

VAMOS COMBINAR, ARRANJAR E PERMUTAR: APRENDENDO COMBINATÓRIA DESDE OS ANOS INICIAIS DE ESCOLARIZAÇÃO

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba¹
Universidade Federal de Pernambuco
resrborba@gmail.com

Resumo:

Neste texto defende-se o amplo ensino de Combinatória desde o início do Ensino Básico, a partir de situações e representações simbólicas acessíveis a alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e num processo de aprofundamento contínuo, possibilitando que no Ensino Médio os alunos construam melhores compreensões das fórmulas da Análise Combinatória. Argumenta-se que, desde os primeiros anos de escolarização, sejam trabalhadas explicitamente situações de *arranjo*, *combinação* e *permutação*, além dos problemas de *produto cartesiano*, atualmente o único tipo de problema combinatório apresentado claramente em propostas curriculares e em livros didáticos para este nível de ensino. São apresentados pressupostos teóricos e evidências empíricas que sustentam o ensino de Combinatória desde os anos iniciais e que dão suporte ao argumento de que o *raciocínio combinatório* é muito útil ao conhecimento matemático e a outras áreas do ensino, sendo necessário um trabalho colaborativo entre professores de diferentes níveis de escolarização para seu amplo desenvolvimento.

Palavras-chave: Combinatória; anos iniciais do Ensino Básico; trabalho colaborativo docente.

1. Introdução

A Análise Combinatória é um conteúdo matemático que consta do currículo do Ensino Médio, mas aqui defenderei que o aprendizado naquele nível de ensino pode ser influenciado por conhecimentos desenvolvidos ao longo de toda a escolarização do estudante. Defendo que conhecimentos direta e indiretamente relacionados à Combinatória² influenciam a compreensão de situações nas quais são dados elementos e a forma de agrupamento desejado desses elementos e solicita-se o levantamento de todas as possibilidades de combinação que atendem à dada situação.

A minha defesa baseia-se em pressupostos teóricos e dados empíricos. O pressuposto teórico básico ampara-se na teoria do psicólogo e educador matemático

¹ Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) e líder do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco (Geração).

² Neste texto, Análise Combinatória e Combinatória são termos sinônimos.

francês Gérard Vergnaud. Vergnaud (1982) afirma que conceitos se desenvolvem inseridos em campos conceituais – em estreita articulação entre si – e que muitos conceitos, devido à sua complexidade, levam anos para serem desenvolvidos. Dessa forma, eu defendo que, no ensino, conceitos estreitamente relacionados podem ser abordados concomitantemente, uma vez que situações que dão significado a estes conceitos estão intrinsicamente imbricadas, e se pode gradativamente trabalhar aspectos mais complexos dos conteúdos enfocados.

Acredito, assim, que diferentes situações que dão significado à Combinatória – tais como os problemas de *produto cartesiano*, de *arranjo*, de *combinação* e de *permutação* – são intimamente associadas por relações combinatórias básicas, mas também possuem relações próprias que devem ser tratadas por meio de representações simbólicas que permitem o adequado levantamento de possibilidades. Para o entendimento, por parte dos alunos, do amplo leque de situações combinatórias, defendo que é necessário que o desenvolvimento do raciocínio combinatório – a ser definido a seguir neste texto – seja iniciado bem antes do Ensino Médio. Esse é um modo particular de pensar que, a meu ver, necessita de um longo tempo de desenvolvimento, dado que são muitas as possíveis situações combinatórias a serem tratadas, as quais variam em nível de complexidade.

Evidências empíricas do longo processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório estão presentes nos estudos de Inhelder e Piaget (1976), de Soares e Moro (2006), de Pessoa e Borba (2010) e de Lima e Borba (2011); do surgimento do raciocínio combinatório na Educação Infantil foram observadas por Matias, Santos e Pessoa (2011) e por Pessoa e Borba (2012); da influência da escolarização neste desenvolvimento está evidenciado em Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e em Schliemann (1988); e do impacto do ensino específico na compreensão de alunos de anos iniciais – da Educação de Jovens e Adultos e de alunos do ensino regular – foi observado por Barreto e Borba (2011) e por Azevedo e Borba (2012). Rocha e Borba (2013) também trazem evidências de como há necessidade de professores de diferentes níveis de ensino da Escolarização Básica se apropriarem de um amplo conhecimento sobre o que se deve tratar em Combinatória e como os alunos desenvolvem seus raciocínios combinatórios. Estes referidos textos serão apresentados e discutidos a seguir no presente artigo.

