

PRÁTICAS ALGÉBRICAS NO CONTEXTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR HISTÓRICO-CULTURAL.

Fabian Posada-Balvin¹
UNESP/Campus Rio Claro/SP
fapoba@rc.unesp.br

RESUMO

Neste artigo apresentam-se algumas análises preliminares do projeto de pesquisa em andamento, em que se propõe estudar as práticas algébricas constituídas por um grupo de estudantes do primeiro ano de biologia da UNESP sede Rio Claro, ao realizarem atividade de modelagem matemática entendida como uma perspectiva pedagógica. É uma pesquisa de cunho qualitativo, cujos dados são produzidos e analisados sob uma perspectiva histórico-cultural do conhecimento, focando a atenção principalmente em três aspectos: os artefatos culturais físicos e simbólicos; as condições de legitimação das ações desenvolvidas; e as relações intersubjetivas dos participantes. Assim, é considerado que os seres humanos constituem e reorganizam o pensamento em uma relação dialética com as mídias e que as atividades das pessoas se materializam num conjunto de práticas sociais desenvolvidas em contextos histórico-culturais.

Palavras-chave: Álgebra escolar, teoria da atividade, prática sociais.

1. Introdução

São várias as produções que fazem referência à relação da modelagem com os conceitos e procedimentos algébricos (Kieran, N. *et al.*, 1996; Stacey, Chick *et al.*, 2004; Balvin, Zapata *et al.*, 2006; Cai e Knuth, 2011). Segundo Kieran (2004), a álgebra escolar pode ser usada como uma ferramenta para modelar, estudar variações, analisar relações e construir justificativas, provas e predições. No entanto, Stacey e Chick (2004) consideram possível o caminho contrário, ou seja, pensar a modelagem como uma ferramenta para aprender álgebra na escola. Para esses autores a escolha de um caminho ou outro depende do domínio de interesse. Já para autores como Godino (2012) fica claro que as fronteiras entre a álgebra e a modelagem não são claras.

¹ Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”/ GPIMEM/PAEDEX-AUIP. Orientador: Marcelo de Carvalho Borba.

Segundo Blum e Niss (1991) os termos *modelagem* e *aplicações* têm sido usados como um grande contexto para denotar todas as atividades que ligam a matemática com as ciências naturais, sociais e a vida cotidiana. Esses mesmos autores argumentam que muitas propostas desenvolvidas no contexto escolar estão baseadas nessa perspectiva de modelagem, cujas análises cognitivas relacionadas com a aprendizagem da matemática consideram que os procedimentos desenvolvidos pelos matemáticos aplicados devem ser similares aos dos alunos. Para Borba e Villareal (2005) os propósitos da modelagem no contexto da educação matemática devem superar essas expectativas e propõem a perspectiva denominada por eles de pedagógica.

Pelas características da perspectiva pedagógica e as complexidades dos contextos educativos, no qual circulam interesses políticos e sociais, tanto individuais como coletivos, é importante investigar as inter-relações da modelagem com o conhecimento e a aprendizagem da álgebra que se constitui ligado a ela. No estudo dessas relações enquadram-se os interesses desta pesquisa.

O estudo está usando a teoria da atividade como metodologia de produção e análise dos dados. Segundo essa teoria, o desenvolvimento do conhecimento e da aprendizagem se descreve e analisa na participação das pessoas nas ações práticas no mundo social e culturalmente constituído. A atividade situada concebe assim, que o conhecimento e as práticas das pessoas estão em permanente mudança, e é nessas mudanças onde se faz sentido analisar as características do conhecimento produzido e da aprendizagem dos conceitos. (Lave, 1988; Chaiklin e Lave, 2001; Radford, 2008; Winbourne, 2008; Roth e Radford, 2011).

Embasado nessa perspectiva histórico-cultural, serão analisadas as práticas algébricas que um grupo de alunos constitui quando desenvolvem a atividade de modelagem matemática assumida como uma perspectiva pedagógica. Desse modo a pergunta orientadora da pesquisa é: *quais práticas algébricas constituem os alunos de Biologia quando realizam atividade de modelagem matemática no contexto de um curso de matemática aplicada?*

O propósito desse artigo é apresentar algumas análises preliminares baseado numa prova piloto realizada no segundo semestre de 2012, com o objetivo de oferecer luzes e preencher possíveis vazios na produção dos dados definitivos que estão sendo coletados neste primeiro semestre de 2013. Os dados que vão ser apresentados aqui foram produzidos enquanto um grupo de alunos de primeiro ano de biologia cursava a disciplina

matemática aplicada, ministrada por meu orientador. Como parte da ementa da disciplina os alunos são convidados a escolher um tema de interesse e desenvolver um projeto relacionado com ele. O processo de desenvolvimento desses projetos constituiu a principal fonte, dos quais serão apresentados dois exemplos de análise preliminar. Assim, num primeiro momento do artigo será exposta a pergunta e o objetivo da pesquisa, seguido da metodologia para a análise e finalmente as análises dos exemplos.

