AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA ARTE E NA MATEMÁTICA

Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá
vsfranco@uem.br

Resumo:
A proposta da palestra é abordar algumas Geometrias que não são Euclidianas, por meio de algumas obras de arte selecionadas. A ideia é mostrar o estudo geométrico realizado por artistas para realizar suas obras, bem como a importância da própria obra para o estudo das Geometrias. As Geometrias escolhidas são aquelas que constam nas Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná, a saber, a Topologia, a Geometria Elíptica, Geometria Projetiva e a Geometria dos Fractais. Para poder realizar o estudo, utiliza-se algumas vezes a história, outras, os próprios conceitos da Geometria a ser estudada.

Palavras-chave: Educação Matemática; Geometria; Arte; Interdisciplinaridade.

1. Introdução

A opção por apresentar aspectos das Geometrias que não são Euclidianas por meio da Arte é que acreditamos no que escreve Gusmão (2013, p. 46), “No processo educacional como um todo, e, principalmente, no ensino da matemática, os aspectos do ‘método estético’, devem ser ressaltados, ou seja, deve-se estimular a percepção, a criatividade, a imaginação”.

Sendo assim, a proposta da palestra é mostrar o estudo geométrico realizado por artistas para realizar suas obras, bem como a importância da própria obra para o estudo das Geometrias.

Por uma opção histórica a palestra se iniciará com a apresentação de aspectos de obras de Brunelleschi que, para Proença (2008, p.93), foi o “exemplo de artista completo do Renascimento, ele foi pintor, escultor e arquiteto, além de dominar conhecimentos de Matemática e Geometria e de ser grande conhecedor da poesia de Dante”.

Enquanto Brunelleschi desenvolveu a prática experimental da perspectiva, Alberti teorizou os princípios desta, ou seja, a passagem da prática experimental da perspectiva à teorização dos seus princípios é atribuída a Leon Battista Alberti.

> O arquiteto Filippo Brunelleschi mostra, ou demonstra a existência de uma regra, mediante a experiência que teria realizado em Florença, por volta de 1413, sobre dois pequenos painéis, um representando a praça e o palácio da Senhoria e o outro, a vista exterior do batistério San Giovanni de Florença. Porém, é Leon Batista Alberti quem dá à esta regra a primeira formulação, sendo assim, consideram-no como o teórico da perspectiva entendida como técnica de representação pictural (FLORES, 2003b, p.58).

Mas, quem incluiu a perspectiva em uma geometria foi Girard Desargues, arquiteto, engenheiro militar e matemático, que lançou mão da perspectiva renascentista para publicar em 1639, a obra *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, na qual, demonstra que apesar das seções cônicas mudarem de forma e tamanho conforme o plano de incidência, certas propriedades não são alteradas. A partir disso desenvolve teoremas sobre involução, conjuntos harmônicos, homologia, perspectiva, polos e polares.

Contudo, com a nova geometria cartesiana, escrita por Descartes na mesma época, e pelo pensamento de Kant, essa obra é rejeitada por matemáticos da época.

A obra de Desargues foi retomada e finalmente reconhecida, por meio da publicação de Jean Victor Poncelet intitulada *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras* no ano de 1822, que transforma a perspectiva em parte de uma nova geometria hoje denominada Geometria Projetiva ou Geometria da Visão.

De acordo com Coxeter (1968), a Geometria Projetiva é um modelo da Geometria Elíptica, cuja história, começa com Riemann e que será apresentada brevemente neste texto, na seção que trata da Geometria Projetiva.

O objetivo de ter escrito este pequeno relato histórico da Geometria Projetiva, foi mostrar como a sua construção possui uma forte relação com a arte.

Já a Geometria Hiperbólica, que é reconhecida como a primeira Geometria que não é Euclidiana, foi e é utilizada na arte, conforme será apresentado na palestra, juntamente com sua construção histórica, que será brevemente comentada em uma seção deste texto.

A Topologia é uma Geometria que não é Euclidiana, pois alguns espaços ditos topológicos nem métrica possuem, mais do que isso, nessa Geometria, uma circunferência, um quadrado, um triângulo, entre outras figuras Euclidianas, são todas iguais. Mas isso pode ser extremamente útil na arte conforme será apresentado.

