

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS: MATERIAIS MANIPULÁVEIS E O SOFTWARE POLY COMO ALTERNATIVA DIDÁTICA

Bruna Gisele Rodrigues
UNESPAR/FAFIUV
brunagiselerodrigues@hotmail.com

Vanessa Verbanek
UNESPAR/FAFIUV
vanessaverbanek@hotmail.com

Everton José Goldoni Estevam
UNESPAR/FAFIUV
evertonjgestevam@gmail.com

Resumo:

O presente trabalho trata de um relato reflexivo sobre uma investigação realizada com o objetivo estudar os Poliedros Arquimedianos, caracterizando-os e discutindo uma proposta para sua abordagem na Educação Básica. Assumimos que uma das grandes dificuldades na abordagem desses poliedros envolve sua visualização e a falta de materiais que possibilitam explorá-los adequadamente. Neste sentido, apresentamos uma proposta didática, na qual trabalhamos com o software Poly e materiais manipuláveis para explicar a origem e características dos Poliedros Arquimedianos, a qual foi validada a partir da aplicação com alunos de um curso de licenciatura em Matemática que desconheciam tais poliedros. Os resultados apontam que a manipulação e dinamicidade possibilitadas pelos recursos utilizados favorecem a exploração desses poliedros e proporcionam a compreensão de suas características e propriedades.

Palavras-chave: Poliedros Arquimedianos. Geometria. Software Poly. Materiais Manipuláveis.

1. Introdução

Pesquisas indicam que a Geometria ainda sofre reflexos do Movimento da Matemática Moderna, cuja consequência revela uma certa desconsideração pela maioria dos professores. Andrade e Nacarato (2004), analisando as tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria no Brasil, afirmam que as “pesquisas continuam apontando para o fato de que a Geometria ainda está bastante ausente das salas de aula” (p. 15). Esse problema, de acordo com Almoloud et al (2004), tem suas origens (i) no próprio sistema educacional, que apresenta orientações muito gerais as quais permitem que as escolas estabeleçam os conteúdos que julgam ou não importantes a formação dos alunos;

(ii) na precária formação dos professores, que não oferece condições para que eles trabalhem os conteúdos de geometria adequadamente; e (iii) nos livros didáticos, que apresentam problemas que privilegiam aspectos algébricos e não mobilizam a coordenação dos diferentes registros, fundamental para a compreensão em Geometria.

No presente trabalho discutimos os Poliedros Arquimedianos, cuja investigação preliminar em referenciais teóricos revela a quase inexistência de trabalhos envolvendo a temática no Brasil (ALMEIDA, 2010). Assim, nosso objetivo é apresentar uma proposta didática que permita abordá-los na Educação Básica e possibilite a exploração de suas características e algumas propriedades.

2. Os Poliedros Arquimedianos

Os Poliedros Arquimedianos são caracterizados por serem semirregulares equiangulares, isto é, a soma dos ângulos planos em cada vértice é igual (e constituem um ângulo sólido), mas as faces não são iguais, embora sejam polígonos regulares. De acordo com Rangel (1976), os Poliedros Arquimedianos podem aparecer agrupados em dois gêneros: (i) quando as faces são de dois gêneros, os ângulos sólidos podem ser triédricos, tetraédricos ou pentaédricos; e (ii) quando as faces são de três gêneros, os ângulos sólidos só podem ser triédricos ou tetraédricos. Nesta mesma obra podem ser encontradas as dezenove propriedades, com as respectivas demonstrações, e o Teorema de Euler, que provam a existência de apenas 13 Poliedros que atendem a essas características, cujas representações constam da Figura 1.

Os treze Poliedros Arquimedianos podem ser construídos a partir dos Platônicos, sendo onze deles por meio de truncaturas (cortes) nas arestas destes primeiros, e o Cubo Rombo e o Dodecaedro Rombo, por meio de snubificação de Poliedros Platônicos, cujo processo consiste em afastar todas as faces de um Poliedro Platônico, girá-las 45° e preencher os espaços vazios resultantes com triângulos. Dos 11 primeiros, temos que (i) o Tetraedro Truncado se origina a partir do Tetraedro; (ii) o Cuboctaedro e o Cubo Truncado se originam a partir do Cubo; (iii) o Octaedro Truncado se origina a partir do Octaedro; (iv) o Dodecaedro Truncado se origina a partir do Dodecaedro; (v) o Icosaedro Truncado e o Icosidodecaedro se originam a partir do Icosaedro. Os quatro últimos são obtidos a partir de truncaturas nas arestas de dois poliedros, sendo primeiramente truncado um Platônico, obtendo-se assim um Arquimediano, e em seguida esse novo Poliedro recebe uma nova