2. Pergunta e objetivo de pesquisa.

A pedagogia como ciência da educação pode ser entendida como um contexto social pelo qual se dá a produção e reprodução da cultura constituindo-se em um espaço para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores e do pensamento teórico dos indivíduos. Assim, qualquer perspectiva pedagógica deveria, pelo menos, oferecer oportunidades às pessoas de responder suas próprias inquietações e construir suas próprias perguntas, não só de maneira empírica.

Ressonante com essa ideia, Borba e Villareal (2005) consideram que pensar pedagogicamente a modelagem matemática significa dar oportunidade aos alunos de escolher os problemas que serão investigados na sala de aula. Desse modo eles adquirem um papel ativo no desenvolvimento do currículo, passando de simples receptores e desenvolvedores de tarefas designadas por outras pessoas – geralmente pelo professor – a propositores de conteúdos e procedimentos na sala de aula.

Sob essa perspectiva a modelagem matemática pode ser entendida como uma atividade que coloca o estudante principalmente em três tipos ações: 1- escolher um tema de interesse; 2- propor pelo menos um problema ou pergunta relacionada como o tópico escolhido e 3- construir possíveis soluções para o(s) problema(s) e/ou resposta(s) à(s) pergunta(s) propostas. Essas três ações, por estar localizadas em um contexto escolar, formam parte de uma atividade particular relacionada com outra maior, denominada atividade de estudo. Assim, algumas das ações desenvolvidas pelos estudantes durante a modelagem, estão condicionadas pelos motivos, objetos e ações da atividade de estudo.

Um dos motivos convergentes da atividade de estudo e da modelagem matemática, como perspectiva pedagógica, é oferecer a possibilidade de desenvolver o pensamento teórico dos alunos. O pensamento teórico tem como principal característica a formação de conceitos com diferentes graus de generalidade e a relação com objetos, mediada por outros conceitos. O pensamento teórico diferencia-se do pensamento empírico, na medida

em que este último está baseado na experiência direta com o mundo circundante, enquanto o pensamento teórico é abstrato, coletivo, institucional e acumulado histórica e culturalmente, (Junior, 1980; Davidov, 1988).

Segundo alguns autores, a criação de uma linguagem matemática formal foi decisiva para o desenvolvimento das ciências naturais e sociais, colocando a álgebra como um dos principais resultados do processo de conceptualização das ciências. (Junior, 1980; Davis e Hersh, 1988). Nesse sentido, a álgebra pode ser entendida como uma forma teórica de pensar as ciências que surge como produto de uma relação dialética entre a formalidade conceitual própria da matemática e a crescente necessidade de compreender as ciências naturais. Desse modo, estudar as práticas algébricas em um processo de modelagem significa investigar parte das características do pensamento teórico, que nesse processo pode ser desenvolvido.

Assim, o interesse dessa pesquisa está localizado nas inter-relações das três ações, anteriormente mencionadas, relacionadas com a atividade de modelagem matemática enquanto esse processo é desenvolvido por um grupo de alunos de Biologia de primeiro ano de faculdade, tendo como objetivo estudar as práticas algébricas constituídas durante o processo. Com isso, supõe-se possível compreender as formas e níveis de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos. Assim, a pergunta que orienta essa pesquisa pode ser resumida em: *quais práticas algébricas constituem os alunos de Biologia quando realizam atividade de modelagem matemática no contexto de um curso de matemática aplicada?*

3. Metodologia e procedimentos de análises.

De acordo com as características da perspectiva pedagógica da Modelagem Matemática tem-se que seu desenvolvimento em sala de aula gera um conjunto de conflitos, pois a escola como um todo, e a sala de aula de matemática, em particular, são espaços impregnados de interesses sociais e políticos. É um lugar no qual se produz, reproduz e transforma a sociedade e sua cultura. Mas, ao mesmo tempo, a escola e a sociedade não são caixas nas quais professores e alunos se moldam, é através de suas ações, no contexto localizado materialmente, que eles constituem ativamente a escola.

