

IDENTIFICANDO RELAÇÕES ENTRE TERNOS PITAGÓRICOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS: APROFUNDANDO CONCEITOS MATEMÁTICOS PARA O 9º ANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Adalberto de Oliveira Freitas
Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu - FACIG
adalberto.freitas@bol.com.br

José Airton Cavalcante
Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu - FACIG
airtonjc@hotmail.com

José Severino de Barros
Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu - FACIG
js.debarros@hotmail.com

Jaelson Dantas de Almeida
Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu - FACIG
jaelson_dalmeida@hotmail.com

Resumo:

É praxe os professores de matemática ministrarem no 9º ano da educação básica o Teorema de Pitágoras. O objetivo deste minicurso é debater com professores e futuros professores de matemática a estreita relação entre o referido teorema e o conceito matemático denominado Terno Pitagórico. Como apoio teórico ao minicurso destacamos Boyer (1974), Filho (1981), Gundlach (1992), Domingues (1998), Eves (2004), Silva (2009) e Cavalcante et alil (2010). A temática versará sobre propriedades, teoremas e demonstrações, e a concepção de que o teorema atribuído aos pitagóricos extrapola uma simples relação algébrica entre medidas dos comprimentos dos lados e a área de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo, presente nos livros didáticos. Destacaremos que os babilônios conheciam pelo menos quinze conjuntos de ternos diferentes. Abordando os Ternos Pitagóricos, apresentamos subsídios para enriquecer o cotidiano em sala de aula trazendo elementos que auxiliarão o processo de ensino-aprendizagem de conceitos de matemática.

Palavras-chave: Ternos pitagóricos, Teorema de Pitágoras, História da matemática.

1. Introdução

Iniciamos nossas reflexões lembrando que todos os professores de matemática que atuam na educação básica desenvolvem com seus alunos no 9º ano (8ª série) do ensino fundamental o trabalho sobre o conhecido Teorema de Pitágoras.

Como explorar em sala de aula com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental o Teorema de Pitágoras de forma significativa?

O professor em geral segue as orientações dos livros didáticos para planejar suas aulas e uma seqüência bastante utilizada é:

- apresenta o personagem da História da Matemática, Pitágoras, como filósofo grego que criou uma escola em sua época;

- apresenta um triângulo retângulo, seus ângulos internos, e passa a denominá-lo como um triângulo pitagórico;

- apresenta como curiosidade o triângulo 3, 4, 5 como triângulo Pitagórico.

- apresenta também (é raro) o triângulo 3, 4, 5 representado por nós dados numa corda e associa esse fato a um procedimento antigo utilizado pelos agrimensores egípcios para resolver problemas de matemática.

- identifica os lados do triângulo 3 e 4 como catetos e o lado 5 como hipotenusa com base no ângulo oposto a cada lado, sendo os lados com medida 3 e 4 opostos a ângulos agudos e o lado com medida 5 oposto ao ângulo reto (90°);

- constrói quadrados sobre os lados do triângulo retângulo;

- destaca os quadrados construídos sobre os catetos;

- rearruma os quadrados construídos sobre os catetos sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa.

- demonstra empiricamente usando procedimentos de corte e colagem das partes dos quadrados menores e sobreposição dessas partes que vale a relação: *a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.*

- resgata a fórmula da área de um quadrado, $A_q = l^2$, onde A_q é a medida da área do quadrado de lado “l”.

- associa as fórmulas das áreas dos quadrados conforme denominação dos lados, a , b e c do triângulo retângulo.

- apresenta a relação algébrica $a^2 = b^2 + c^2$ e a identifica como representativa do teorema de Pitágoras associando-a com uma figura.

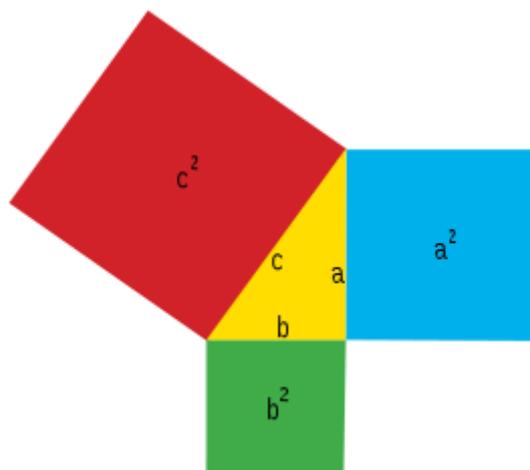


Figura 1. Comumente usada em livros didáticos para ilustrar o Teorema de Pitágoras e a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

- apresenta exemplos de situações problema que validam a relação $a^2 = b^2 + c^2$.
- seleciona situações práticas onde o Teorema pode ser utilizado.
- solicita que o aluno resolva os problemas que constam no livro e considera a aprendizagem finalizada quando o aluno resolve no dia da avaliação situações problema que exigem o uso da relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Percebe-se com essa seqüência que alguns aspectos da História da Matemática são considerados no ensino do Teorema de Pitágoras, mas, entendemos não ser ainda uma construção significativa e sólida para o aluno do 9º ano do ensino fundamental.