sequência de truncaturas, obtendo-se um outro Poliedro Arquimediano, ou seja: (vi) a partir do Icosaedro obtemos o Icosidodecaedro e a partir deste, obtemos o Icosidodecaedro Truncado; (vii) a partir do Cubo obtivemos o Cuboctaedro e a partir deste podemos obter o Rombicuboctaedro e o Cuboctaedro Truncado; e (viii) a partir do Icosaedro obtemos o Icosidodecaedro e a partir deste obtemos o Rombicosidodecaedro.

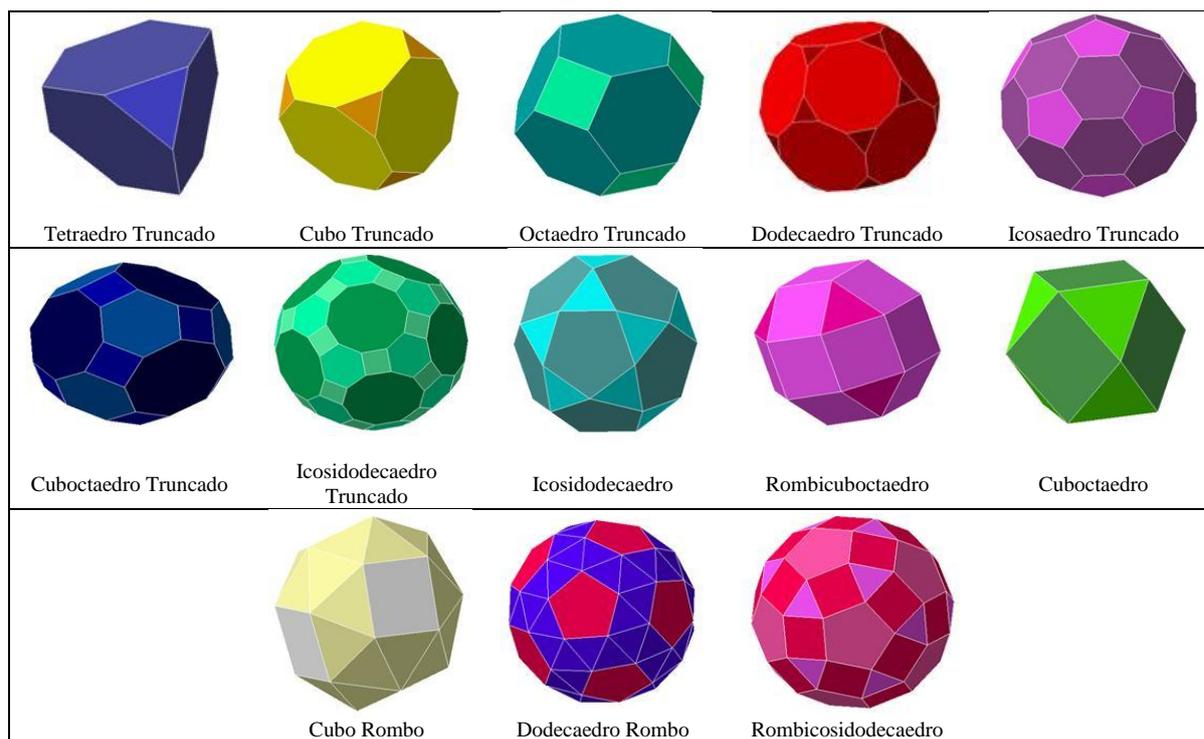


Figura 1: Os treze Poliedros Arquimedianos.

Para Almeida (2010),

O estudo dos sólidos de Arquimedes, conhecidos também por sólidos semi-regulares [sic], pode se tornar evidente e justificável segundo os aspectos de contextualização e interdisciplinaridade como “princípios condutores da organização curricular”, uma vez que estabelecem conexão com outras áreas do conhecimento (biologia, arte, arquitetura, cartografia,...) e suas representações fazem parte do nosso contexto sociocultural. (p.35).

Segundo a mesma pesquisadora, o estudo dos Poliedros Arquimedianos no Brasil é pouco explorado, pela dificuldade relacionada com a visualização e representação dos mesmos, que necessitam da compreensão das propriedades de geometria espacial.