Outra questão, relacionada ao longo período necessário ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, que desejo discutir neste texto é a de que a compreensão de variadas situações combinatórias não ocorre simultaneamente. Não é apenas uma questão

da ordem de grandeza dos números envolvidos nos problemas, o que pode, de fato, ser um elemento complicador, mas também a natureza dos problemas trabalhados que possibilita que alguns tipos de problemas sejam compreendidos antes de outros. Essa segunda questão será mais bem tratada a seguir, a partir da discussão das relações combinatórias presentes em problemas escolares de Combinatória.

2. O que é raciocínio combinatório e quais as distintas relações combinatórias?

O *raciocínio combinatório* é, segundo Borba (2010), um modo específico de pensamento, caracterizado pela análise de situações nas quais são dados elementos de um ou mais conjuntos e estes elementos devem ser agrupados em combinações que atendem a relações específicas de *escolha* e *ordenação* dos elementos. Dessa forma, problemas típicos de Combinatória são os que solicitam que se determine – por levantamento direto ou indireto – o número total de possíveis agrupamentos que atendem a específicas formas de escolha e de ordenação de elementos de um ou mais de um conjunto.

Estas são, portanto, as relações básicas presentes em problemas combinatórios: *escolha de elementos* e *ordenação dos elementos*. Assim, o que diferencia os problemas básicos de Combinatória – *produtos cartesianos*, *arranjos*, *permutações* e *combinações* – são as formas como são escolhidos e ordenados os seus elementos. Esse é um aspecto que precisa ficar claro aos alunos ao serem trabalhadas situações combinatórias em sala de aula.

No caso de *produtos cartesianos*, os elementos são escolhidos a partir de dois ou mais conjuntos diferentes e a ordem na qual estes elementos são enumerados não constituem possibilidades distintas. Assim, por exemplo, para a escolha de camisas, calças e sapatos, um menino pode escolher dentre suas quatro camisas (verde, azul, laranja e branca), suas duas calças (azul e cinza) e seus dois pares de sapatos (marrons e pretos). São três as etapas de escolha neste caso: a escolha da camisa, a escolha da calça e a escolha do sapato. Estas escolhas são efetuadas a partir de conjuntos diferentes (o das camisas, o das calças e o dos sapatos) e a ordenação dos elementos não constituem possibilidades distintas. Dessa forma, a escolha da camisa azul, com a calça azul e o sapato preto, constitui-se na mesma escolha da calça azul, sapato preto e camisa azul. Já a camisa azul, a calça azul e o sapato preto é uma possibilidade distinta da camisa azul, calça azul e sapato marrom. No típico problema escolar, se solicitaria que os alunos enumerassem cada uma

das possibilidades ou que apresentassem o número total de possibilidades, que neste caso é 16. A camisa verde pode ser combinada com a calça azul e o sapato marrom; ou com a calça azul e o sapato preto; ou a calça cinza e o sapato marrom; ou, ainda, com a calça cinza e o sapato preto. Assim, com a camisa verde há quatro possibilidades distintas. Para as outras três camisas também serão quatro possibilidades distintas cada, o que resulta em 16 possibilidades distintas. Poderia ser solicitado que fossem listadas todas as possibilidades ou que se determinassem quantas são ao todo, sem ter que listá-las.

Diferentemente dos *produtos cartesianos* – que são determinados a partir da escolha de elementos de diferentes conjuntos, os *arranjos*, *combinações* e *permutações* são determinados a partir da escolha de elementos de um conjunto único. Estes três últimos tipos de problemas se diferenciam quanto ao número de elementos a serem escolhidos e/ou quanto ao fato da ordenação dos elementos constituírem, ou não, possibilidades distintas.

Nos *arranjos* os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas nem todos os elementos constituem as possibilidades a serem enumeradas. Neste tipo de problema a ordem na qual os elementos são escolhidos constituem possibilidades distintas. Se, por exemplo, fosse solicitado a um menino que colocasse em ordem de preferência duas de suas quatro camisas (verde, azul, laranja e branca), a escolha da verde como a mais preferida e da azul como a segunda mais preferida é uma escolha distinta de azul como a mais preferida e da verde como a segunda mais preferida. Dessa forma, tem-se um conjunto único, mas nem todos os elementos são escolhidos todas as vezes e a ordem de escolha destes elementos em *arranjos* constitui-se em possibilidades distintas. Neste dado exemplo, são 12 as maneiras distintas de se ter as camisas preferidas: verde e azul, azul e verde, verde e laranja, laranja e verde, verde e branca, branca e verde, azul e laranja, laranja e azul, azul e branca, branca e azul, laranja e branca, e, por fim, branca e laranja.

