

O ESTUDO DA CONCEPÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO JOGO MINI-BOZÓ

José Marcos Lopes
UNESP/Ilha Solteira - SP
jmlopes@mat.feis.unesp.br

Resumo:

Apresentamos neste minicurso uma proposta didático-pedagógica para o ensino de Probabilidade conforme a concepção clássica (Laplace). O ponto de partida para a construção do conceito de probabilidade é uma situação de jogo associada à metodologia de resolução de problemas. A concepção de jogo aqui utilizada toma como referência a tendência construtivista do ensino de Matemática. A construção do conhecimento matemático é realizada a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos. O jogo proposto é original e todos os problemas formulados envolvem situações relativas ao jogo. Nossa proposta pode ser utilizada tanto no último ciclo do Ensino Fundamental como também no Ensino Médio, e pode subsidiar a prática de professores que ensinam conceitos básicos de Probabilidade.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem; Jogos; Resolução de Problemas; Probabilidade.

1. Introdução

A concepção clássica de probabilidade é atribuída a Laplace (1749-1827). Entretanto, “a definição de probabilidade como quociente do número de *casos favoráveis* sobre o número de *casos possíveis* foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Girolamo Cardano (1501-1576)” (MORGADO et al., p. 119).

A definição de probabilidade de Laplace é válida somente quando o Espaço Amostral possui um número finito de elementos e os Eventos Elementares são equiprováveis, ou seja, possuem a mesma probabilidade de ocorrência. A concepção clássica de probabilidade possui forte conexão com o raciocínio combinatório. Os Standards (NCTM; 1989) recomendam o seguinte procedimento combinatório para que os alunos compreendam matematicamente a origem e aprendam o conceito implícito na definição laplaciana de probabilidade: construir uma tabela ou diagrama de árvore, fazer uma lista e usar um simples procedimento de contagem.

A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação, e emerge simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos, no chamado Estado das Operações Formais da teoria Piagetiana (NAVARRO-PELAYO et al., 1996).

2. O uso de jogos e da resolução de problemas no ensino de matemática

Muitos autores têm destacado a importância da utilização dos jogos para o ensino, particularmente para o ensino de matemática. Destacamos entre outros: Moura (1992, 1994), Kishimoto (1994), Macedo et al. (2000), Borin (2004) e Grandó (2000, 2007).

Segundo Moura (1994) a partir da segunda metade do século XX é que irão aparecer contribuições teóricas relevantes para o aparecimento de propostas de ensino que incorporam o uso de materiais pedagógicos onde os sujeitos possam tomar parte ativa na aprendizagem. Neste cenário, “o jogo recebe de teóricos como Piaget, Vygotsky, Leontiev, Elkonin, entre outros, as contribuições para o seu aparecimento em propostas de ensino de Matemática” (MOURA, 1994, p.18-19).

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 2000, p. 43), “é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver”.

Para Grandó (2007, p. 45) “é comum o professor utilizar os jogos no final da aula, nos minutos restantes, para fixar certo conteúdo ou desenvolver uma habilidade. Raras vezes existe um trabalho intencionalmente planejado, com intervenções pedagógicas previstas pelo professor e com continuidade de várias aulas”.

Existem diferentes interpretações e diferentes formas de abordar a resolução de problemas. Para os PCN (BRASIL, 2000, p. 43-44) se o foco está na resolução de problemas, o que se defende é uma proposta que pode ser resumida nos seguintes cinco princípios:

- (i) o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas;
- (ii) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório;

(iii) aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros problemas;

(iv) um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;

(v) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação de aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem.

Segundo Moura (1992) a união entre o jogo e a resolução de problemas está intimamente vinculada à intencionalidade do professor,

é possível combinar jogo e resolução de problemas nas séries iniciais; porém, fazer isto é muito mais que uma simples atitude, é uma *postura que deve ser assumida na condução do ensino*. E assumi-la com vistas ao desenvolvimento de conceitos científicos exige um projeto de ensino, inserido no projeto coletivo da escola. Fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, à *Educação Matemática* (MOURA, 1992, p. 52).