3. A Utilização de Materiais Manipuláveis nas Aulas de Matemática

Nas escolas os professores se deparam com materiais manipuláveis, mas nem sempre demonstram conhecimento para explorá-los de maneira adequada. Pensamos que os materiais manipuláveis caracterizam uma possível alternativa para auxiliar as aulas de matemática, pois, se bem explorados, podem promover uma aula interativa, incentivando a busca, o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação, instigando os alunos na elaboração de perguntas, verificação de relações, criação de hipóteses e descobertas.

Na geometria encontramos um campo promissor para a utilização de materiais manipuláveis, visto que em muitas circunstâncias é indispensável a concretização de situações para ajudar os alunos na compreensão dos problemas e dos conceitos. Para Almiro (2004), muitos alunos não aprendem apenas com a demonstração passada pelo professor, sendo necessários alguns materiais para que eles possam manusear, interpretar e verificar suas características. O ato de manipular permite ao aluno experimentar padrões que são essenciais na matemática. É importante salientarmos que a utilização de materiais manipuláveis não garante uma aprendizagem significativa e cabe ao professor o papel de obter bons resultados, encontrando o momento certo para utilizá-lo.

Segundo Fiorentini e Miorim (1990),

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (p. 12).

Cabe salientar que o material mais adequado nem sempre será o visualmente mais bonito e nem o já construído. Muitas vezes, durante a construção de um material o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva.

4. Softwares nas Aulas de Matemática

Outra alternativa interessante para as aulas de Matemática, sobretudo envolvendo Geometria, são os softwares, uma vez que possibilitam visualizações de objetos no espaço, as quais são difíceis de serem reproduzidas por outros meios.

De acordo com Kenski (2010), no ensino que envolve tecnologias de uma forma geral, em nosso caso mais especificamente os softwares, o professor passa a auxiliar os alunos, que por sua vez desenvolvem a criatividade utilizando outros tipos de “racionalidade” como a imaginação criadora, a sensibilidade tátil, a visualização e audição.

Na Geometria encontramos softwares que permitem trabalhar com diversos conteúdos geométricos, nomeadamente alguns destes são: Cabri-Géomètri, Cinderella, Curve Expert, Poly, Régua e Compasso, Geoplan, Cabri 3D. Estes softwares auxiliam na construção de representações geométricas e na exploração dos conceitos que as sustentam e caracterizam. De acordo com Souza (2011), ao utilizarmos softwares adequados para determinados assuntos da Geometria, possibilitamos aos alunos as seguintes etapas do conhecimento:

Visualização, na qual as formas são compreendidas pelas suas aparências; *análise*, a partir de suas propriedades; *ordenação*, pela hierarquização lógica das propriedades; *dedução*, compreensão da Geometria como sistema dedutivo; e *rigor*, apoiado nos diversos sistemas axiomáticos. (p.01).

Assim, com o desenvolvimento de tarefas a partir de softwares, os alunos podem migrar de uma atividade mecânica para uma atividade dinâmica.

O software Poly é um programa *shareware* (funciona por tempo determinado ou apresenta limitações, depois precisa ser comprado), desenvolvido para exploração e construção de Poliedros. O Poly ainda não possui versão em português, mas apresenta uma interface simples de trabalhar e de fácil acesso, podendo ser baixado uma versão de teste/avaliação gratuitamente¹. Pode ser instalado nos sistemas operacionais Windows 95, 98, 2000, XP, Vista e 7. O Poly possibilita estudos dos Sólidos de Platão, Sólidos de Arquimedes, Prismas e Antiprismas, Sólidos de Johnson, Sólidos de Catalan, Dpirâmides e Deltoedros, Esferas e Domos Geométricos. Permite visualizar figuras geométricas tridimensionais de vários ângulos, alterar o tamanho, planificá-las, girá-las, salvá-las como gif² animado, visualizar em projeção paralela ortogonal e colorir com as cores desejadas. Foi desenvolvido para o estudo da Geometria no Ensino Médio, mas pode ser usado no Ensino Superior e cursos de extensão. É caracterizado como software dinâmico e educacional e permite observar propriedades geométricas que dificilmente conseguiríamos utilizando apenas o quadro e o giz.

5. Delineamento Metodológico

As tarefas que aqui discutimos são voltadas para a Educação Básica. Contudo, considerando nossa intenção de validá-las e percebendo que os alunos do último ano de um

¹ <http://www.peda.com/poly/>

² Graphics Interchange Format

curso de licenciatura em Matemática não demonstravam qualquer conhecimento sobre o Poliedros Arquimedianos, optamos por desenvolvê-la com esta turma³. A proposta foi aplicada em 4 aulas da disciplina Metodologia de Ensino de Matemática, a qual era cursada por 11 alunos, sendo 2 aulas realizadas no Laboratório de Informática (LI) e as outras 2, no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) da faculdade.

