

## UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA COM BASE NA TEORIA DA DIALÉTICA FERRAMENTA-OBJETO

*Edevaldo das Neves Marques*

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste  
[edevalneves@hotmail.com](mailto:edevalneves@hotmail.com)*

*Naísa Camila Garcia*

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste  
[naisacamila@hotmail.com](mailto:naisacamila@hotmail.com)*

*Tiago Emanuel Klüber*

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste  
[tiagokluber@gmail.com](mailto:tiagokluber@gmail.com)*

### **Resumo:**

Neste texto relatamos nossa experiência como acadêmicos do curso de licenciatura em matemática, futuros professores, sobre a preparação de um plano de aula referente ao conteúdo de trigonometria. Foi um desafio construir um plano de aula que relacionasse o conteúdo matemático específico com o aporte teórico escolhido: a teoria da dialética ferramenta-objeto, ou seja, tivemos que elaborar e adaptar, por meio de um processo investigativo, materiais específicos que permitissem que nossas aulas ficassem de acordo com essa teoria. Para isso construímos uma nova ferramenta, que denominamos *comparador triangular*. O processo de elaboração do referido plano até a sua apresentação exigiu muitas horas de trabalho, mas, também, nos proporcionou aprendizagem, principalmente por termos reformulado problemas clássicos do ensino de trigonometria, usando materiais construídos por nós mesmos, o que permitiu esclarecer a nossa ação para com o ensino e a aprendizagem deste conteúdo.

**Palavras-chave:** Trigonometria; dialética ferramenta-objeto, plano de aula.

### **1. Introdução**

Durante o ano letivo de 2012 tivemos nosso primeiro contato com as teorias didáticas. Ao cursarmos a disciplina de Didática Aplicada ao Ensino de Matemática realizamos leituras de diversos textos sobre teorias didáticas referentes a abordagens de conteúdos matemáticos, as quais vão muito além dos métodos tradicionais de ensino. Muitos desses textos são de autores renomados como Guy Brousseau, Gaston Bachelard, Ag Almouloud Saddo, entre outros. A abordagem utilizada pelo professor da referida disciplina era baseada nas teorias dos autores citados e, por conta disso, a turma toda ficou um pouco “perdida”, pois não estávamos acostumados com as metodologias que visam à participação direta do aluno, durante o processo de ensino, de modo que ele seja o autor do próprio conhecimento.

No entanto, mesmo com esse trabalho, muitos dos colegas ficaram, ao final do ano letivo, descrentes da utilização desses métodos em sala de aula, outros acreditaram que podem auxiliar e minimizar os problemas de ensino e de aprendizagem. Nós consideramos que esses métodos podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Desse modo, assumimos que podemos melhorar o nível de aprendizagem da matemática partindo de metodologias que vão muito além da tradicional, explorando conteúdos através da prática e permitindo, de forma construtiva que, os alunos reflitam sobre o que estão aprendendo. Além disso, assumimos que somente a partir de muito trabalho será possível haver alguma melhoria na Educação Básica de Matemática em nosso país. Não queremos com isso dizer que os professores atuantes não desenvolvam um bom trabalho, pelo contrário trabalham e muito, porém precisamos investir na reflexão e revisão dos métodos de ensino e das políticas educacionais. Enfim, queremos dizer que com muito esforço e vontade tentamos fazer um plano de aula que ficasse de acordo com aquilo que já havíamos estudado, não só no que diz respeito à teoria, mas também tivemos como referência as aulas práticas ministradas, pelo professor da referida disciplina.

## **2. A escolha do conteúdo**

A ideia do trabalho surgiu no início do segundo semestre do ano letivo de 2012, a proposta do professor foi a seguinte: deveríamos preparar e apresentar um plano de aula, de algum conteúdo matemático, que estivesse de acordo com pelo menos um dos referenciais teóricos estudados até aquele momento. Então formamos uma dupla, Edevaldo e Naísa, devido ao interesse pelo mesmo conteúdo, no caso trigonometria.

Inicialmente pensamos em preparar um plano de aula para falarmos tanto de trigonometria no triângulo retângulo quanto de trigonometria no círculo trigonométrico. Porém, percebemos que o tempo para apresentação, duas horas-aula, era insuficiente para tanto conteúdo. Por conta disso, decidimos preparar uma aula apenas sobre trigonometria no triângulo retângulo.