Assim, a sociedade, a escola e a sala de aula de matemática ainda tendo seus interesses e necessidades particulares, coexistem em uma relação dialética das partes com o todo. Em outras palavras, as ações mediadas do professor e dos alunos na sala de aula, além de constituir as particularidades dessa sala, são orientadas e estão condicionadas pelas

relações com outros níveis sociais. Desse modo, a sala de aula de matemática é um espaço complexo no qual se vivem essas tensões sociais e individuais. Uma delas é a aprendizagem da matemática e o propósito dessa aprendizagem.

Os participantes da pesquisa são alunos de uma turma de primeiro ano de Biologia, quem cursaram uma disciplina de Matemática Aplicada. Nesse contexto os alunos são convidados a desenvolver um projeto de modelagem matemática, relacionado com alguma temática escolhida por eles, de acordo com seus interesses. A figura 1 representa uma forma de entender o lugar da atividade modelagem como proposta pedagógica: a escolha e o desenvolvimento dessa atividade estão condicionados pelos outros níveis sociais no qual estão inscritas suas ações.



Figura 1: o lugar da atividade modelagem

Apoiado nos pressupostos da teoria histórico-cultural, em especial da teoria da atividade e a teoria da objetivação (Leontiev, 1978; Roth e Radford, 2011), é investigado como nas relações intersubjetivas entre professor e alunos, mediados por instrumentos culturais (materiais e simbólicos) e por interesses e motivos (individuais e coletivos), os alunos constituem práticas algébricas como uma das práticas sociais situadas no contexto da atividade modelagem e que dão indícios das formas e os níveis de desenvolvimento de seu pensamento teórico.

Segundo a Teoria da Atividade, a unidade central de análise no desenvolvimento psicológico e cognitivo das pessoas é a atividade, entendida esta como um processo em um sistema de relações sociais, que contribui com a satisfação das necessidades coletivas teorizadas como relações intersubjetivas no interior de estruturas práticas. Assim, a atividade pode ser assumida como o local onde o sujeito e o mundo social ligam-se se reproduzindo e se transformando. Nessa teoria, segundo Radford (2011), identifica-se uma dimensão instrumental e uma intersubjetiva, além de três níveis de desenvolvimento: objeto/motivo da atividade, propósitos/ações e operações. Essas dimensões e níveis são as unidades de análise da pesquisa, tanto na atividade modelagem como na atividade de estudo.

Como parte da ementa da disciplina, os alunos são convidados a escolher tema do interesse deles e a desenvolver um projeto, para dar possíveis respostas às inquietações e/ou soluções às problemáticas construídas no contexto da temática escolhida.

A escolha, o reconhecimento e a delimitação da situação problema, as ideias e conceitos desenvolvidos para responder a situação problemática e os instrumentos culturais utilizados são analisados, assim como, os processos de medição de grandezas, formulação de hipóteses, construção de proposições e simplificações, estabelecimento de conjeturas, estudo de variações, reconhecimento de padrões, construção de exemplificações entre outras ações nas quais os sujeitos participantes estão envolvidos.

Para coletar os dados são utilizados instrumentos que permitem revisar em vários momentos e a partir de ângulos diferentes os acontecimentos vividos no processo. Alguns desses instrumentos são: filmagem das atuações em sala de aula, gravações de conversas dentro e fora da sala de aula, observações não estruturadas, análises documental das produções escritas, entre outras.

Entende-se que as práticas dos sujeitos estão condicionadas por um conjunto de tensões relacionadas com o contexto histórico e cultural. Tensões essas, que fizeram os sujeitos se assumirem não somente como seres racionais, mas também como seres sociais, com sentimentos, consciência e subjetivados. Sujeitos que além de se constituir em interação com os demais, em contextos sociais em permanente mudança, são históricos e inacabados (Freire, 1996) e, portanto, mais que totalmente coerentes estão caracterizados pela contradição e a incerteza.

4. Análises preliminar: dois exemplos

No segundo semestre de 2012 foram feitas algumas provas piloto, com alunos de primeiro ano de Biologia, acompanhados por o autor desse artigo durante o estágio de docência. Para mostrar algumas das práticas algébricas constituídas pelos alunos, serão apresentadas as análises preliminares de dois dos projetos desenvolvidos. Este primeiro exercício de análise, embora um pouco superficial, serviu para preencher alguns vazios relacionados com a metodologia de pesquisa e tomar outras decisões na coleta de dados definitiva que está acontecendo nesse primeiro semestre de 2013.