Nesse sentido, no que diz respeito ao ensino do referido Teorema em turmas de 9º ano do ensino fundamental, concordamos com Silva (2009) quando destaca que a mecanização do ensino do Teorema de Pitágoras, desprovida do desenvolvimento histórico e da construção significativa, contribui para um ensino deficiente do mesmo.

Apoiados ainda em Silva (2009), consideramos que para responder adequadamente aos diversos desafios que são levantados no decorrer da prática docente, o professor de Matemática, necessita de um conhecimento mais amplo, ou seja, necessita de um maior aprofundamento em relação aos conceitos que necessita ensinar e ao fazer uso da História da Matemática como um fio unificador consegue ligar vários tópicos de matemática e criar um ensino mais significativo para o aluno.

Não pretendemos propor alterações nessa seqüência de ensino do teorema de Pitágoras, mas promover com esta proposta de minicurso reflexões com professores e

alunos de licenciatura em matemática (futuros professores), apresentando possibilidades didáticas de levar para a sala de aula uma discussão que envolve uma estreita relação entre o famoso teorema e o conceito matemático conhecido como Terno Pitagórico.

Em nossa prática acadêmica, como professores formadores de professores da educação básica, percebemos que é possível desenvolver atividades nas disciplinas História da Matemática e Estruturas Algébricas, um aprofundamento de tal temática apresentando algumas propriedades, fórmulas gerais e demonstrações.

Tais relações podem desencadear a concepção de que o teorema atribuído aos pitagóricos extrapola a uma simples relação algébrica sobre as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, como na maioria das vezes é abordado.

Entendemos que se promovermos em sala de aula um trabalho que envolve os Ternos Pitagóricos podemos apresentar novos subsídios para o cotidiano do professor em sala de aula que levando elementos da História da Matemática poderão ser facilitadores no processo de ensino-aprendizagem de conceitos da matemática ampliando a visão do aluno do 9º ano do ensino fundamental sobre o teorema de Pitágoras.

O presente mini-curso tem como público alvo professores de matemática da educação básica, alunos de cursos de graduação em matemática (licenciatura e bacharelado) e alunos do ensino médio que desejam aprofundamento sobre o tema tratado.

2. Objetivos

Nesta proposta de mini-curso pretende-se como objetivo geral:

- apresentar através das propriedades inerentes aos ternos pitagóricos a sua estreita relação com o teorema de pitágoras para triângulos retângulos.

Quanto aos objetivos específicos relacionamos:

- abordar o conceito de terno pitagórico;
- discutir o conceito de terno pitagórico primitivo;
- estudar as fórmulas de pitágoras e de platão que geram ternos pitagóricos;
- apresentar as propriedades dos ternos pitagóricos.

3. Alguns fundamentos teóricos do minicurso

Adotaremos como suporte teórico para o minicurso aspectos da Teoria dos Números, refletindo sobre a origem dos ternos Pitagóricos. Nesse sentido, buscamos na proposta de Cavalcante, Barros e Almeida (2010) quando afirmam que,

A Teoria dos Números é a ciência na qual se estudam propriedades e relações entre os números. Esta é uma área da matemática muito antiga, cujo desenvolvimento como todas as outras partes da ciência, está diretamente ligado ao processo de civilização do ser humano. A pesquisa hoje em Teoria dos Números apresenta-se com muito progresso e suas aplicações estão multiplicando-se rapidamente em vários outros campos da Matemática tanto pura como aplicada. (Cavalcante, Barros e Almeida, 2010, pág. 2).

Destacamos ainda de Cavalcante, Barros e Almeida (2010) que,

O tema Terno Pitagórico é uma homenagem ao filósofo e matemático grego PITAGORAS que nasceu em Samos entre cerca de 570 a.C. e 571 e morreu em Metaponto (sul da Itália) entre cerca de 496 a.C. ou 497^a.C. Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento grega denominada em sua homenagem de pitagórica e seu legado para a humanidade são os Números figurados, Números perfeitos, Teorema de Pitágoras. (Cavalcante, Barros e Almeida, 2010, pág. 3)

Serão considerados no minicurso, conceitos e teoremas apresentados por Alencar Filho (1981) e no trabalho de Rothbart e Paulsell, (1985).

A primeira definição retirada de Rothbart e Paulsell, (1985), diz que,

D1: o terno (a, b, c) chama-se terno pitagórico se e somente se “a”, “b” e “c” forem inteiros positivos tais que $a^2 = b^2 + c^2$. (Rothbart e Paulsell, 1985, p. 50)

D2: Terno pitagórico primitivo. Chama-se terno pitagórico primitivo todo terno pitagórico (a, b, c) tal que $\text{mdc}(a, b, c) = 1$,

Um teorema que será debatido no minicurso diz que:

Teorema 1: (a,b,c) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existirem inteiros positivos u e v, sendo $u > v$, e “u” e “v” primos entre si e são ambos ímpares, tais que, $(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$.