Evidentemente, não é possível em um curso em que se pretende trabalhar com arte e Geometrias que não são Euclidianas, não falar da Geometria dos Fractais, pois várias figuras obtidas por meio de sua estrutura matemática são verdadeiras obras de arte, como muitos já devem ter visto em páginas da internet, em livros, revistas, jornais etc. Mas como surgem essas "obras de arte"?

2. A Geometria Projetiva e a Geometria Elíptica

Conforme apresentado na introdução, a Geometria Projetiva nasce a partir da ideia de Perspectiva. Apesar da Perspectiva já ser utilizada, intuitivamente – não se encontrou até hoje registros de técnicas para sua utilização – desde a Antiguidade, é no renascimento que a pesquisa científica sobre a visão, dá lugar a uma ciência da representação, alterando de modo radical o desenho, a pintura e a arquitetura (DUCHER, 2001). As conquistas da geometria e da ótica ensinam a projetar objetos em profundidade pela convergência de linhas aparentemente paralelas em um único ponto de fuga.

De acordo com Flores (2002), foi o arquiteto Filippo Brunelleschi, por volta de 1413, quem realizou uma experiência, a partir de dois pequenos painéis pintados, um com a praça e o palácio da Seigneurie e, a outra, uma vista exterior do batistério San Giovanni de Florença. O objetivo era mostrar que cada um dos painéis pintados coincidia com a imagem real. Para isso, o espectador deveria colocar diante de um espelho o quadro representando o batistério de Florence, por exemplo, e, através de um pequeno orifício feito no quadro, olhar o reflexo em um espelho da imagem pintada. Mas, para perceber a igualdade de imagens, a pintada e a real, era necessário que o espectador se posicionasse exatamente onde o pintor teria se posicionado para realizar a obra. Ainda de acordo com Flores (2002), o relato desta experiência foi redigido mais tarde por Manetti, por volta de 1475.

Walker (2005, p. 209) afirma que "a maior contribuição de Brunelleschi à arte do mundo ocidental foi a redescoberta da perspectiva linear". De acordo com Argan (1999, p.88), "A perspectiva enquanto regra da visão, é, em todo o caso, uma aplicação a *posteriori* ("hoje") da pesquisa de Brunelleschi, que visava como objeto e fim específico não a pintura, mas a arquitetura.

Na introdução, afirmamos que Alberti foi quem teorizou os princípios matemáticos da Perspectiva. Alberti ao considerar um ponto na linha do horizonte para onde convergem retas "paralelas" de uma determinada direção, o ponto de fuga, construiu um método para desenhar corretamente de maneira fácil e prática um quadrado em perspectiva, método este que foi de grande valia para os pintores da época.

A técnica de perspectiva básica, apresentada por Alberti para pintar em uma tela o assoalho de uma sala, consiste em usar retas e pontos que determinam a profundidade, que é o principal aspecto da representação da tridimensionalidade em perspectiva, veja a figura 1 a seguir.