Após escolhermos o conteúdo, passamos para a próxima etapa que foi organizar nossas ideias para que pudéssemos escrever o plano de aula propriamente dito. Essas ideias estavam claras, pois queríamos trabalhar com materiais concretos de modo que o procedimento metodológico estivesse de acordo com a teoria dialética ferramenta-objeto. A escolha do procedimento metodológico se deu em função de alguns materiais que já conhecíamos, do conhecimento de trigonometria e da teoria que havíamos estudado com

bastante ênfase, conforme já mencionamos: a dialética ferramenta-objeto (ALMOULOU, 2007).

Esta teoria é, em poucas palavras, um processo cíclico que organiza os papéis do docente e dos alunos, no qual o conhecimento ora ocupa papel de ferramenta para resolver problemas, ora de objeto, dentro da construção de certo saber organizado. Esse processo cíclico pode ser dividido em etapas. Primeiramente, o professor, ao propor uma situação-problema, deve se atentar para que o enunciado contenha informações, a partir das quais os alunos possam mobilizar seus conhecimentos antigos. Nesta etapa o conhecimento ocupa papel de ferramenta. Porém, esse conhecimento que o aluno já possui não é o suficiente para resolver na totalidade tal problema, pois o objeto a ser ensinado é o conhecimento necessário, ao qual ainda não foram apresentados. O docente pode fazer uma discussão para saber o que os alunos fizeram para tentar resolver tal problema, com isso, ele identifica se os alunos dominam os conhecimentos antigos necessários para então adquirirem o novo. Levando em consideração os conhecimentos antigos e o problema, o professor apresenta o conhecimento novo, explicitamente ou implicitamente, e com esse novo conhecimento o aluno é capaz de resolver o problema inicialmente proposto. Neste caso, o conhecimento ocupa papel de objeto. Quando o aluno se apropria do conhecimento novo, este deixa de ser objeto, e passa a ser ferramenta, tornando-se conhecimento antigo.

Contudo a dificuldade reside justamente em apresentar este novo objeto, pois não deve ser simplesmente “dado” ao aluno. Deve-se proceder de modo a fazer com que o aluno pense junto com os demais colegas e o professor, e que ele mesmo possa perceber que este novo objeto realmente será necessário e válido.

Desse modo, focamos na seguinte indagação: nós como professores não deveríamos esboçar, inicialmente, a teoria sobre o conteúdo matemático em questão, mas sim criar meios para que os alunos, no caso nossos colegas de turma, concluíssem por meio do uso dos instrumentos trazidos pelos professores, os conceitos sobre trigonometria no triângulo retângulo. Com isso, decidimos que os professores fariam a mediação entre os alunos e o conteúdo proposto, note que nesta aula quem iria trabalhar para entender o conteúdo seriam os próprios alunos. Estes, por sua vez, retomariam as ferramentas e fariam diversos testes para verificar a validade dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. O desafio estava posto: “traduzir” a teoria em uma ação pedagógica e didática, inclusive com o uso de materiais didáticos.

### 3. Preparação da atividade.

Inicialmente nossa atividade estava focada em utilizar instrumentos tais como régua, compasso, trena e transferidor, os quais são muito conhecidos dos estudantes de matemática. Outros instrumentos, possivelmente não tão conhecidos, foram confeccionados por nós mesmos. Um deles foi baseado no astrolábio conforme figura 1. Esta é uma ferramenta utilizada há séculos e serve para calcular a distância de um objeto fixo e inacessível, utilizando-se dos princípios da trigonometria no triângulo retângulo. O outro instrumento será chamado aqui de tábua angular conforme a figura 2. A qual permite a comparação de diferentes segmentos de reta.

É relativamente simples construir um aparelho semelhante ao astrolábio. Basta ter um transferidor de acrílico, cola, barbante e um tubo, no nosso caso utilizamos um canudo descartável.

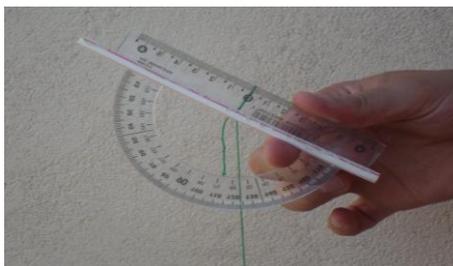


Figura 1- Astrolábio confeccionado  
Fonte: Os autores.

Já a tábua angular requer um pouco mais de trabalho para confeccioná-la e os materiais utilizados são: isopor, cola, papel milimetrado, um transferidor (que pode ser feito ou impresso em um papel transparente), barbante e alfinetes.