As atividades foram desenvolvidas em três momentos: (i) investigação dos Poliedros no software Poly, com o objetivo de conhecê-los e fazer generalização de suas propriedades; (ii) exploração de materiais manipuláveis, com vistas a verificar as truncaturas e fazer comparações com os Poliedros Platônicos; e (iii) apresentação escrita da opinião quanto às aulas e os estudos realizados no primeiro e segundo momento.

5. Relato da Experiência

As tarefas apresentadas a seguir tiveram por objetivos (i) mostrar como os Poliedros Arquimedianos podem ser construídos, a partir de truncaturas nos Platônicos, e (ii) discutir as características desses poliedros em termos de suas planificações, faces, arestas e vértices. Os dois tipos de ambientes que discutimos no presente trabalho (o software e o material manipulável) podem contribuir com os dois objetivos. Contudo, destacamos que a utilização de material manipulável esteve mais direcionada ao primeiro, enquanto o segundo se subsidiou do software Poly.

No LI, a turma foi dividida em três grupos aos quais foram entregues uma folha com orientações e tarefas que deveriam ser realizadas e devolvidas ao final da aula, conforme descrito a seguir:

Para realizar este estudo com o software Poly, seguem algumas informações importantes:

- *Os Poliedros Arquimedianos numerados treze são conhecidos por: tetraedro truncado, cuboctaedro, cubo truncado, octaedro truncado, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, icosidodecaedro, icosidodecaedro truncado, rombicuboctaedro, rombicoidodecaedro e cuboctaedro truncado, cubo achatado e o dodecaedro achatado.*
- *Ângulo sólido pode ser definido como aquele que, visto do centro de uma esfera, percorre uma dada área sobre a superfície dessa esfera. Para compreender essa ideia, e de maneira simplista, podemos pensar que, se nos considerarmos no centro de uma esfera que abarca na sua superfície a área visível do céu, o "ângulo de visão" do céu é o nosso ângulo sólido.*
- *Um ângulo plano é a abertura formada por duas semi-retas que se encontram em um ponto.*

³ Turma a qual as duas primeiras autoras do presente trabalho integravam no ano de 2012.

- *Segue a nomenclatura utilizada pelo software Poly: O Tetraedro Truncado, o Octaedro Truncado, o Icosaedro Truncado, o Cubo Truncado, o Dodecaedro Truncado, o Rombicuboctaedro, o Cuboctaedro e o Rombicosidodecaedro aparecem com a mesma nomenclatura. O Dodecaicosaedro aparece como Icosidodecaedro. O Cubo-Rombo aparece como Cuboctaedro Snub. O Dodecaedro-Rombo aparece como Icosidodecaedro Snub. O Cuboctaedro Truncado aparece como Cuboctaedro Rombitruncado. O Icosidodecaedro Truncado aparece como Icosidodecaedro Rombitruncado.*
- 1) *Com o auxílio do software Poly faça a visualização dos Poliedros em: três dimensões, planificação e visão paralela ortogonal. Em seguida responda:*
 - a) *Quantas faces, arestas e vértices cada poliedro possui.*
 - b) *Quantas arestas formam cada vértice. Como se denomina o ângulo sólido formado pelo encontro das arestas no vértice.*
 - c) *A partir da letra (b) responda: quais faces formam os ângulos planos e qual é o valor da soma dos ângulos planos comuns a um dos vértices?*
 - d) *Quais generalizações são possíveis fazer em relação as faces, vértices, arestas e ângulos dos Poliedros?*
 - e) *A partir dessas generalizações é possível estabelecer fórmulas para calcular a quantidade de faces, arestas, vértices, arestas que formam um vértice e a soma dos ângulos planos. Caso a resposta seja sim, escreva estas fórmulas.*

Apenas um grupo conseguiu analisar os 13 Poliedros, mas todos chegaram às mesmas conclusões e generalizações.