As análises serão apresentadas em dois níveis: segundo os objetos/motivos e segundo os propósitos/ações. Para começar é importante entender que a sala de aula como micro-contexto social, é o lugar onde acontecem as ações próprias da atividade

modelagem, e está caracterizada pelas ações diretas de dois tipos de sujeitos: professor e alunos. O professor desenvolvendo atividade de ensino e os alunos atividade de estudo e como inter-relação entre essas duas atividades acontecendo a atividade de modelagem matemática. Embora cada atividade esteja constituída por seus próprios objetos/motivos, ações e operações, nem sempre é possível ou faz sentido estudá-las separadamente.

Analises segundo o nível objeto/motivo da modelagem:

Segundo o texto de apresentação da disciplina dada pelo professor, o principal propósito da disciplina é que “*os alunos deem mais um passo na construção de um alicerce matemático básico para as suas atividades enquanto biólogos*”, *se considerando importante que aprendam algumas ideias básicas de matemática e re-visitem outras já estudadas no Ensino Médio*”. Pela forma como está colocado, interpreta-se que esse propósito seja alcançado a partir de dois tipos de atividades: A atividade de ensino e atividade de modelagem.

Baseado na ementa e no livro didático recomendado², o objeto/motivo da atividade de ensino corresponde ao ensino dos conceitos de iniciação ao cálculo. No interior dessa atividade constituem-se um conjunto de sub-atividades, com seus próprios objetos, ações, operações e instrumentos gerando relações intersubjetivas particulares. De outro lado é explicitado que, *grosso modo*, o objeto/motivo da atividade modelagem é que “*os alunos aprendam como estudar e achar novas informações que precisarão ao longo da sua vida como pesquisadores e professores*”.

Ainda reconhecendo a forte inter-relação das duas atividades (ensino e modelagem) o interesse dessa pesquisa está mais focado na segunda atividade, mesmo que o propósito maior é estudar as práticas algébricas no contexto da atividade modelagem. Mas, pela perspectiva pedagógica da modelagem matemática, não é possível analisar essas praticas algébricas sem fazer referencia a atividade de ensino.

Por exemplo, a escolha de um tema para ser investigado é impulsionado pelo professor, segundo o objetivo da disciplina colocado na ementa. “*Em grupos de no mínimo 4 alunos e máximo 6, devem escolher um tema de comum interesse e cujo valor na nota final pesará o 20%*”. Implicitamente um dos propósitos pedagógicos do professor está relacionado com que os alunos tentem relacionar a matemática com a biologia, mas não é uma condição necessária, fato que se torna importante, enquanto é altamente provável que

² Cálculo 1 – Um curso moderno e suas aplicações, Laurence Hoffmann & Gerald L Bradley-

os alunos inclinem seu interesse por desenvolver trabalhos que careçam explicitamente de relações com a matemática.

De igual maneira, o professor considera importante ou necessário ter um mecanismo de controle (poderia-se dizer ‘quase’ repressivo) para garantir que a atividade seja realizada: *a nota*. Sem ter dados que o justifique, considera-se que grande parte do interesse dos alunos para realizar a atividade, está mais em agradar o professor e obter uma boa nota, que em cumprir com o propósito do trabalho segundo a ementa. Isso poderia implicar divergências nos objetos/motivos da atividade de ensino com a atividade modelagem e mais ainda com a atividade de estudo. Considerando que grande parte do sucesso escolar dos alunos depende da correspondência entre os objetos/motivos dessas atividades, fica como pergunta: qual deveria ser a relação entre o objeto/motivo da atividade modelagem com o objetos/motivos das atividades ensino e estudo para garantir esse sucesso.

Um dos grupos escolheu o tema -intitulado por eles- “*Cálculo da água virtual para a produção de queijo branco*”, cujo objetivo foi “*calcular a quantidade de água envolvida na obtenção do queijo branco, a fim de mostrar que água está ligada à produção de diversos produtos. Com isso, pode-se dizer que a água é o principal recurso energético, que está em um ciclo, onde ela não é perdida, não é criada, e sim transformada.*” Outro grupo escolheu como tema “*Carros e bicicletas*” cujo objetivo foi “*Apresentar e comparar as vantagens e desvantagens do uso de carro e bicicleta para ir e voltar da UNESP*”. É importante comentar que esse segundo grupo inicialmente escolheu o tema “*Estimativa, classificação e comparação evolutiva botânica*”, mas não há dados que indiquem as razões para optarem por mudar de tema. Nesses objetivos apresentados pelos grupos, acham-se os objetos/motivos da atividade modelagem, e talvez parte do objeto/motivo da atividade de estudo.