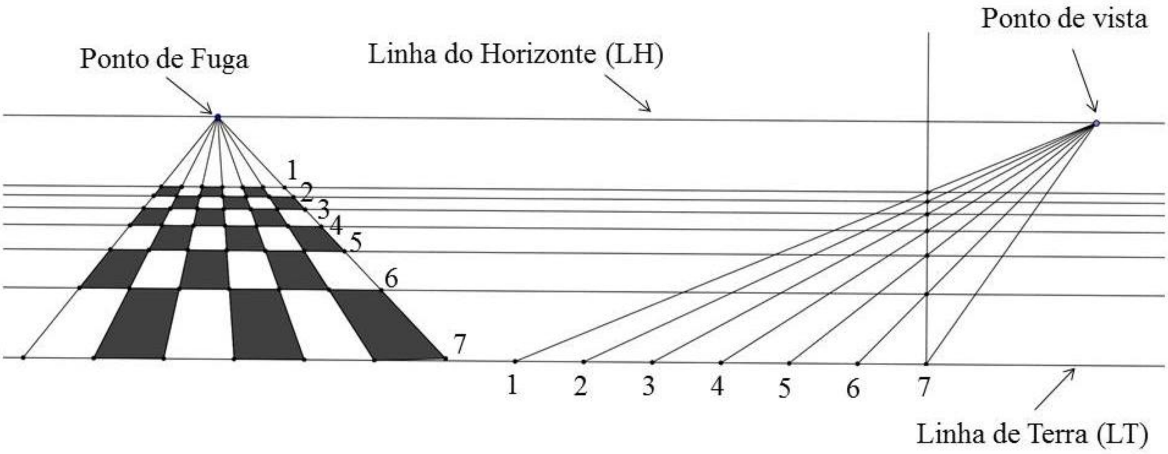

Figura 1 - Perspectiva de Alberti
Fonte: Autor

A figura 2 mostra a técnica de Alberti, que foi utilizada por Beato Angélico, em um quadro pintado entre os anos 1433 e 1434.

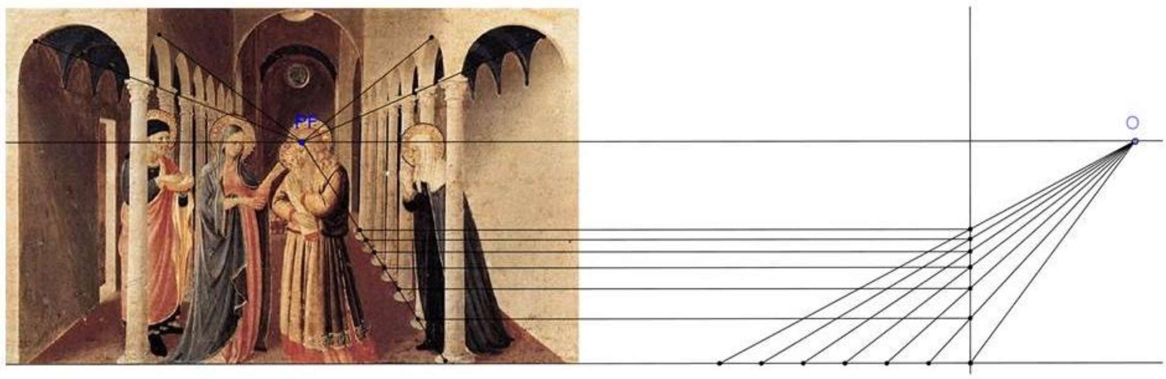

Figura 2 – Annunciation – Beato Angélico
Fonte: da imagem: http://www.wga.hu/art/a/angelico/04/3predel4.jpg
da técnica de Alberti: autor

A perspectiva foi a origem da Geometria Projetiva, geometria essa que não contém retas paralelas, por isso ela é um dos modelos da Geometria Elíptica, conforme afirma Coxeter (1968).

Ainda de acordo com Coxeter (1968), após a construção da Geometria Hiperbólica (que será tratada na próxima seção, e foi a primeira Geometria não Euclidiana, reconhecida como tal), surgiu a possibilidade de novas geometrias, e podemos dizer que a segunda geometria não Euclidiana foi a Geometria Esférica, desenvolvida por Riemann. Ele alterou alguns postulados dos Elementos de Euclides, a saber:

> 1. Quaisquer dois pontos determina ao menos uma reta;
> 2. Uma reta é ilimitada;
> 3. Quaisquer duas retas em um plano se encontra. (COXETER, 1968, p. 11).

Podemos dizer que Riemman desenvolveu a Geometria Diferencial de um espaço esférico, mas foi Klein quem primeiro viu claramente como livrar a Geometria Esférica do seu primeiro "defeito", a saber, o fato de que duas retas poderem passar por dois pontos distintos – pontos antípodas de uma esfera, e a reta uma grande circunferência.

Uma vez na Superfície Esférica, cada ponto determina um único ponto antípoda, e cada figura é assim duplicada nos antípodas, Klein percebeu que seria possível, abstratamente, a identificação de cada par de pontos antípodas, isto é, construir um modelo com um novo conceito de ponto. Nesse modelo, "ponto" seria um par de pontos antípodas na esfera. Agora, a "reta" nesse modelo, não seria mais a grande circunferência, mas sim, a curva obtida por meio da grande circunferência com os pontos antípodas identificados. Já o "plano", é a superfície obtida mediante a identificação dos pontos antípodas da superfície da esfera identificados, cada um, com um único ponto.