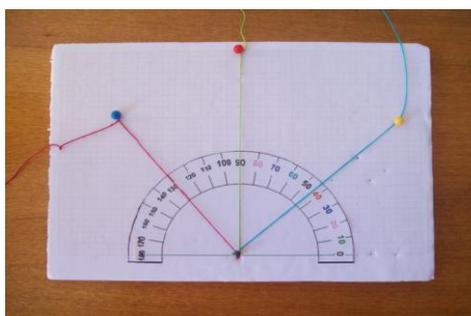


Figura 2 - Tábua Angular  
Fonte: Os autores.

Primeiramente, construímos um protótipo de cada instrumento que queríamos utilizar e testamos de modo que nossa aula ficasse de acordo com o procedimento metodológico escolhido. Concluímos que a aula deveria ser iniciada a partir de uma situação-problema e os alunos iriam utilizar os instrumentos construídos juntamente com o

conhecimento que tinham para se apropriarem do conteúdo proposto (novo implícito). Nós, como professores, ficaríamos auxiliando os alunos para que fizessem uso correto dos instrumentos e, também, faríamos as perguntas que os levassem a refletir sobre o conteúdo proposto. Por fim, escrevemos um esboço da aula e procuramos o professor para orientação.

#### **4. Primeiras orientações do professor.**

Com os instrumentos em mãos e o esboço da aula escrito fomos falar com o professor para que pudesse nos orientar, só assim poderíamos melhorar aquilo que não estivesse de acordo com a proposta metodológica. O professor gostou da nossa aula e disse que estava de acordo com o procedimento metodológico escolhido, pois partíamos de uma situação-problema. Com ela tínhamos o objetivo de fazer o aluno refletir e movimentar conhecimentos que já havia estudado para atingir um novo conhecimento, no caso trigonometria no triângulo retângulo. Apesar de o professor ter dito que havia gostado de nossa aula, do modo como ela estava, sugeriu que poderíamos melhorá-la, indicando algumas maneiras.

Inicialmente, a aula permitia ao aluno movimentar conhecimentos antigos e com o auxílio do professor poderia vir a entender o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo. No entanto, o conceito de ângulo poderia ficar aquém do entendimento lógico, sem uma explicação, ou simplesmente utilizaríamos as noções de ângulos nos cálculos sem favorecer o aluno a possibilidade de pensar nesse conceito tão importante da matemática.

Uma pergunta feita pelo professor fez com que entendêssemos a importância de não utilizar o conceito de ângulo diretamente e sim deixar o aluno concluir, nesse processo dialético, como poderia utilizar a ideia de ângulo para calcular a altura da sala, assim como poderia utilizar semelhança entre triângulos e chegar à ideia das razões trigonométricas. A referida pergunta foi a seguinte: “de que tipo de medida trata o ângulo”. Pensamos um pouco para responder que se tratava de “medida circular”, ou seja, medidas de ângulos em uma circunferência. Dessa maneira, o professor levou-nos a refletir sobre as razões trigonométricas, que de fato existe uma relação entre as medidas lineares e as medidas circulares (trigonométricas) e são justamente essas relações que devemos, como professores, ensinar, de certo modo, que o aluno compreenda.

Movimentar tais conceitos relacionando medidas circulares e lineares não é uma tarefa simples, por isso o professor deu outra dica, orientou-nos a criar outro instrumento. Este viria antes dos demais, sendo um intermediário entre conhecimentos considerados ferramentas e o conhecimento que queríamos apresentar. Este instrumento deveria ser capaz de fazer o aluno movimentar vários conhecimentos sobre geometria, proporção, frações e operações básicas e possibilitar encontrar a solução da situação-problema que propusemos sem precisar, necessariamente, utilizar-se do conceito de ângulo. Após as orientações que recebemos, pensamos como deveríamos proceder para confeccionar tal instrumento.

### **5. Desenvolvimento do “novo” instrumento didático**

Após as orientações do professor, confeccionamos um modelo, feito de papel, do instrumento que iríamos utilizar. O modelo construído ficou aquém dos demais instrumentos que iríamos utilizar, embora não fossem de precisão e sim de aproximação. Esse novo modelo ficou ainda a desejar em questão de aproximação, ao testá-lo obtivemos uma diferença maior do que a considerávamos tolerável. Com o instrumento feito de papel não conseguimos a aproximação que esperávamos, portanto procuramos um meio de melhorá-lo, foi aí que tivemos a ideia de confeccioná-lo utilizando materiais mais rígidos que o papel.