Porém, o que levou os grupos escolher e/ou mudar esses temas e desenvolver os objetivos apresentados? Porque foi de seu interesse? Como constituíram os motivos/objetos da atividade modelagem? Com os dados coletados não é possível responder completamente as perguntas, sendo necessário criar novos mecanismos que auxiliem na busca dessas respostas particulares. Mas, considera-se importante ter algumas respostas nesse sentido, pois uma hipótese é que as diversas ações realizadas por eles estão condicionadas por esses interesses.

Aqui é importante aprofundar nas dimensões intersubjetivas e instrumentais no primeiro nível da atividade. Além do proposto na ementa da disciplina, o professor teve outro papel na escolha? Como foram as negociações no grupo para chegarem à escolha do tema? Teve outros atores nessa escolha? Na dimensão instrumental, que tipos de instrumentos foram usados e qual foi seu papel na escolha? Considera-se que as informações achadas na internet teve um papel de muita importância nesse processo e deve ser analisado. Constatou-se que a maior parte da informação que aparece nos trabalhos foi consultada em sites da internet. Um ponto emergente que deve ser aprofundado é o nível de importância e de credibilidade que a informação que circula pela internet tem ganhado para os alunos, em comparação com outras fontes de informação como livros, revistas especializadas e jornais. Nesse sentido e pelas características complexas desse instrumento é importante descrever mais profundamente seu lugar como reorganizador do pensamento (BORBA E VILLAREAL, 2005).

Analises segundo o nível propósitos/ações.

Com relação ao segundo nível da atividade: propósitos/ações observa-se que o objetivo apresentado pelos alunos do projeto “Água virtual” tem dois focos principais: um deles é o cálculo da água virtual do queijo branco, e o outro é mostrar que a água está ligada à produção de diversos produtos. Segundo a forma como foi apresentado pode-se interpretar que o primeiro foco está subordinado ao segundo. Olhando para o vídeo da apresentação do trabalho, isso é confirmado na resposta de uma das perguntas dos assistentes:

Enrique: porque o queijo, Por que vocês escolheram o queijo?

Isabella: Porque a gente ia escolher um alimento, e aí o bife a gente encontrou que tinha o cálculo pronto, e aí a gente viu que o queijo tem pouco ingrediente e, por exemplo, o leite é possível de a gente achar dados para calcular.

Percebe-se que a escolha pelo cálculo da água virtual do queijo branco foi uma estratégia para simplificar as operações matemáticas enfatizando com essa informação o papel da água na produção de diversos produtos.

Essa condição explica algumas das ações e decisões desenvolvidas no trabalho escrito. Segundo eles, para realizar o cálculo da água virtual do queijo é necessário verificar a quantidade de água utilizada, para produzir os principais componentes que o formam: leite e coalho. Assim, colocam a quantidade de leite e a quantidade de coalho

como as duas grandezas significativas, envolvidas na situação e que permitem atingir o objetivo.

Do mesmo modo, apresentam cinco quantidades de grandezas: quantidade de leite, quantidade de água virtual do leite, quantidade de coalho, quantidade de água no coalho e quantidade de água virtual do queijo. Cada grandeza foi nomeada como uma letra: X , Y , Z , W e Q , respectivamente. Além disso, apresentam cinco premissas que levam a construir algumas relações entre as quantidades de grandeza:

- 1- Água virtual do queijo é igual a água virtual do coalho mais a água virtual do leite;
- 2- Para produzir 1 kg de queijo utiliza-se 7 litros de leite;
- 3- Precisa-se de 70 ml de coalho diluída em água destilada para 100 ml de leite;
- 4- O queijo está numa proporção de 1 coalhada por 10 de água;
- 5- Em condições favoráveis uma vaca normal consome cerca de 70 litros de água por dia e produz 10 litros de leite por dia. Portanto, a quantidade de água consumida pela vaca é 7 vezes maior que a quantidade de leite produzida.

Com essas premissas são produzidas quatro tipos de relação de igualdades, algumas delas foram escritas primeiramente com palavras, para apenas em seguida utilizar letras. As etapas identificadas nessa transição podem ser descritas como aparece a seguir:

Com a primeira premissa os alunos construíram a igualdade $Q=W+Y$. Com a segunda e terceira construíram a igualdade $Z=4,9$ ml de coalho. Com a quarta consideraram que $w=0,9Z$. E finalmente com a quinta produziram que $Y=7X$.