As *permutações* são vistas, na Matemática, como casos particulares de *arranjos*, nos quais todos os elementos são escolhidos. Cognitivamente falando, entretanto, estes são tipos de problemas distintos, pois nos *arranjos* os elementos não são todos utilizados na escolha de cada possibilidade e nas *permutações* todos os elementos são utilizados em cada uma das possibilidades. Evidência de que se trata de problemas distintos – em termos de pensamento requerido para sua solução – será apresentada a seguir, quando se discutir o desempenho de alunos diferenciado por tipo de problema combinatório resolvido. Como exemplo de *permutação*, pode-se ter: De quantas maneiras distintas João pode empilhar

suas quatro camisas (verde, azul, laranja e branca)? Os alunos podem ser solicitados a listarem todas as possibilidades ou a determinarem quantas são as possibilidades, sem terem que listá-las. Neste caso específico, são 24 as possibilidades. Pode-se ter a camisa verde embaixo, seguida das de cores azul, laranja e branca; ou seguido das de cores azul, branca e laranja; ou laranja, azul e branca; ou laranja, branca e azul; ou branca, azul e laranja; ou, ainda, branca, laranja e azul. Para a camisa verde embaixo são, portanto, seis as possibilidades de empilhar as camisas. Para cada uma das outras três cores também serão seis possibilidades, resultando, assim, em 24 possibilidades distintas de empilhamento das quatro camisas.

Nas *combinações* tem-se que são escolhidos alguns elementos de um conjunto único e a ordem de escolha dos elementos não constituem possibilidades distintas. Assim, por exemplo, se um menino tem quatro camisas (verde, azul, laranja e branca), e deseja escolher duas delas para levar numa viagem, ele tem um conjunto único (de suas quatro camisas) a partir do qual deve escolher dois elementos. Se ele escolhe a camisa verde e a camisa laranja, esta possibilidade é idêntica à escolha das camisas laranja e verde. Dessa forma, a ordenação dos elementos não determina possibilidades diferenciadas entre si e, nesse caso, são apenas seis as possibilidades: verde e azul; verde e laranja; verde e branca; azul e laranja; azul e branca; e laranja e branca.

Além das duas relações básicas, de escolha e ordenação de elementos, presentes nas distintas situações combinatórias – caracterizadas nos tipos de problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação* – há outras relações que podem ser tratadas. Algumas dessas relações podem, a meu ver, ser por demais complexas para alunos dos anos iniciais de escolarização, mas casos mais simples podem ter trabalhados desde cedo em salas de aula.

Borba e Braz (2012) apontam, além das relações de *escolha* e *ordem* de elementos, as relações de *repetição* e as condicionais de *posicionamento* e de *proximidade* de elementos. Embora não, necessariamente, devam ser tratadas nos anos iniciais de escolarização as situações combinatórias condicionais, é importante que os professores tenham consciência que uma das formas de tornar mais complexo o ensino de Combinatória ao longo da Escolarização Básica é o de apresentar problemas nos quais elementos podem ser repetidos (se no caso citado anteriormente pudesse repetir camisas de

mesma cor, por exemplo), ou que um determinado elemento esteja em determinada posição em relação a outro (como a camisa branca sempre abaixo da azul, por exemplo) ou determinado elemento esteja próximo a outro (como a camisa laranja sempre junto da camisa verde, por exemplo).

Trataremos, a seguir, de estudos que investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório e de pesquisas que analisaram o papel da escola no desenvolvimento deste modo de pensar. Os estudos apresentados foram realizados com alunos e professores de diferentes níveis de ensino e dão suporte ao pressuposto básico que desejo ressaltar: haverá possibilidade de um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório se problemas variados de Combinatória forem trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de representações simbólicas apropriadas que possibilitem uma gradual construção de procedimentos mais formais, até chegar-se ao uso consciente das fórmulas de Análise Combinatória.