Separamos todos os materiais que tínhamos com essas características tais como pedaços de madeira, metal, parafusos e tubos de plásticos. Com os materiais e as ferramentas adequadas em mãos recortamos os pedaços de madeira e moldamos conforme o modelo de papel que tínhamos feito anteriormente. Chamamos o novo objeto de *comparador triangular*, figura 3, pois basicamente é da comparação de triângulos retângulos que se obtém uma medida procurada mesmo que esta seja inacessível do ponto de vista da altura. Deve-se deixar claro que os triângulos a serem comparados são semelhantes e ao fazer tal comparação para obter um resultado é preciso conhecer três medidas, duas do instrumento e uma referente ao objeto a ser medido, para encontrar uma quarta medida. Dessa forma os alunos deverão ter dominado os conceitos de proporcionalidade, que servem também como ferramenta.



Figura 3: Comparador triangular.

Fonte: Os autores.

Note que não mencionamos ângulos, mas não pelo fato de darmos pouca importância a questão, e sim porque queremos que os próprios alunos percebam que existem relações entre ângulos e as medidas dos lados dos triângulos, bem como que essas medidas são proporcionais quando se tem um ângulo qualquer fixo. O trabalho de institucionalização sobre as razões trigonométricas ocorrerão posteriormente.

## 6. Reorganização da atividade

Como o “novo” instrumento estava pronto, era necessário testá-lo. Ao realizar o teste do *comparador triangular* ficamos satisfeitos com os resultados que obtivemos, pois as aproximações foram aceitáveis no que se refere às medidas dos objetos diretamente mensurados. Esse tipo de ação é, em certo sentido, fazer e compreender matemática.

Após testar e aprovar o *comparador triangular*, reordenamos nosso plano de aula, que agora não seria iniciado com uma situação-problema que utiliza a noção de ângulos diretamente. A atividade proposta, consistia em medir a altura da sala, junto com o instrumento, deveria fazer o aluno usar alguns conhecimentos prévios. Se fizéssemos como havíamos planejado inicialmente, com os instrumentos que tínhamos, teríamos que partir diretamente do conceito de ângulo para podermos encontrar a solução. Da forma que reorganizamos o aluno é quem usaria seus conhecimentos e a partir deles poderia concluir as relações com ângulos, com a mediação do professor que auxiliaria na compreensão das proporcionalidades.

## 7. Outras orientações do professor

Como havíamos seguido as orientações do professor, fomos encontrá-lo novamente para que pudesse nos reorientar. Na nova conversa apresentamos o novo instrumento que utilizaríamos e como ficou nossa aula após a reformulação, assim como a ordem de apresentação, mostramos todas as etapas que seriam seguidas.

Na primeira etapa, apresentaríamos uma situação-problema e depois adaptaríamos para facilitar medindo a parede da própria sala de aula. Na segunda etapa, mostramos o

novo instrumento e explicamos como ele funcionava. Nas etapas seguintes seriam utilizados os outros instrumentos, feitos os cálculos para encontrar a solução da nossa situação-problema e também foi aberto espaço para discussão.

O professor deu seu parecer sobre a aula, pediu para corrigirmos alguns detalhes em relação à escrita e falou também sobre o procedimento metodológico que havíamos escolhido – dialética ferramenta-objeto, que no caso conseguimos uma aproximação da teoria à prática propriamente dita. Por fim, concluímos que nosso plano de aula estava pronto para ser posto em prática, ou melhor, para ser apresentado.

### **8. Apresentação**

Após trabalharmos várias horas na preparação dos materiais, chegou o dia de mostrarmos o que havíamos feito. A atividade foi direcionada à Educação Básica, porém foi apresentada para os acadêmicos do curso de licenciatura em matemática o que permitiu adiantar algumas coisas. Por exemplo, não precisamos retomar conteúdos que seriam utilizados e também os alunos já estavam familiarizados com a maioria dos instrumentos que seriam utilizados.

Iniciamos a aula com a situação-problema, mencionada anteriormente, fazendo a seguinte pergunta: se fosse necessário calcular a distância de um objeto que se encontra em um lugar inacessível do ponto de vista da altura, de que maneira os alunos poderiam proceder e que ferramentas matemáticas iriam utilizar? Como se tratava de acadêmicos do curso de licenciatura em matemática possuíam conhecimentos necessários que permitiam a realização de tais cálculos, porém não era esse nosso objetivo, sabíamos que usar uma ferramenta matemática mecanicamente e compreender um conceito matemático eram coisas distintas.