A conclusão dos alunos é que a quantidade de água virtual para produzir queijo virtual é dada pela função $Q(x)=7,00063X$ com X igual a quantidade de leite

No outro projeto intitulado: “Carros x bicicletas”, de acordo com a forma como o próprio objetivo foi apresentado tem-se que o grupo propôs critérios ou pontos de referência para determinar, por separado, condições de vantagem e desvantagem de ter algum dos meios de transporte e, ao final, comparar essas condições para concluir qual é mais ou menos vantajoso. Segundo a justificção, dada pelos mesmos alunos, o único critério são os custos de manutenção do carro e da bicicleta. Nesse sentido, o resultado parece ser óbvio: a bicicleta é mais vantajosa que o carro. Essa observação é importante na medida em que, embora não interferi nas ações dirigidas a calcular os custos de manutenção de cada veículo (primeira parte do objetivo), simplifica a conclusão da segunda parte do objetivo que é comparar as vantagens.

A metodologia seguida para alcançar o objetivo foi dividida em três momentos: o primeiro, a contagem dos carros e bicicletas que, em média, estacionam em um setor da universidade. O segundo, o cálculo dos gastos em consumo de gasolina e de emissão de CO₂ para os carros e gastos de manutenção gerais para uma bicicleta. E finalmente, uma comparação entre as vantagens e desvantagens dos dois veículos. No entanto, para a conclusão final o primeiro momento não é levado em conta.

Com relação ao segundo momento, o cálculo de gastos para o carro foi delimitado a partir de três aspectos: combustível, impostos e manutenção, para o qual foram colocados dados estimados como aparecem a seguir:

Carro popular – valor estimado R\$20.000,00. Motor 1.0 com eficiência mínima de 6km/L à etanol e 9km/L à gasolina. Valor etanol: R\$1,75. Valor gasolina: R\$2,70. Distâncias percorridas: 4km / 8km

Valores dos impostos e manutenção estimados por ano:

IPVA: R\$1000,00. Seguro obrigatório do carro: R\$101,00. Manutenção do veículo e revisões obrigatórias: R\$1.000,00. Licenciamento: R\$50,00.

Para bicicleta somente foi considerado um valor estimado de compra de R\$250 e de manutenção também estimado em R\$200 por ano.

Em geral, as operações realizadas nos dois projetos foram de tipo aditivo e multiplicativo. Em relação com as operações aditivas, tem-se que todas as unidades de medida das grandezas inclusas nas situações foram homogeneizadas implicitamente³. No primeiro projeto a homogeneização dá-se quase de imediato devido ao interesse principal pelo cálculo da “quantidade de água virtual”, enquanto no segundo projeto as unidades de medida das diferentes grandezas foram homogeneizadas à grandeza “valor” ou “custo de”, ou seja, as grandezas quantidade de combustível, impostos e manutenção foram transformadas, na ação, em “valor de...” para ao final chegar a uma resposta homogênea denominada “valor total de...”, cuja quantidade estimada, por adição, foi de R\$2.466,00.

Por outro lado, as grandezas comparadas multiplicativamente foram do tipo: quatro quantidades de dois espaços de medida diferentes que respondem a uma relação de proporcionalidade direta simples, três das quais são conhecidas e cujo valor da quarta é

³ Pelas características das relações aditivas a homogeneização das unidades de medida é sempre uma necessidade, enquanto não acontece o mesmo com as relações multiplicativas. Nesse sentido, é importante analisar a forma em que os alunos desenvolvem esse processo de homogeneização e seu papel nas práticas algébricas.

conhecível a partir de saber o valor associado à unidade de um dos espaços de medida, (técnica de redução à unidade (Lins e Gimenez, 2001, p. 52)).

Por exemplo, no primeiro projeto na premissa “*uma vaca normal consome cerca de 70 litros de água e produz 10 litros de leite*” grandezas relacionadas são a quantidade de leite e de água, assumindo-se uma relação entre elas de proporcionalidade direta. O valor associado de quantidade de leite por unidade de água não é conhecido, mas pode ser calculado por ser conhecido o tipo de relação. Assim, para um litro de leite precisa-se que a vaca consuma 7 litros de água. Conhecido esse valor reduzido à unidade é possível calcular a quantidade de água necessária para produzir qualquer⁴ quantidade de leite. Desse modo foi que os alunos acharam a expressão $Y=7X$.