3. Quais as evidências do desenvolvimento do raciocínio combinatório ao longo da escolarização?

Inhelder e Piaget (1976) afirmaram que apenas no estágio de operações formais, a partir da adolescência, observaram procedimentos sistemáticos de enumeração em problemas combinatórios, em particular de *permutações*. Nas suas observações, crianças inicialmente utilizaram listagens aleatórias, sem estratégia sistemática; depois buscaram estratégias de tentativa e erro; e adolescentes, com aproximadamente 15 anos de idade, descobriram todas as *permutações* solicitadas. Observou-se que de início as crianças apresentaram dificuldade em compreender que os mesmos elementos podem ser arrumados de diferentes maneiras e depois apresentavam acertos parciais, por tentativa e erro, mas não tinham certeza se haviam esgotado todas as possibilidades. Primeiro conseguiam esgotar as possibilidades quando havia um menor número de permutações e depois conseguiam generalizar para um maior número de permutações. O estudo evidencia, assim, um longo período necessário ao desenvolvimento do raciocínio combinatório – da infância até a adolescência.

Soares e Moro (2006) encontraram resultados semelhantes com problemas de *produto cartesiano*, entre 31 alunos de 5ª série e 29 alunos de 6ª série do Ensino Fundamental, atuais 6º e 7º anos. O teste aplicado envolvia quatro problemas de *produto*

cartesiano com duas ou três variáveis, valores numéricos pequenos ou grandes, sem e com a presença de valores distratores (*i.e.* números que não deveriam ser levados em consideração nas soluções solicitadas). Os níveis de soluções encontradas variaram desde *ausência de soluções combinatórias*, passando por *primeiros indícios de soluções combinatórias* a *aproximações de soluções combinatórias* até atingir a *presença de soluções combinatórias*.

Embora Inhelder e Piaget (1976) não tenham discutido diretamente o papel da escolarização no desenvolvimento da compreensão de problemas de *permutação*, nem tenha sido foco de discussão direta de Soares e Moro (2006), ao tratarem problemas de *produto cartesiano*, eu argumento aqui que não se pode deixar de considerar que o desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes – em particular o relacionado à aprendizagem de Combinatória – é fortemente influenciado por experiências escolares e extraescolares. Dessa forma, ressalto que, além do amadurecimento das estruturas cognitivas e das vivências cotidianas, a escola pode ter uma grande influência no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Com o intuito de investigar uma amplitude maior de problemas combinatórios em uma ampla faixa etária, Pessoa e Borba (2010), levantaram o desempenho de 568 estudantes, de escolas públicas e particulares, do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, ao resolverem oito problemas combinatórios, dois de cada tipo: *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*. Metade dos problemas resultava em menor quantidade de possibilidades e a outra metade resultava em maior quantidade de possibilidades.

Pessoa e Borba (2010) observaram um percentual de acertos crescente nos diferentes níveis de ensino: 9,3% dentre os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; 33,5% dentre os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e 43,2% do Ensino Médio. Ressalta-se que estes percentuais retratam apenas acertos totais, ou seja, quando o aluno chegava ao correto número total de possibilidades. Acertos parciais foram obtidos nos diferentes níveis de ensino, os quais retratam que alguns alunos conseguiam corretamente identificar as relações combinatórias presentes nos problemas e enumeravam algumas possibilidades corretas, mas não todas. Acertos totais eram mais facilmente alcançados em problemas de menor número total de possibilidades, mas acertos parciais são evidências da compreensão das relações combinatórias presentes nas situações trabalhadas.

Os progressos de um nível de ensino para outro nos parecem evidência do impacto de um conjunto de fatores: a maturidade alcançada com o passar da idade, as experiências escolares vivenciadas, bem como experiências extraescolares vividas. Defendemos que experiências escolares podem ter uma forte influência no raciocínio combinatório, pois melhores desempenhos podem ser observados em anos escolares nos quais os alunos já passaram por ensino formal específico em algum tipo ou tipos de problemas combinatórios. No caso dos anos iniciais de ensino, Pessoa e Borba (2010) observaram que na 4ª série (5º ano) os alunos apresentaram melhor desempenho, provavelmente por terem já estudado situações multiplicativas, incluindo as de *produto cartesiano*.

Entretanto, os avanços no raciocínio combinatório nem sempre são consequência de ensino direto de situações combinatórias. Os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, por exemplo, evidenciaram desenvolvimentos em seus raciocínios combinatórios que podem ter sido consequência de um aprendizado indireto, uma vez que ainda não haviam sido formalmente instruídos em Análise Combinatória – o que usualmente ocorre no segundo ano do Ensino Médio.