Foi a essa modificação feita na Geometria da Superfície Esférica que Klein deu o nome de Geometria Eliptica. Mas, é importante salientar que essa geometria obtida por meio da identificação de pares antípodas na superfície esférica é apenas um modelo, uma representação conveniente, mediante a utilização de conceitos conhecidos.

Um segundo modelo de Geometria Eliptica é obtido identificando cada reta de um feixe por um ponto O. Um terceiro modelo para a Geometria Elíptica Plana pode ser obtido por meio do segundo modelo, considerando a seção do feixe de retas por um plano arbitrário que não contém o ponto O.

Esse terceiro modelo tem a vantagem de que ponto é representado por ponto da Geometria Euclidiana, e reta por retas euclidianas, mas as distâncias e ângulos ficarão distorcidos. Nesse novo modelo, esse fato não gera problemas, pois a geometria o utiliza, a grande preocupação é com o que se vê e não com o que se mede. Essa geometria, portanto, um modelo da Geometria Elíptica, é conhecida como Geometria Projetiva.

3. A Geometria Hiperbólica

Durante meados do século XIX encontramos um exemplo de simultaneidade de descobertas relacionadas às Geometrias não Euclidianas; o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856), sem qualquer contato mútuo e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Saccheri, desenvolveram, independentemente, um novo tipo de Geometria (LOVIS, 2009).

Lobachevsky foi um dos matemáticos que mais contribuiu na construção das Geometrias não Euclidianas. Durante sua vida acadêmica elaborou vários trabalhos relacionados à Geometria. Em um desses trabalhos "On the Principles of Geometry", publicado em 1829, Lobachevsky marcou oficialmente o nascimento da Geometria não Euclidiana.

Na palestra serão analisadas obras que utilizam modelos da Geometria Hiperbólica. O francês Henri Poincaré criou dois modelos para essa geometria, nela será trabalhado o "Modelo do Disco de Poincaré", ou simplesmente modelo de Poincaré, apresentando suas principais características, para compreensão de sua aplicação na arte.

Na figura 3 uma das obras de Escher e na figura 4, algumas retas hiperbólicas no modelo do disco de Poincaré.

Figura 3: Círculo limite IV (1960)
Fonte: http://arteducaoonline.blogspot.com.br/2011/05/o-mundo-magico-de-escher-tem-fila-por.html

Figura 4: mesma obra com algumas retas hiperbólicas no disco de Poincaré
Fonte: retas hiperbólicas: autor

4. A Topologia

A Topologia, diferentemente da Geometria Euclidiana, não se preocupa com quantidade, mas sim com a qualidade dos objetos de estudo.

Noções de longe/perto, de vizinhança; dentro/fora (interior/exterior); aberto/fechado; separado/unido (conexo-desconexo); contínuo/descontínuo; orientado/não orientado, são noções topológicas. De acordo com Borges (2005, p.16), "Claramente, estas noções costumam vir associadas a outras tais como: adjacências (proximidade), ordem etc., as quais, igualmente se incluem no rol das noções topológicas. Quando eu digo: 'estou junto de você', emprego, por assim dizer, uma linguagem topológica, ou seja, nesta frase, emprego noções topológicas".

De inicio a topologia foi chamada por Henri Poincaré de "geometria de posição". "Qualquer um dos nomes preserva em seu sentido a atividade fundamental desta área da geometria: o estudo das propriedades geométricas não afetadas por mudanças de forma" (SPERLING, 2008, p.28).

Subentende-se pela mudança da forma, que os "objetos" geométricos em topologia são construídos com "materiais perfeitamente elásticos" – os quais são normalmente representados por meio de materiais físicos elásticos como pedaços de borracha. Por isso, alguns autores chamam a Topologia de: "Geometria da Borracha" ou "Geometria Elástica", ou ainda, "Geometria das Deformações".

Para a topologia, se uma superfície for esticada ou encolhida, certas propriedades dela se mantêm inalteradas, podendo como resultado determinar a congruência, isto é, a similaridade entre formas geométricas tão distintas quanto o círculo e o triângulo, ou até mesmo dois polígonos quaisquer. Portanto – "é necessário frisar – não interessa à topologia a forma, que estaria vinculada à topografia, mas as relações existentes entre os pontos desta forma" (SPERLING, 2008, p.29).