No segundo projeto as grandezas relacionadas multiplicativamente foram quantidade de etanol por distância e quantidade de gasolina também por distância recorrida. Nesse caso os valores da quantidade de gasolina e etanol associados com a unidade de distância recorrida são conhecidos e por isso os cálculos simplificam-se no algoritmo usualmente denominado de regra de três simples, ver figura 2.

Ainda sendo impossível separar as significações de tipo aritmético e algébrico e inclusive de outros não matemáticos numa atividade de modelagem, pode-se dizer que, em geral, os significados das operações e expressões construídas em ambos os projetos, parecem estar mais voltadas para práticas de tipo aritméticas que algébricas, isto devido a que, embora utilizaram-se letras no processo, interpreta-se que seu uso limitou-se mais a uma simples substituição direta de valores numéricos para fazer as contas e achar um resultado particular, que para operar com relações gerais entre as diferentes grandezas, deixando de reconhecer, nesse uso da letra, significados de carácter geral como é a de variável, incógnita, número generalizado ou parâmetro. É importante aclarar que não se tem dados suficientes para aprofundar nessa afirmação.

Outro argumento para pensar que os significados dados às expressões produzidas têm um carácter mais aritmético que algébrico, está relacionado com a forma de fazer os cálculos. Pela forma como é apresentada a regra de três simples no texto escrito, interpreta-se que não há uma referência às relações funcionais que vão de um espaço de medida para outro. Em outras palavras, não parece estar-se reconhecendo que o problema é um caso particular cuja referência estrutural está dada pela constante na relação por cociente entre

⁴ Esse termo não é utilizado pelos alunos, mas é chave nas relações algébricas.

as duas grandezas (relação de proporcionalidade simples). Nesse sentido, interpreta-se que a preocupação por estabelecer as relações entre os espaços de medida, foi basicamente para efetuar os cálculos requisitados para resolver o problema. É o caso do segundo projeto que para calcular a relação entre quantidade de etanol e gasolina por quilômetro percorrido, é usada a relação multiplicativa que se mostra na figura 2. Assim, o raciocínio em geral, parece ser de o tipo escalar e não funcional (Vergnaud, 1991) o que pode ser interpretado como uma análise fundamentalmente aritmética e não algébrica.

| | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1 litro de etanol ---- 6 km | 1 litro de gasolina ---- 9 km |
| X Litros etanol ----- 2 km | X Litros de gasolina ---- 2 km |
| X = 0,300 L de etanol | X = 0,230 L de gasolina |

Figura 2: relação multiplicativa

Uma parte interessante apresentada no trabalho escrito do segundo projeto foi o cálculo do tempo que levaria para comprar uma bicicleta usando os gastos destinados para o combustível do carro, não sendo clara a justificativa da utilização desse cálculo. Uma possível interpretação é que seja outro argumento para concluir que a bicicleta é mais vantajosa que o carro. Para o cálculo foram usados dois registros de representação: o gráfico e o simbólico-analítico, para apresentar a relação entre o tempo e o custo do combustível consumido. Uma pergunta que surge sem dados para responder é: que acréscimos (desde um ponto de vista cognitivo) obtiveram os alunos ao representar a relação de forma gráfica? Pelo uso dado ao gráfico parece que não acrescentou outras interpretações ou outros significados comparado com os resultados obtidos a partir da representação simbólico-analítico.

5. Algumas considerações parciais.

A intenção com este texto foi mostrar algumas imbricações dos três aspectos que constituem minha pesquisa: a modelagem matemática, a álgebra escolar e a teoria da atividade, cujo objetivo de pesquisa é compreender as características das práticas algébricas constituídas por um grupo de alunos, quando realizam atividade modelagem matemática assumida como uma perspectiva pedagógica.

Desse modo, apresentou-se a teoria da atividade como uma alternativa para analisar as características das práticas algébricas, que constituem os alunos nessa complexidade da sala de aula, quando eles são convidados a realizar atividade de modelagem, considerando

que é uma atividade que responde mais a relações dialéticas entre indivíduos, coletivos e instrumentos culturais, que a relações meramente de causa-efeito.