Esperava-se que houvesse um avanço maior dos alunos do Ensino Médio, principalmente após o ensino formal da Combinatória, mas observou-se um uso muito pequeno das fórmulas ensinadas – o que nos parece evidência de que o ensino atual de Combinatória é fragmentado (com um tipo de problema trabalhado inicialmente e outros tipos trabalhados posteriormente), descontínuo (sem uma articulação entre os tipos de problemas e de procedimentos de resolução – de informais a formais) e nem sempre o ensino formal tem uma influência direta na real compreensão de situações combinatórias.

Se o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo longo, é preciso, então, que ao longo da escolarização os diferentes tipos de problemas sejam trabalhados e que seja proposto um aprofundamento contínuo, para que estratégias informais sejam gradativamente transformadas em procedimentos formais e mais generalizadores. Um trabalho assim poderá possibilitar melhores desempenhos dos alunos ao final da escolarização básica.

Lima e Borba (2011) também observaram, de modo geral, melhoras de desempenho em problemas combinatórias com o passar da escolarização entre alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Participaram do estudo 150 alunos, 30 de cada nível de ensino (Módulos I, II, III, IV e PROEJA – nível profissionalizante) ao resolverem problemas

multiplicativos, incluindo os de Combinatória. Na Tabela 1 pode-se observar os avanços nos problemas combinatórios trabalhados: *arranjo*, *combinação*, *permutação*, *produto cartesiano direto* (multiplicação) e *produto cartesiano inverso* (divisão).

De ausência total de acertos, no Módulo I, os alunos gradativamente evidenciaram compreensões de *produtos cartesianos* e apenas no nível profissionalizante – correspondente ao Ensino Médio Regular – houve um melhor desempenho nos diferentes tipos de problemas combinatórios tratados. Mais uma vez, acredita-se que a melhora de desempenho seja mais consequência de ensino indireto do que instrução específica em Combinatória, evidenciando que o ensino formal pode influenciar a compreensão de situações combinatórias, mas o ensino precisa fazer sentido ao aluno para que ele entenda bem os distintos tipos de problemas.

Tabela 1. Percentuais de acerto em problemas combinatórios de alunos da Educação de Jovens e Adultos do estudo de Lima e Borba (2011).

Níveis de ensino	Tipos de problemas				
	Arranjo	Permutação	Combinação	Produto Cartesiano direto	Produto Cartesiano inverso
Módulo I	0	0	0	0	0
Módulo II	0	0	0	3	3
Módulo III	0	0	0	23	17
Módulo IV	0	0	0	17	7
PROEJA	13	3	7	20	10

Ressalta-se que os desempenhos muito fracos dos alunos de anos iniciais – tanto no Ensino Regular quanto na EJA – são consequência de se considerar apenas acertos totais nestes estudos relatados. Se se considerar acertos parciais – nos quais possibilidades corretas foram enumeradas, mas não a totalidade de possibilidades corretas – os desempenhos são melhores, evidenciando que os alunos compreendem as relações combinatórias implícitas nas situações, mas não conseguem, muitas vezes, enumerar o número total de possibilidades solicitado.

Também se destaca que os diferentes tipos de problemas combinatórios não são compreendidos simultaneamente. Inicialmente, os alunos compreenderam as situações referentes a *produtos cartesianos* e depois evidenciaram algumas compreensões de outras situações – referentes a *arranjos*, *combinações* e *permutações*. Tanto Pessoa e Borba (2010) quanto Lima e Borba (2011) observaram desempenhos diferenciados por tipo de problema combinatório e este resultado é de suma importância, no sentido de que as situações combinatórias possuem relações próprias e que a compreensão dos diferentes tipos de problema pode ocorrer não simultaneamente. Pode haver uma compreensão mais fácil de determinadas situações sobre outras, bem como pode haver influência de distintos fatores, como a ordem de grandeza do número de possibilidades a serem determinadas ou o número de etapas de escolha presentes na situação, sendo este o foco de pesquisas em desenvolvimento, como a de Pontes e Borba (2012).