Na palestra, serão apresentadas as possibilidades de transformações que não alteram as propriedades topológicas da figura, mas o foco principal será o emprego na arte.

5. A Geometria dos Fractais

A maior parte dos objetos que encontramos no nosso dia-a-dia não são retas, nem esferas, nem cones. Na natureza em geral por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade.

Tentar simplificar essas formas empregando formas da Geometria Euclidiana, como triângulos, círculos, esferas etc., seria inadequado. A Geometria Fractal pode fornecer aproximações paras essas formas.

A palavra "fractal" foi criada por Benoit Mandelbrot, que surgiu do adjetivo latino fractus, que significa "irregular" ou "quebrado". Diferentes definições de Fractais surgiram com o aprimoramento de sua teoria. Uma primeira definição matemática, pelo próprio Mandelbrot, diz que "Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto forma maior do que sua dimensão topológica". No decorrer do tempo ficou claro que esta definição era muito restritiva embora tenha motivações pertinentes.

Uma definição mais simples é que "Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando auto semelhança e complexidade infinita".

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual. Contudo, existem duas características muito frequentes nesta geometria:

Complexidade Infinita: É uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores.

Auto-similaridade: Um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar.

Na palestra serão apresentadas obras artísticas geradas por meio desse conceito, inclusive, a construção de parte de algumas dessas obras, por meio do software GeoGebra.

6. Considerações Finais

Corroboramos com o pensamento de Cifuentes (2005, p.1), quando ele afirma que "A emoção é uma das faculdades humanas fundamentais, junto com a razão. Enquanto faculdade, ela é uma capacidade intelectual, pois permite a percepção e o reconhecimento de um valor e, portanto, é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível".

Por este motivo, na palestra serão estudadas algumas obras artísticas por meio da matemática, bem como o estudo inverso, ou seja, o que foi necessário de matemática para realizar a obra. Acredita-se que isso trará a emoção necessária para que se construam conhecimentos que serão os objetivos da palestra.

7. Agradecimentos

Agradeço a comissão organizadora XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, que me deu a oportunidade de apresentar essa palestra.

8. Referências

ARGAN, G. C. **Clássico anticlássico: o Renascimento de Brunelleschi a Bruegel.** Trad. Lorenzo Mammi. – São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

BORGES, C. C. **A topologia**: considerações teóricas e Implicações para o ensino da matemática. Caderno de Física da UEFS, 03 (02): 15-35, 2005. Disponível em: http://dfis.uefs.br/caderno/vol3n2/CBorges.pdf. Acesso em 27-04-2013.

CIFUENTES, José C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

COXETER, H. S. M. **Non-Euclidean Geometry**. 5ª ed. Toronto: University of Toronto Press, 1968.

DUCHER, Robert**. Características dos estilos.** Tradução de Maria Armentina Galvão. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

FLORES, C. R. **Abordagem histórica no ensino de matemático:** o caso da representação em perspectiva. Revista Contra-Pontos, Itajaí, v. 1, n. 1, p. 377- 388, set./dez. 2002.

FLORES, C. R. **Olhar, Saber, Representar:** ensaios sobre a representação em perspectiva. 2003. 188f Tese (Doutorado em Educação - Ensino de Ciências, Centro de Ciências da Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003b.

GUSMÃO, L. D. **Educação Matemática pela Arte**: uma defesa da educação da sensibilidade no campo da Matemática. 26/02/2013. 149f. Dissertação. Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2013.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e geometria Hiperbólica em um ambiente de geometria dinâmica:** o que pensam e o que sabem os professores. Dissertação. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2009. 148 f.

PROENÇA, Graça**. História da Arte**. Editora Ática. São Paulo. 2008.

SPERLING, David M. **Entre Conceitos, Metáforas e Operações:** convergências da Topologia na Arquitetura contemporânea. Vol. 3, nº 2, Novembro de 2008. Gestão & Tecnologia de Projetos.

WALKER, Paul Robert. **A disputa que mudou a Renascença**. Trad. de Maria Alice Máximo. – Rio de Janeiro: Record, 2005.