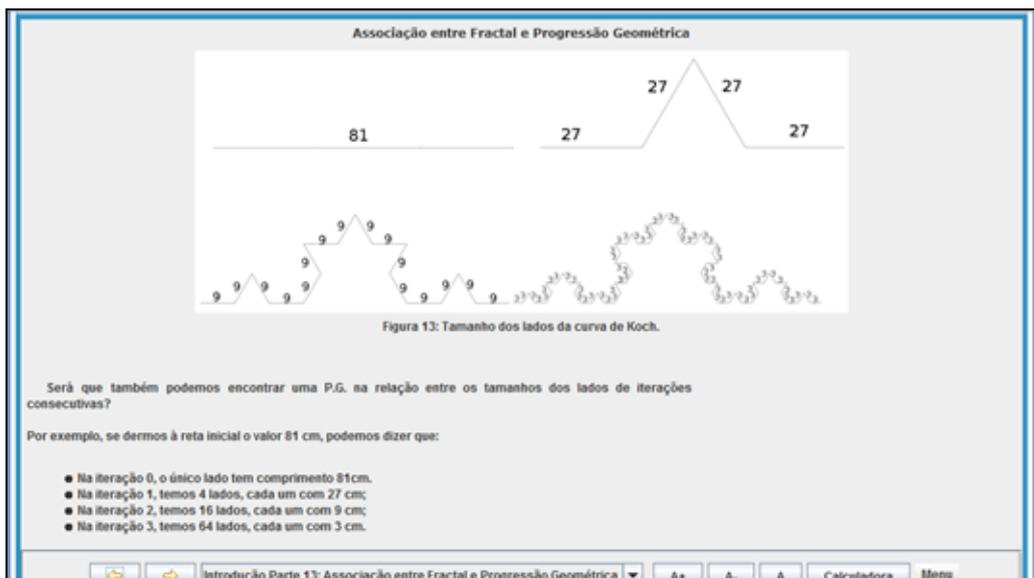


Figura 7: Tela de introdução – Simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”

Iteração	Fractal	Lado
2		$\frac{3}{2^2}$
3		$\frac{3}{2^3}$
4		$\frac{3}{2^4}$
n	figura limite	$\frac{3}{2^n}$

Figura 8: Tela do exercício 1 – Simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”

#### 4. Procedimentos Metodológicos

A pesquisa realizada teve como objetivo geral analisar o papel da Geometria Fractal subsidiando o estudo de PG, no Ensino Médio. Buscou-se, também, discutir a viabilidade do estudo dessa Geometria por alunos do Ensino Médio, uma vez que esse tema é, geralmente, ministrado em cursos de níveis de ensino mais avançados.

Para desenvolvimento da pesquisa foi selecionada uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma instituição federal<sup>4</sup>, em fevereiro/março de 2013. A escolha dessa turma foi

<sup>4</sup> Instituição a qual todas as autoras estão vinculadas.

decorrente de dois motivos: i) o tema PG já ter sido estudado pelos alunos; ii) a possibilidade da professora ceder horários de aula para que a experimentação pudesse ser realizada pelas pesquisadoras.

A pesquisa realizada foi de cunho qualitativo, por meio de estudo de caso. A opção pelo estudo de caso fundamenta-se no fato de que este método de pesquisa permite a pesquisa em ambiente natural como fonte direta de dados, o pesquisador como seu principal instrumento e pelo fato de preocupar-se mais com o processo do que com o produto final da pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1998). Ponte (2006) complementa afirmando que na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc. Essa afirmação reforça a adequação do estudo de caso para a pesquisa aqui descrita.

Foram realizados três encontros, todos no horário regular de aula dos alunos, e os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: listas de exercícios de pré e pós-teste, observação e questionário.

No primeiro encontro, realizado em 28/02/2013, os alunos apenas responderam a um pré-teste que teve por objetivo diagnosticar os conhecimentos que os alunos já possuíam sobre o tema progressões geométricas e sobre requisitos, tais como: classificação de triângulos quanto à medida dos lados, Teorema de Pitágoras e área de triângulos. Esse encontro teve cerca de 30 minutos de duração.

No segundo encontro, promovido em 06/03/2013, foi exibido o vídeo “A ordem na desordem”. Em seguida, foi realizada uma aula expositiva, utilizando-se uma apresentação de *slides* sobre fractais, fazendo menção às cenas do vídeo. Além disso, foram mostrados os Tetraedros de Sierpinski, com o objetivo de mostrar características de um fractal, de forma concreta.