Foi observado, pelos resultados de estudos anteriormente relatados, um longo processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório, que pode não ter sido ainda concluído ao final do Ensino Médio, mas pode-se também questionar quando se dá o início da compreensão de situações combinatórias. Esta questão pode nortear decisões curriculares e práticas de ensino, as quais podem incluir um trabalho mais precoce com uma variedade de problemas de Combinatória.

Evidências de compreensões iniciais de situações combinatórias por parte de crianças da Educação Infantil foram observadas por Matias, Santos e Pessoa (2011) e por Pessoa e Borba (2012). Os problemas eram apresentados com número total de possibilidades pequeno e as crianças resolviam os problemas por intermédio da manipulação de figuras. Observou-se que as crianças percebiam quais as escolhas de elementos que deveriam efetuar, mas tinham maior dificuldade em compreender se a ordem dos elementos gerava, ou não, possibilidades distintas e possuíam maior dificuldade ainda em esgotar todas as possibilidades.

Defendo aqui que o uso de manipulativos (objetos ou figuras de objetos) pode ser um excelente modo de introduzir situações combinatórias às crianças mais novas, inclusive as que estão na Educação Infantil, e que o trabalho com situações combinatórias simples – com baixo número de possibilidades – deve ser estimulado desde cedo, para criar bases para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os cuidados necessários para um início mais precoce do ensino de Combinatória é o de que não se deve ter o objetivo de

inicialmente exigir procedimentos formais e que as situações apresentadas sejam do cotidiano infantil nas quais a combinação de elementos se faz presente.

Fischbein (1975) chamou a atenção de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório pode deixar de ser alcançado na ausência de ensino formal e observou em Fischbein, Pampu e Minzat (1970) um desenvolvimento ocorrido a partir da instrução com o uso de diagramas de árvores de possibilidades. Argumentou-se, a partir de resultados obtidos empiricamente, que a instrução formal é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e que o uso de árvores de possibilidades possibilita avanços, pois permite maior sistematização na resolução de problemas combinatórios. Estudos nossos que utilizaram árvores de possibilidades serão descritos a seguir, os quais reforçam os achados de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e a defesa de Fischbein (1975) da necessidade de instrução formal para um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Outro estudo que reforça o impacto da escolarização no raciocínio combinatório é o de Schliemann (1988) que pesquisou a resolução de *permutações* por adultos escolarizados (estudantes recentemente aprovados no exame vestibular para a universidade) e com pouca escolarização (cambistas do jogo do bicho e outros trabalhadores do mesmo grupo socioeconômico). Observou-se neste estudo que o desempenho em problemas combinatórios foi melhor por parte dos estudantes – que haviam recebido instrução formal em Análise Combinatória, seguido dos cambistas que embora não tenham tido instrução formal específica possuíam ampla experiência prática no levantamento de possibilidades do jogo do bicho.

A experiência cotidiana com a Combinatória tem, dessa forma, influência no desenvolvimento do raciocínio combinatório, mas o impacto da instrução escolar parece ser mais forte e a interação entre experiências do dia-a-dia e o vivenciado na escola pode possibilitar ainda maiores avanços no desenvolvimento deste modo específico de pensar. Discutirei, a seguir, estudos que objetivaram, por intermédio de ensinamentos específicos, aproveitar conhecimentos anteriores de alunos e auxiliá-los em seus desenvolvimentos de raciocínio combinatório.

Barreto e Borba (2011) propuseram um estudo de intervenção pedagógica com 24 alunos da Educação de Jovens e Adultos que frequentavam um módulo correspondente ao 4º e 5º ano do Ensino Fundamental regular. Os alunos resolveram os problemas com diferentes formas de representação simbólica: listagens e/ou árvores de possibilidades.

Estas representações foram selecionadas por terem sido modos bem sucedidos de resolução de problemas combinatórios, observados em estudos anteriores. No teste que precedeu o ensino os alunos evidenciaram pouca compreensão de relações combinatórias. Durante a intervenção buscou-se chamar a atenção – tanto na construção de listas quanto na de árvores de possibilidades – sobre as relações de *escolha* e de *ordenação* de elementos e também sobre a necessidade de se esgotar todas as possibilidades e não apenas apresentar algumas. O uso de um e/ou dois tipos de representação simbólica foi eficiente no avanço da compreensão dos alunos da EJA de situações combinatórias. Os alunos preferiram utilizar listas em suas soluções, mas, após o ensino, faziam uso deste recurso de forma sistematizada, possibilitando chegar a respostas totalmente corretas e não apenas listando algumas das possibilidades das situações apresentadas, como faziam antes do ensino. O estudo evidencia, assim, que se os alunos entendem as relações presentes em situações combinatórias e aprendem a fazer uso adequado de poderosas representações simbólicas, podem, em muito avançar em seus raciocínios combinatórios.