Outro teorema a ser estudado diz que:

Teorema 2: (a,b,c) é um terno pitagórico se e somente se existirem inteiros positivos u e v, $u > v$, u e v de igual paridade, tais que $u + v$ seja um quadrado perfeito e que $(a, b, c) = [u + v, (u - v) / 2, (u + v) / 2]$.

4. Desenvolvimento do minicurso

O minicurso será desenvolvido em dois encontros de duas horas cada um e distribuído em momentos, onde serão desenvolvidas atividades com exposição dos tópicos e resolução de problemas abordando o tema.

O primeiro momento promoverá uma integração onde os participantes deverão informar sua origem, e sua expectativa quanto ao tema do minicurso.

Em seguida será feita a apresentação dos ministrantes.

Logo após, será feita uma explanação inicial em termos de conteúdos relacionados a seguir:

1. Os ternos pitagóricos: conceito e definição
2. Conceito de Terno pitagórico primitivo;
3. A Fórmula de Pitágoras e a Fórmula de Platão;
4. Explorando as propriedades dos ternos pitagóricos e suas aplicações em atividades voltadas para o 9º ano do ensino fundamental;
5. Identificação das grandezas Comprimento e Área, envolvidas em atividades que relacionam os ternos pitagóricos e o teorema de Pitágoras.

Serão apresentadas no minicurso duas propriedades que relacionam os ternos pitagóricos e o teorema de Pitágoras.

Nesse sentido, destacamos as seguintes para demonstração.

P1 - Qualquer número inteiro maior ou igual a três pode ser um dos catetos de um triângulo retângulo de lados inteiros.

P2 - Em um terno pitagórico primitivo necessariamente a hipotenusa é um número ímpar e os catetos são de paridades diferentes.

5. Metodologia do minicurso

Em termos metodológicos, o mini-curso será apresentado através de exposição dialogada com os participantes, priorizando a interação dos mesmos durante todo o desenvolvimento dos trabalhos.

O tempo previsto é de 4 horas distribuídas em 2 encontros de duas horas cada.

Os recursos que serão utilizados durante o minicurso são os seguintes:

- Quadro branco e pincel.

- Uma apostila contendo aspectos da História da Matemática sobre a relação entre os ternos pitagóricos e o teorema de Pitágoras, com os fundamentos teóricos que dão suporte ao minicurso e um conjunto de atividades para resolução pelos participantes e uso posterior em sala de aula do 9º ano do EF.

Durante o desenvolvimento do minicurso os participantes receberão apoio dos ministrantes.

Para ilustrar uma atividade envolvendo o conceito de terno pitagórico selecionamos a situação denominada os TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS E O PERÍMETRO DA FAZENDA (Extraída da apostila de Prática Pedagógica em Matemática 1, elaborada pelo professor Ilydio Sá Pereira da Universidade do Estado do Rio de Janeiro).

- Uma grande fazenda tem uma forma que pode ser visualizada como um quadrado e quatro triângulos retângulos, de forma que cada um dos triângulos tem um cateto coincidente com um dos lados do quadrado. Sabe-se que todos os triângulos são diferentes em tamanho, mas com a propriedade de terem seus lados expressos por um número inteiro de quilômetros. Qual o menor perímetro possível para essa fazenda?

6. Considerações Finais

É previsto ao final do minicurso que os participantes avaliem as atividades apresentadas e se posicionem sobre a possibilidade de inserção no estudo do teorema de Pitágoras a relação com os ternos pitagóricos.

7. Referências

- ALENCAR FILHO, Edgard de, Teoria elementar dos Números, Ed. Nobel, S. P., 1981.
- BOYER, C. História da Matemática. Editora Edgar Blucher Ltda, SP, 1974.
- CAVALCANTE, José Airton; BARROS, José Severino de e ALMEIDA, Jaelson Dantas de., Ternos pitagóricos: aprofundamento de um conceito aplicado na educação básica, minicurso, Anais do VI EPBEM – Monteiro, PB, 2010.
- DOMINGUES, Higino, H., Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, SP, 1998.
- EVES, Howard, Introdução à História da Matemática. Editora da UNICAMP, SP, 2004.
- GUNDLACH, Bernard H., Tópicos de História da Matemática, Números e Numerais, Atual Editora, 1992.

PEREIRA, ILYDIO SÁ, Complementos sobre o Teorema de Pitágoras, apostila de Prática Pedagógica em Matemática 1, disponível no endereço

<http://www.magiadamatematica.com/uerj/licenciatura/15-ternos.pdf>, acesso em 20.09.10.

ROTHBART, ANDRÉ e PAULSELL, BRUCE, Números Pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas, in RPM, nº 7, SBM, 2º semestre de 1985.

SILVA, G. A. Estudo histórico e pedagógico sobre ternos pitagóricos à luz de Eugène Bahier. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil. 2009.