Partindo de exemplos de fractais, as pesquisadoras levantaram hipóteses que relacionavam as iterações, perímetros e áreas dos mesmos com uma PG, para que os alunos investigassem e tirassem conclusões. Também foram propostos exercícios sobre PG em

fractais, como forma dos alunos aprimorarem o que aprenderam. Esse encontro teve duração de duas horas/aula<sup>5</sup>.

No terceiro encontro, ocorrido em 07/03/13, os alunos foram levados a um laboratório de informática, para aplicarem os conhecimentos adquiridos no encontro anterior, dessa vez, utilizando simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”.

Ao final das atividades com o simulador, foi proposto um pós-teste contendo exercícios que visavam verificar a compreensão dos alunos em relação à associação entre os temas PG e Geometria Fractal. Ainda nesse encontro, os alunos responderam a um questionário que buscou levantar dados sobre a percepção dos mesmos em relação às atividades desenvolvidas e sobre os recursos utilizados.

## 5. Resultados e Discussão

O estudo de caso promovido teve seguintes objetivos: i) verificar a Teoria de Bruner, sobre a viabilidade de se ministrar um conteúdo mais avançado, adaptando-o aos requisitos que a turma possui; ii) permitir ao aluno descobrir as propriedades e o comportamentos de PG em cada fractal analisado; iii) analisar as tecnologias digitais (vídeo, *slides* e o simulador de fractais) como ferramentas para construção de conhecimento.

A turma considerada possuía, no total, 23 alunos. No entanto, no primeiro encontro estavam presentes apenas 15 alunos e no terceiro, 22. Somente no segundo encontro, todos os 23 alunos estavam presentes.

Durante o primeiro encontro foi aplicado o pré-teste. Por meio da análise dos resultados do mesmo, foi possível verificar que a maioria dos alunos participantes apresentava conhecimentos sobre PG e sobre os requisitos considerados.

No segundo encontro, os alunos participaram ativamente da aula, questionando e respondendo aos exercícios propostos com seriedade. Após a apresentação do vídeo e dos *slides* sobre fractais, os Tetraedros de Sierpinski elaborados em material emborrachado, foram mostrados aos alunos, que demonstraram muito interesse pelos mesmos.

---

<sup>5</sup> Cada hora/aula tem 50 minutos.

No terceiro encontro, antes de iniciar o trabalho com o simulador de fractais, foi feita a correção de alguns exercícios propostos no encontro anterior. Os alunos ficaram muito interessados pelo simulador e foi preciso insistir para que parassem de utilizá-lo e respondessem ao pós-teste e ao questionário final.

A análise geral dos três encontros permitiu observar a importância de um planejamento didático-pedagógico que considere o desenvolvimento intelectual do aluno. Defendendo essa visão, Bruner afirma que “há uma versão de cada conhecimento ou técnica apropriada para ensinar a cada idade, por mais introdutória que seja” (BRUNER, 1969, p. 51 apud MOREIRA, 1999, p. 90).

No pós-teste (respondido pelos 22 alunos presentes), foram apresentadas duas questões semelhantes aos exercícios respondidos no simulador de fractais. A tabela 1 mostra o número de acertos dos alunos em cada uma dessas questões. A questão 1 solicitava o preenchimento de uma tabela com o tamanho do lado do menor quadrado, em cada uma das diferentes iterações 0,1,2,3,4 e n do Tapete de Sierpinski. Na questão 2, os alunos deveriam utilizar o valor do lado do menor quadrado, identificado na questão 1, e calcular a área dos quadrados pretos, em cada iteração do Tapete de Sierpinski.

Tabela 1: Resultado do pós-teste

Questão	1	2
Acertos na questão (n°)	22	17

Os números da tabela 1 sinaliza que os objetivos foram alcançados, pois todos os alunos acertaram a questão 1 e 17 alunos (aproximadamente 77%) acertaram a questão 2, mesmo com um espaço de tempo curto para a realização das atividades.

Após a realização do pós-teste, os 22 estudantes responderam ao questionário final. Traçando-se um perfil destes, menciona-se que 13 eram do sexo masculino e que a média de idade do grupo era de, aproximadamente, 17 anos. Cinco estudantes afirmaram já conhecerem fractais antes do estudo de caso. Três deles por meio de cursos extracurriculares, um por meio de leituras em *sites* e outro por meio de vídeo/filmes.

As tabelas seguintes apresentam dados também levantados por meio do questionário. São quatro afirmativas, diante das quais cada aluno deveria se posicionar em uma das opções dadas: Concordo Plenamente, Concordo, Não Concordo Nem Discordo, Discordo, Discordo Plenamente.