Azevedo e Borba (2012) também propuseram estudo de intervenção pedagógica, com 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental e a comparação central investigada era a construção de árvores de possibilidades em lápis e papel e a construção de árvores por meio do uso de um *software* denominado *Diagramas de Árbol*. O ensino com uso de árvores – escritas ou virtuais – possibilitou grandes avanços nos desempenhos dos alunos que passaram a utilizar estratégias sistemáticas na resolução de problemas combinatórios. O uso correto de representações variadas no teste após o ensino (como as observadas nas Figuras 1 e 2) evidencia que os alunos passaram a entender melhor as relações envolvidas nas situações e a fazerem uso apropriado de estratégias de resolução de problemas combinatórios.

Figura 1: Resposta correta por meio de listagem de possibilidades.

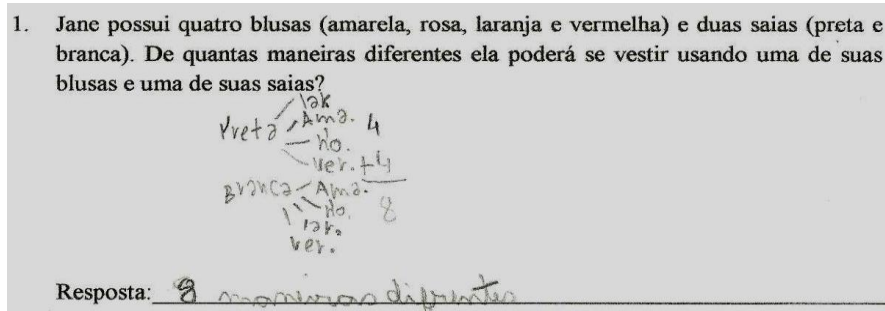
2. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Leticia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dance com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

$G \rightarrow T$	$T \rightarrow T$	$M \rightarrow T$	$R \rightarrow T$	$O \rightarrow T$	$F \rightarrow T$
$G \rightarrow E$	$T \rightarrow E$	$M \rightarrow E$	$R \rightarrow E$	$O \rightarrow E$	$F \rightarrow E$
$G \rightarrow L$	$T \rightarrow L$	$M \rightarrow L$	$R \rightarrow L$	$O \rightarrow L$	$F \rightarrow L$
$G \rightarrow R$	$T \rightarrow R$	$M \rightarrow R$	$R \rightarrow R$	$O \rightarrow R$	$F \rightarrow R$

Resposta: 24 casais diferentes.

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 2: Resposta correta por meio de árvore de possibilidades.



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Com base em resultados obtidos com alunos, Rocha e Borba (2013) estudaram como professores de diferentes níveis de ensino da Escolarização Básica se apropriaram de conhecimento sobre o que se deve tratar em Combinatória e como os alunos desenvolvem seus raciocínios combinatórios. Foram realizadas entrevistas semiestruturadas com seis professores (dois dos anos iniciais, dois dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio) na qual responderam questões sobre suas aulas de Combinatória, os recursos por eles utilizados e as estratégias implementadas para a superação de alunos. Observou-se que os professores de anos iniciais enfatizaram o uso de material manipulativo para o ensino de Combinatória, mas não evidenciaram domínio das distintas situações combinatórias. Os professores dos anos finais do Ensino Fundamental mencionaram basicamente o uso do *princípio fundamental da contagem*³ e os do Ensino Médio ressaltaram as dificuldades dos alunos em diferenciarem as fórmulas dos distintos problemas combinatórios.

Este estudo com professores mostra que os mesmos possuem alguns conhecimentos referentes ao ensino de Combinatória que são apropriados aos níveis de escolarização com os quais lidam, mas não houve indicação de que os professores têm conhecimento das estratégias utilizadas em outros níveis de ensino e/ou das relações entre estas distintas estratégias de instrução. Eu defendo aqui que um bom caminho de construção de estratégias de resolução de situações combinatórias é o de uso de materiais manipulativos e desenhos (na Educação Infantil e primeiros anos do Ensino Fundamental); utilização de listagens, árvores de possibilidades e operações aritméticas simples para representar situações combinatórias variadas (no 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental); uso amplo

³ Segundo Smole e Diniz (2003), o princípio fundamental da contagem pode ser enunciado da seguinte forma: "... se temos um acontecimento formado por diversas etapas... no qual conhecemos o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se realizar, multiplicando todos esses números, teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar" (p.58).

do *princípio fundamental da contagem* auxiliado por outras formas de representação, como árvores de possibilidades (nos anos finais do Ensino Fundamental); e construção de fórmulas da Análise Combinatória a partir do *princípio fundamental da contagem* (no Ensino Médio).