Algumas perguntas requerem uma maior atenção e análise: como surgem as premissas que os alunos colocam para dar resposta aos problemas relacionados com o tema escolhido? Por que os alunos consideram que devem usar letras no processo? Qual é o papel que estão tendo as letras nessa relação⁵? Como utilizam as letras nas relações apresentadas no contexto da situação⁶? É possível dizer que o uso dado às expressões e às letras nessas expressões é algébrica? Como ajudaram as aulas de matemática no desenvolvimento da atividade de modelagem? Como são aproveitadas as sugestões do professor, colocada nas diferentes versões do trabalho escrito?

Estas perguntas precisam do uso de instrumentos como entrevistas, conversas, outro tipo de produção escrita deles, dentre outros recursos, para afinar as análises. Assim, para entender melhor as formas de pensar algébrica inserida nessas práticas, é preciso investigar as *lógicas* utilizadas por eles no desenvolvimento das operações e para isso é preciso estudar várias fontes de produção escrita, falada e gestual.

Dois pontos chaves no processo de estudo dessas práticas algébricas são: em primeiro lugar, os significados que as pessoas constituem no contexto dos objetos/motivos da atividade modelagem estão na fronteira das formas de pensar empírico e teórico, no qual uma prática algébrica tende mais para o teórico que para o empírico. E em segundo lugar, a álgebra, mais que generalizações aritméticas, deve ser entendida como generalizações estruturais das relações entre quantidades de grandezas e das propriedades relativas a essas relações. Tais significados devem ser encontrados nas justificativas relacionadas com as respectivas afirmações e decisões dos alunos no processo de construção dos modelos.

6. Referências.

BALVIN, F. P. et al. **Pensamiento variacional y razonamiento algebraico**. Medellín: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, 2006.

⁵ Segundo Hava (Bloedy-Vinner, 2002) os usos das letras em uma expressão algébrica podem ser interpretados de diferentes formas: como incógnita, como variável, como parâmetro e/ou como número generalizado.

⁶ Equação, função, relação de equivalência, outras?

BLOEDY-VINNER, H. Beyond Unknowns and Variables - Parameters and Dummy Variables in High School Algebra In: SUTHERLAND, R.;ROJANO, T., *et al* (Ed.). **Perspectives on School Algebra**: Kluwer Academic Publisher, 2002.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 22, p. 37-68, 1991.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation**. United State of America: Springer, 2005.

CAI, J.; KNUTH, E. **Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives**. Springer, 2011.

CHAIKLIN, S.; LAVE, J. **Estudiar las prácticas: perspectivas sobre actividad y contexto**. Buenos Aires: Amorrortu editores, 2001.

DAVIDOV, V. **La enseñanza escolar y su desarrollo psicologico**. Moscu: Editorial progreso, 1988.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **O sonho de Descartes**. Rio de Janeiro/Brasil: Livraria Francisco Alves Editora, 1988.

FREIRE, P. **PEDAGOGIA DA AUTONOMIA: Saberes Necessários à Prática Educativa** 1996.

GODINO, J. D. et al. Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental **Bolema**, v. 26 Nro. 42B, p. 483-511, 2012.

JUNIOR, C. P. **Dialética do conhecimento**. São Paulo, Brasil: Editora Brasiliense, 1980.

KIERAN, C. The core of algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.;CHICK, H., *et al* (Ed.). **The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study**, 2004. cap. 2, p.21-33.

KIERAN, C.; N., B.; LEE, L. **Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching**. Kluwer Academic Publish, 1996.

LAVE, J. **Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life**. Cambridge University Press, 1988.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia y personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del hombre, 1978.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo/Brasil: Papyrus Editora 2001.

RADFORD, L. The ethics of being an knowing: Towards a cultural theory of learning. In: RADFORD, L.;SCHUBRING, G., *et al* (Ed.). **Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture**, 2008. ISBN 978-90-8790-595-8.

ROTH, W.-M.; RADFORD, L. **A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning** Sense Publishers 2011.

STACEY, K.; CHICK, H. Solving the problem with algebra. In: PUBLISHERS, K. A. (Ed.). **The future of the learning and teaching of algebra: the 12th ICMI study.**, 2004.

STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. **The future of the learning and teaching of algebra: the 12th ICMI study.** Kluwer Academic Publishers, 2004.

VERGNAUD, G. **El Niño, Las Matemáticas y la Realidad: Problemas de la Enseñanza de Las Matemáticas en la Escuela Primaria.** Trillas, 1991.

WINBOURNE, P. Looking For Learning In Practice: How Can This Inform Teaching In: WATSON, A. e WINBOURNE, P. (Ed.). **New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education** 2008. cap. 5, p.79-102.