A primeira afirmativa proposta foi “*Estudos sobre fractais, semelhantes ao proposto, são viáveis para o Ensino Médio*”. A tabela 2 apresenta os dados levantados.

Tabela 2: Viabilidade do estudo de fractais, semelhante ao proposto, no Ensino Médio.

Opções	Concordo plenamente	Concordo	Não concordo nem discordo	Discordo	Discordo plenamente
Alunos (n°)	4	9	8	1	0

Os números da tabela 2 mostram que a maioria dos alunos achou viável o estudo de fractais no Ensino Médio, apesar de oito alunos terem se mantido neutros e um ter discordado do proposto. Atribui-se a posição neutra desses alunos ao pouco tempo destinado ao estudo do tema (4 horas/aula), que não permitiu uma reflexão maior.

Com relação à afirmativa “*Identificar a relação entre fractais e Progressões Geométricas foi fácil*”, a tabela 3 mostra os resultados obtidos.

Tabela 3: Facilidade de identificação da relação entre fractais e PG

Opções	Concordo plenamente	Concordo	Não concordo nem discordo	Discordo	Discordo plenamente
Alunos (n°)	8	6	5	2	0

Os dados da tabela 3 sinaliza que a maioria da turma conseguiu identificar a relação entre fractais e PG, ou seja, 14 dos 22 alunos responderam “Concordo plenamente” ou “Concordo”. Os resultados obtidos foram considerados bastante positivos, diante das dificuldades, em geral, apresentadas pelos alunos em relação a temas matemáticos.

Tomando-se por base a observação dos comentários e atitudes durante os encontros e os dados coletados no questionário, considera-se que os alunos reconheceram as propriedades dos fractais, bem como o comportamento da PG nas iterações dos fractais.

Quanto à afirmativa “*O material utilizado (vídeo, slides, Simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”)* contribuiu para a compreensão do conteúdo”, a tabela 4 mostra os resultados obtidos.

Tabela 4: Contribuição do material utilizado

Opções	Concordo plenamente	Concordo	Não concordo nem discordo	Discordo	Discordo plenamente
Alunos (n°)	15	6	1	0	0

Os números da tabela 4 revelam que as tecnologias digitais utilizadas, na opinião da maioria dos alunos, contribuíram para a compreensão do conteúdo. Vale observar que, dos 22 alunos que responderam ao questionário, 21 responderam “Concordo plenamente” ou

“Concordo”. Esses dados são coerentes com as manifestações dos alunos, observadas em sala de aula, que indicavam uma boa receptividade aos recursos utilizados.

Durante os encontros pode-se observar que os recursos utilizados contribuíram para despertar o interesse dos alunos pelo assunto, o que, provavelmente, seria mais difícil de ser alcançado sem o auxílio desses recursos. Resultado análogo foi obtido por Pallesi (2007), como mencionado na seção 2.1. O vídeo introduziu o tema de maneira contextualizada e motivadora, como defendido por Silva (2011). O conteúdo dos *slides* facilitou a compreensão da relação da Geometria de Fractais com PG. O Simulador de fractais permitiu que os alunos aplicassem o conteúdo abordado nos dois primeiros encontros, de modo interativo. Como afirma Kynigos et al. (2009), tecnologias digitais possibilitam novos tipos de atividade.

A tabela 5 mostra os dados relativos à afirmativa “*Utilizar o simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais” foi simples*”.

Tabela 5: Simplicidade de utilização do Simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”

Opções	Concordo plenamente	Concordo	Não concordo nem discordo	Discordo	Discordo plenamente
Alunos (n°)	7	8	6	1	0

Os resultados apresentados na tabela 5 mostram que as opções “Concordo plenamente” e “Concordo” somam 15 alunos, num total de 22, e sinalizam que o Simulador de Fractais foi de fácil utilização para a maioria. Apenas um aluno discordou da afirmativa. Ressalta-se que o simulador apresenta, ao usuário, dicas dependentes de contexto e segue uma proposta de trabalho de complexidade crescente, começando por atividades mais simples e aumentando o grau de dificuldade gradativamente. Esses são fatores que podem contribuir para facilitar a utilização do mesmo.

De maneira geral, os resultados obtidos foram considerados positivos, permitindo observar a importância do estudo de fractais subsidiando o estudo de PG no Ensino Médio. Além disso, os dados sinalizaram a viabilidade de se ministrar um conteúdo mais avançado, como fractais, adaptando-o aos requisitos que a turma possui, como defendido por Bruner. Também foi possível observar o papel das tecnologias digitais utilizadas como ferramentas para construção de conhecimento.