Nosso foco era fazer com que os alunos entendessem que não se pode utilizar exclusiva e mecanicamente a noção de ângulo em trigonometria e também que não há necessidade alguma em decorar tabelas que estejam relacionadas com ângulos. Deixamos claro que nosso objetivo era fazer os alunos compreenderem que quando fixamos um ângulo qualquer, podemos relacionar infinitos triângulos semelhantes com esse ângulo, desde que respeitemos o teorema de Tales que fala sobre retas paralelas. Como nosso conteúdo estava relacionado com triângulo retângulo ficava ainda mais fácil relacionar as medidas dos lados dos triângulos com o ângulo fixo.

Embora os acadêmicos tivessem noção de quais ferramentas matemáticas poderiam utilizar e de algum modo dominavam essas ferramentas, para encontrar a solução da situação-problema, quando apresentamos o novo instrumento emergiram curiosidades e dúvidas. Explicamos a turma como funcionava o novo instrumento e convidamos um a um para ajudar no experimento, ou seja, medir a altura do chão ao teto da parede da sala de aula.

Eles participaram da seguinte forma: primeiro posicionamos uma mesa onde foi apoiado o instrumento. Depois, com a ajuda de um dos alunos, medimos a distância da parede, ao extremo do instrumento, e encontramos 2,5m. Na sequência da apresentação vários alunos vieram ajudar a posicionar o instrumento, direcionando a parte que não estava apoiada sobre a mesa em direção à interseção da parede com o teto. Depois de regulado o instrumento corretamente, com as três placas paralelas fixadas, fizemos no quadro um desenho que traduzia, desconsiderando a escala, o que estávamos realizando conforme figura 4. No desenho aparecia um segmento de reta vertical, medindo  $x$ , simbolizando a parede, outro segmento, perpendicular ao primeiro e medindo 2,5m, simbolizava a distância da parede até o extremo do instrumento. A sua altura em relação ao chão era de 86 cm e por fim obtivemos um triângulo que, no desenho, representava a distância da interseção da parede com o teto até o extremo do instrumento.

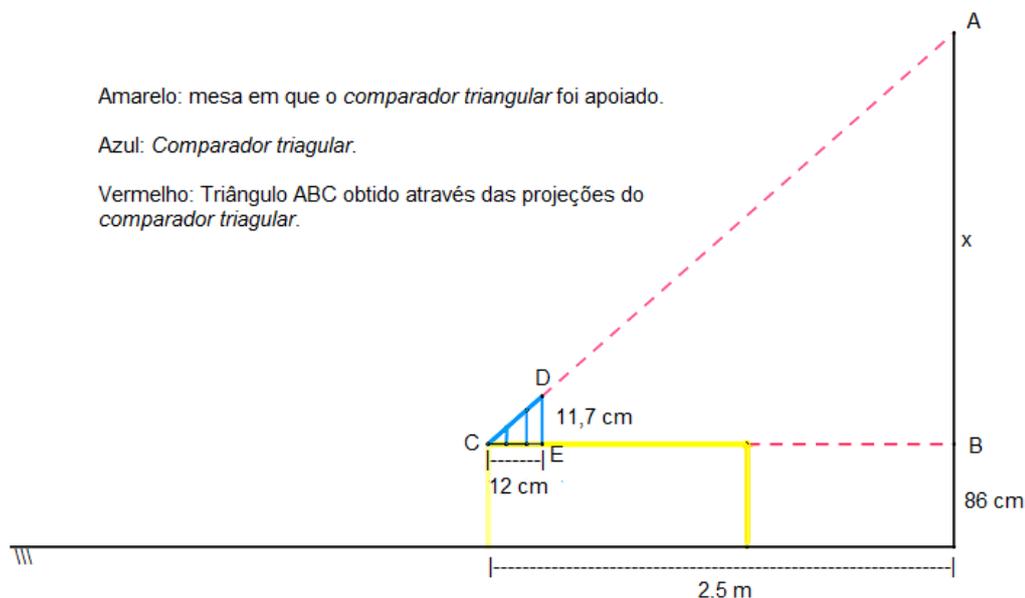


Figura 4: Desenho construído com base nas medidas da sala e do *comparador triangular*.

Fonte: Os autores.