Os três grupos conseguiram estabelecer relações entre as faces percebendo que os Poliedros Arquimedianos têm dois ou três tipos de faces, verificando que era válido o Teorema de Euler: $V + F = A + 2$. Também perceberam que a soma dos ângulos planos de cada ângulo sólido são sempre menores que 360° , e que o encontro desses ângulos planos só pode ser triédrico, tetraédrico e pentaédrico. Deduziram e utilizaram a fórmula para encontrar o número total de arestas: $2 \cdot A = F_a \cdot a + F_b \cdot b \dots$, sendo A o número de arestas, F_a a quantidade de faces com a lados, a a quantidade de lados da face a , F_b a quantidade de faces com b lados, b a quantidade de lados da face b , e assim sucessivamente, de acordo com os tipos de faces que compunham o Poliedro.

No LEM foram constituídos os mesmos grupos anteriores e discutidos apenas quatro dos treze Poliedros Arquimedianos, sendo eles: Octaedro Truncado, Icosaedro Truncado, Cuboctaedro e o Cuboctaedro Truncado, a partir de Material Manipulável construído com papel cartão. Neste momento os alunos já conheciam os treze Poliedros Arquimedianos e tivemos por objetivo auxiliar na compreensão de como obter um Poliedro Arquimediano a partir dos Platônicos. Entregamos a cada grupo um Poliedro Platônico e o Poliedro Arquimediano que obtemos ao realizarmos truncaturas nos vértices do primeiro.

Foram disponibilizadas também as pirâmides que surgem ao fazer as trincaturas, para que eles pudessem manipular e montar os Poliedros, conforme exemplificado na Figura 2.

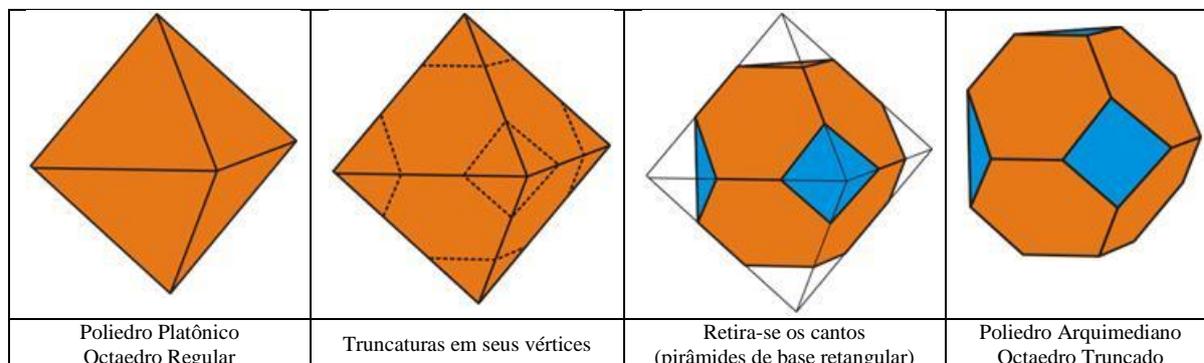


Figura 2: Exemplo de trincaturas no Octaedro Regular que originam o Octaedro Truncado.

Da mesma forma como foi feito no primeiro momento, entregamos uma folha com orientações e tarefas a serem realizadas e devolvidas ao final da aula, conforme segue:

Para realizarmos o estudo com os materiais manipuláveis segue algumas informações:

- *Trincatura: consiste na eliminação de partes de um sólido de forma simétrica, que pode ser feita sobre seus vértices ou sobre suas arestas.*
 - *Os Poliedros Arquimedianos são construídos a partir dos platônicos.*
 - *Apenas onze desses Poliedros são obtidos por trincaturas. Os outros dois são: o cubo achatado (ou cubo rombo) e o dodecaedro achatado (ou dodecaedro rombo), podem ser obtidos por snubificação de Poliedros platônicos, ou seja, consiste em afastar todas as faces de um Poliedro platônico, girá-las 45° e preencher os espaços vazios resultantes com triângulos.*
- 1) *Com o auxílio dos materiais manipuláveis responda:*
- Dos quatros poliedros manipulados, quais foram os tipos de trincaturas e como elas foram feitas.*
 - O que podemos observar a respeito das faces quando fazemos trincaturas diretas em Poliedros Platônicos para dar origem a um Arquimediano que apresenta dois tipos de faces.*
 - O que podemos observar a respeito das faces quando fazemos trincaturas diretas em Poliedros Platônicos para dar origem a um Arquimediano que apresenta três tipos de faces.*
 - Quais diferenças são possíveis encontrar entre os Poliedros Platônicos e os Arquimedianos.*

Conforme um grupo terminava de analisar um Poliedro, trocas de poliedros eram realizadas entre os grupos. Após terminarem cada grupo expôs as respostas e generalizações que chegaram ao estudar as trincaturas e as diferenças que existem entre os Poliedros Platônicos e Arquimedianos, conforme esperávamos.