4. Considerações finais: Como professores do Ensino Básico podem trabalhar em colaboração para o desenvolvimento do raciocínio combinatório?

Acredito que os resultados dos estudos aqui apresentados evidenciam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um longo processo que ocorre por todo o período de escolarização, que o desenvolvimento amplo deste modo de pensar depende de instrução escolar e que o aprendizado da Combinatória pode se iniciar desde os anos iniciais de escolarização.

Para que haja um desenvolvimento amplo do raciocínio combinatório por parte de nossos alunos, defendo que é necessário um trabalho colaborativo entre professores de distintos níveis de escolarização. Se todos têm o conhecimento de como o raciocínio combinatório pode se desenvolver, o que foi trabalhado em um nível de ensino pode ser aproveitado como ponto de partida para avanços em outro nível de escolarização. Assim, professores de anos iniciais do Ensino Fundamental saberão quais as formalizações as quais se deseja chegar com o avançar da escolarização; professores dos anos finais do Ensino Fundamental terão conhecimento dos desenvolvimentos já ocorridos e dos que ainda poderão ocorrer; e professores do Ensino Médio poderão aproveitar estes conhecimentos anteriores na construção de processos formais – como as fórmulas de Análise Combinatória.

Argumento aqui que de início é possível o uso de variadas formas de representação simbólica, como o uso de manipulativos e representações escritas, principalmente por meio de desenhos, e gradativamente utilizar-se de outros tipos de representações – como as listagens e as árvores de possibilidades. Destes tipos de representação pode-se deduzir o *princípio fundamental da contagem* e deste princípio pode chegar-se à construção das fórmulas da Análise Combinatória. Assim, os alunos poderão aperfeiçoar as suas estratégias de resolução de problemas combinatórios, no sentido de uma maior sistematização das suas soluções e alcance do número total de possibilidades solicitadas e, assim, chegarem a um desenvolvimento mais amplo de seus raciocínios combinatórios.

5. Agradecimentos

Aos participantes das pesquisas relatadas neste artigo pelo empenho em deixar claro como pensam sobre problemas combinatórios; aos integrantes do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio combinatório do Centro de Educação da UFPE (<http://geracaoufpe.blogspot.com.br>); aos financiamentos recebidos da Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).

6. Referências

- AZEVEDO, Juliana. *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?* Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC - UFPE), Recife, PE, 2013.
- AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. In: *Anais do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática* (XVI Ebrapem), Canoas, RS, 2012.
- BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute (2011). Intervenções de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos. In: *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (XIII Ciaem), Recife, PE, 2011.
- BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. (X Enem), Salvador, BA, 2010.
- BORBA, Rute; BRAZ, Flávia M. T. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: *Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, III Sipemat, Fortaleza, CE, 2012.
- FISCHBEIN, Efraim. *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, Reidel, Dordrecht, 1975.
- FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *The British Journal of Educational Psychology*, n. 40, 1970.
- INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.
- LIMA, Rita & BORBA, Rute. A Educação de Jovens e Adultos e o Raciocínio Combinatório. In: *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, XIII Ciaem, Recife, 2011.
- MATIAS, Patrícia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. In: *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, XIII Ciaem, Recife, 2011.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. Recife: v. 1, no. 1, 2010.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? *Proceedings... 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v. 1, p. 261. Taipei, Taiwan: PME. 2012.

PONTES, Danielle; BORBA, Rute. A influência das etapas de escolha e das representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. *Anais do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática (XVI Ebrapem)*, Canoas, RS, 2012.

ROCHA, Cristiane; BORBA, R. Reflexões de docentes sobre o ensino de Combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. In: *Anais da I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2013.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

SOARES, Maria Teresa; MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. In: *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, III Sipem, Águas de Lindóia, SP, 2006.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986. pp. 75-90.