## 6. Considerações Finais

Tomado por base a análise dos dados, exposta na seção anterior, entende-se que o resultado desse estudo de caso foi positivo, visto que sinaliza que os objetivos foram alcançados. No entanto, ressalta-se que um tempo maior para a execução das atividades poderia contribuir para resultados mais significativos. No terceiro encontro, principalmente, foram muitas as atividades realizadas em dois horários de aula. Maior disponibilidade de tempo poderia colaborar para que as atividades fossem feitas com maior reflexão. Assim, é importante que isso seja considerado em propostas de estudos semelhantes ao relatado.

Além disso, destaca-se o aspecto motivador que as tecnologias digitais representam para os alunos. Essas tecnologias já fazem parte do cotidiano dos mesmos, fora da escola. Trazê-las para o contexto de sala de aula pode trazer grandes contribuições, desde que as mesmas sejam utilizadas com critério e planejamento estratégico.

Foi possível observar que, por meio do apelo lúdico dos fractais, os alunos puderam investigar e explorar um conteúdo desconhecido pela maioria, descobrindo como trabalhar com iterações, generalização de fórmulas, cálculo de área e perímetro de figuras de complexidade crescente e a aplicação de PG.

Finalizando, menciona-se que a pesquisa promovida foi bastante enriquecedora também para as pesquisadoras, pois possibilitou ampliar a visão educacional das mesmas sobre a construção de conhecimentos.

## 7. Referências

- ALMEIDA, A. A. O. *Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula*. Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica – PUC, 2006.
- BARBOSA, R. M. *Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. *Qualitative Research for Education: an introduction to theories and methods*. Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1998.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.
- CFTC - CENTRO DE FÍSICA TEÓRICA E COMPUTACIONAL. *Fractais e a Geometria da Natureza*. In: Prisma: A luz da Física. 2010. Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico9.php>> Acesso em: 20 mar. 2013.
- DANTE, L. R. *Matemática contexto & aplicações*. São Paulo: Editora Ática, 2003.

FARIA, R. W. S. *Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos*. Dissertação de Mestrado, 2012.

GONÇALVES, A. G. N. *Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais*. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. PUC. Dissertação de Mestrado, 2007.

GRAVINA, M. A.; MEIER, M. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 9583, 2012.

KYNIGOS, C.; PHILIPPOU, G.; POTARI, D.; SAKONIDIS, H. *Research in mathematics education in Greece and Cyprus*. 2009. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION., 33., *Proceedings ...*, Thessaloniki, Greece, 2009. p. 303-324.

MACÊDO, L. N. de; CASTRO FILHO, J. A. de; MACÊDO, A. A. M.; SIQUEIRA, D. M. B.; OLIVEIRA, E. M. de; SALES, G. L.; FREIRE, R. S. *Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem*. In: PRATA, C. L.; NASCIMENTO, A. C. A de (Org.). *Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico*. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 17-26.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, p. 509-526, 2011.

MILANI, W. N. *A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. 2011.

MOREIRA, M. A. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 1999.

OLIVEIRA, L. H. A Matemática do Delírio. *Revista Superinteressante*. Out. 1994. ed. 85, p. 22-27. Disponível em: <<http://www.fractarte.com.br/artigos/superinteressante.php>>. Acesso em: 10 jan. 2013.

PALLESI, D. M. *Motivação do Estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas Através da Geometria Fractal*. Monografia de Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná. 2007.

PONTE, J. P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema*, n. 25, ano 19. 2006. p.105-132.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. M. *O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional*. J. P. da Ponte: Artigos e Trabalhos em Português, 2003. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos\\_pt.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm)>. Acesso em: 15 jan. 2013.

ROCATO, P. S. *As concepções dos professores sobre o uso de vídeos como potencializadores do processo de ensino e aprendizagem*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). São Paulo, Universidade Cruzeiro do Sul, 2009. 176 f.

ROMAN, T. C. *A Geometria Fractal e o software cabri-géomètre II no estudo de Progressão Geométrica*. 2004. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma– Santa Catarina, 2004. Disponível em: <<http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000026/00002638.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2013.

SALLUM, E. M. *Fractais no Ensino Médio*. Revista do professor de Matemática, v. 57, 2005.

SERRES, F. F.; BASSO, M. V. A. *Diários virtuais – uma ferramenta de comunicação social para a autoria e aprendizagem de matemática*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO (SBIE), 20, 2009, Florianópolis, SC. *Anais...* SBC, Florianópolis, SC, 2009. 10p.

SILVA, A. M. *O vídeo como recurso didático no ensino de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Goiânia, Universidade Federal de Goiás, 2011. 196f.