No terceiro momento, individualmente e sem se identificar, cada aluno escreveu em uma folha sua opinião sobre a aula e os estudos feitos com a utilização do Poly e dos materiais manipuláveis, conforme apresentamos a seguir:

“Não conhecia os Poliedros Arquimedianos, por isso achei muito interessante a atividade”[...]

“O trabalho foi muito interessante, pois é uma sequência do estudo dos Sólidos de Platão. É uma proposta bastante dinâmica” [...]

“[...] Os materiais manipuláveis são uma alternativa, pois sabemos que há alunos que são visuais (software) e outros que são sinestésicos, não deixando de auxiliar na visualização dos conceitos envolvidos”.

“[...] Acredito que esse ensino através desses novos recursos foi de grande valia, não apenas para chamar a atenção dos alunos, mas também para que tenhamos um conhecimento mais concreto e de forma muito mais dinâmica.”

“[...] Acharia muito interessante apresentar este software aos alunos de ensino médio ao trabalhar com geometria espacial. Sobre os materiais manipuláveis, considero maior facilidade em observar as propriedades e características do Poliedro Arquimediano que foi gerado a partir do Platônico.”

O interesse e o entusiasmo com as atividades ficou clara, principalmente após lermos as opiniões deixadas pelos alunos, pois ninguém criticou ou desqualificou o trabalho realizado. Pelo contrário, gostaram do conhecimento adquirido sobre os Poliedros Arquimedianos que até aquele momento eram desconhecidos e gostaram das metodologias utilizadas, que abrem as portas para ensinar outros conteúdos explorando recursos semelhantes.

6. Considerações Finais

Ao realizarmos uma análise sobre tudo que foi feito pudemos perceber que o estudo realizado com o auxílio do software Poly e dos materiais manipuláveis foi bem aceito pelos alunos e se mostrou adequado para exploração das características e propriedades dos Poliedros Arquimedianos.

A utilização do software levou para a sala de aula uma alternativa que constituiu um ambiente investigativo, podendo apontar para a possibilidade de explorar de modo semelhante, outros os sólidos geométricos. Já o material manipulável contribuiu para visualização do sólido em suas dimensões originais, colaborando para a compreensão das truncaturas e das relações existentes entre os Poliedros Arquimediano e os Platônicos.

Em termos de limitações e dificuldades, destacamos que, mesmo com os recursos disponibilizados pelo o software, a contagem das arestas, vértices e ângulos de alguns

Poliedros mais complexos não foi plenamente satisfatória, talvez por uma exploração inadequada da representação em projeção ortogonal. Já com os materiais manipuláveis, acreditamos que a construção de alguns Poliedros (sobretudo os 4 que exigem truncaturas intermediárias) caracteriza alguma complexidade.

Contudo, a partir das experiências vivenciadas, concluímos que o trabalho foi satisfatório, pois nosso objetivo de exploração das propriedades dos Poliedros Arquimedianos e discussão de uma alternativa didática para abordagem deles na educação Básica foi atingido, superando sobretudo as dificuldades encontradas na visualização e manipulação desses sólidos, mostrando que o software Poly e os materiais manipuláveis constituem recursos interessantes para o ensino e aprendizagem de Geometria.

7. Referências

ALMEIDA, T. *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: Um Estudo de Truncaturas Baseadas no Renascimento*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALMIRO, J. *Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática*. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/GTI-Joao-Almiro.pdf>> Acesso em: 04 jul 2012.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F.; CAMPOS, T. M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, n. 27, p. 194-210.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: *Anais da 27ª Reunião Anual da Anped*, 2004, Caxambu/MG. Sociedade, democracia e educação: qual universidade?, 2004. v. 1. p. 1-18.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. *Boletim SBEM*, São Paulo, v.7, p. 5-12, 01 ago 1990.

KENSKI, V. M. *Educação e Tecnologia: O novo ritmo da informação*. Campinas, SP: Papirus, 2007.

RANGEL, A. *Poliedros*. Rio de Janeiro: Escola de Engenharia, 1976.

SOUZA, M. E. S. *Utilização de softwares no ensino da Geometria*. Disponível em: <<http://cmais.com.br/utilizacao-de-softwares-no-ensino-da-geometria>>. Acesso em: 04 jun 2012.