Uma vez realizadas essas ações, fizemos a seguinte pergunta: temos uma medida, 2,5m do instrumento à parede. Como devemos proceder para encontrar a medida  $x$  (altura)? Não demorou muito para os alunos perceberem que era possível comparar os triângulos definidos pelo instrumento, com aquele triângulo que desenhamos no quadro. Para tanto, bastava tomar as medidas, utilizando uma régua e desenhar um novo triângulo com essas medidas, deixamos a tarefa de medir com os alunos. Em seguida fizemos diversas perguntas sobre as razões entre as medidas dos triângulos e aos poucos fomos conduzindo os alunos a entenderem de que se tratavam essas razões e, ainda, como eram conhecidas há muito tempo e a notação que receberam: seno, cosseno e tangente, em função do ângulo fixado, para facilitar a utilização dessas razões. Enfim, depois de decorrido mais de 50 minutos da aula, os alunos encontraram a medida da altura da parede, alguns obtiveram 3 cm de diferença em relação a medida original, que era de 3,3 m, outros conseguiram aproximar ainda mais, 1cm de diferença, a variação ocorreu dependendo de quantas casas decimais foram consideradas.

Esse problema de calcular alturas, conhecendo a sombra, ou a distância do observador ao objeto (IEZZI, 1973), é um dos problemas clássicos do ensino de trigonometria, entretanto muitas vezes esses cálculos são feitos mecanicamente ou são utilizados apenas para ilustrar. O professor faz um exemplo no quadro e os alunos resolvem os outros seguindo o exemplo dado. O que pretendíamos com essa reformulação é justamente fazer com que o aluno entenda o que está sendo feito, por isso partimos de um conteúdo que os alunos já conheciam: semelhança de triângulos, para calcular a altura usando trigonometria, e fazer isso implicitamente.

Na sequência, pedimos para a turma se organizar em duplas. Entregamos uma tábua angular para cada dupla, com as devidas orientações de como utilizar esse instrumento, pedimos para as duplas marcarem um ponto, simbolizado por um alfinete colorido. Depois disso, pedimos para esticarem um barbante, também colorido, partindo da origem do transferidor até o ponto marcado. Em seguida orientamos os alunos a esticarem o mesmo barbante representando outra reta perpendicular à reta que passa pelos ângulos  $0^\circ$  e  $180^\circ$  (projeção do ponto). Com isso formou-se um triângulo retângulo, além disso, os alunos deveriam traçar outro triângulo retângulo semelhante ao primeiro. Feito isso, os alunos puderam comparar as razões entre as medidas dos lados dos triângulos.

Assim, os alunos puderam perceber que essas medidas eram constantes e o nosso trabalho foi apenas apresentar a notação usada para cada razão, sendo que essas razões

dependem da medida fixa do ângulo, pois variando proporcionalmente os lados a razão se mantém e é diretamente relacionada à medida do ângulo. Por isso, podemos usar um triângulo considerado “pequeno” para comparar com um triângulo “muito grande”, foi o caso do *comparador triangular* com o triângulo formado pela parede da sala.

Para finalizar nossa apresentação, voltamos para nosso problema inicial: medir a altura da sala de aula. Dessa vez, usaríamos o instrumento similar ao astrolábio, que pode ser construído com as noções que trabalhamos. Pedimos para um aluno olhar a partir do canudo do “astrolábio”, a interseção da parede e o teto, anotamos o ângulo formado, a distância do aluno a parede e também a distância do chão ao olho do aluno. Com essas informações e com a tábua angular os alunos foram capazes de medir a altura da sala novamente e foi equivalente ao que realizamos com o *comparador triangular*.

### **9. Considerações Finais**

Este trabalho nos proporcionou a experiência de aproximar, de maneira aceitável, a teoria da prática, não foi uma tarefa fácil, mas foi muito importante para nosso processo de formação como futuros professores. Sabemos que, como professores, devemos estar sempre atentos às inovações em Educação Matemática e sempre dispostos a enfrentar o novo, mesmo que para isso seja necessário criar novos materiais ou instrumentos. como o que elaboramos, e apresentamos neste artigo, o *comparador triangular*.

O seu processo de construção fez com que, através das orientações do professor, observássemos o que tínhamos em mãos, coisas comuns, mas que poderiam ser usadas para o ensino e a aprendizagem da matemática.

### **10. Referencias**

IEZZI, Gelson et al. *Matemática 1º Série 2º Grau*. São Paulo, Atual Editora Ltda, 1973.

SADDO, A. A. Atividades para o ensino de matemática na perspectiva da Didática da Matemática. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 10. 2009, Guarapuava. **Anais...** Guarapuava: UNICENTRO, 2009, p. 992-1002.