3. O jogo Mini-Bozó

O jogo proposto é original utiliza dois dados e pode ser disputado por vários jogadores. É uma simplificação de um jogo bastante popular no estado do Mato Grosso do Sul - Brasil, conhecido como Bozó. A simplificação efetuada foi motivada pelo fato que nosso objetivo é utilizar o jogo para ensinar conceitos básicos (iniciais) de probabilidade, o que não seria adequado através do jogo Bozó, tendo em vista que este utiliza cinco dados. O leitor interessado poderá conhecer as regras do jogo Bozó em Brasil (2010).

OBJETIVO: preencher todo o tabuleiro, de modo a obter mais pontos que o(s) adversário(s).

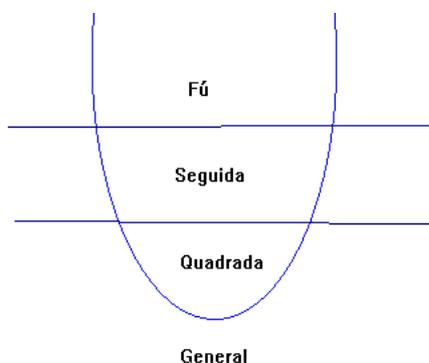
MATERIAL: dois dados, um copo plástico, papel e caneta para registro dos pontos.

REGRAS:

1. Pode ser disputado por duas pessoas ou mais, não existe limite no número de jogadores, mas um número excessivo de jogadores influencia no tempo do jogo.
2. O Jogador poderá efetuar até dois lançamentos. O primeiro lançamento é feito com os dois dados. Se o jogador optar pelo segundo lançamento poderá fazê-lo novamente com os dois dados ou reservar um dos dados e efetuar o segundo lançamento com apenas um dado.
3. Em toda jogada deve ser marcada uma das casas do tabuleiro, caso não exista possibilidade de marcação, deve-se cancelar uma das casas ainda não marcada, e cada casa só pode ser marcada ou cancelada uma única vez.

4. O jogo termina quando todos os jogadores preencherem suas casas no tabuleiro. Soma-se os pontos e ganha o jogador que obtiver a maior pontuação.

O TABULEIRO:



A PONTUAÇÃO:

Fú: duas faces distintas, mas não em sequência, vale a soma das faces.

Seguida: duas faces distintas em sequência valem 20 pontos.

Quadrada: duas faces iguais, mas diferente de 6, valem 30 pontos.

General: duas faces iguais a 6 vale 50 pontos.

Quando se obtém *Seguida*, *Quadrada* ou *General* na primeira tentativa de lançamento, é dito “de boca”, e adiciona-se cinco pontos ao valor original da casa. Por exemplo, se conseguir *Quadrada* no primeiro lançamento chama-se “*Quadrada de boca*” e marca-se 35 pontos ao invés de 30.

COMENTÁRIOS SOBRE O JOGO: Consideramos que o jogo aqui proposto é um Jogo de Estratégia, mas não no sentido definido em Borin (2004, p. 15). Como o jogo utiliza dados, então o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Também, é impossível a determinação de uma estratégia sempre vitoriosa. Assim, o jogo nunca perde o sentido como jogo, e cada partida será provavelmente diferente da partida anterior. Toda jogada é pontuada, entretanto se a casa correspondente àquela jogada já estiver marcada a pontuação deve ser desconsiderada, e deve-se eliminar uma casa ainda não marcada. Como o tabuleiro é composto de quatro casas, então cada jogador efetua exatamente quatro jogadas. A estratégia pode variar dependendo da posição de momento do jogo. Por exemplo, na primeira rodada, com todas as casas desmarcadas, se o jogador obteve (2, 6) no primeiro lançamento, então a melhor estratégia será reservar o dado com a face 6 e lançar novamente o outro dado. Agora, nesta mesma situação, se o objetivo for obter a casa *Seguida*, a melhor estratégia será reservar o dado com a face 2, pois neste caso terá duas chances em seis de obter *Seguida*, ou seja, obter as faces 1 ou 3, enquanto que se reservar o

dado com a face 6 terá apenas uma chance em seis de obter *Seguida*, ou seja, obter a face 5. Quando da necessidade de se eliminar uma casa, a melhor estratégia pode não ser eliminar as casas “mais difíceis” (com menor probabilidade de ocorrerem), isto depende da pontuação já obtida pelo outro jogador.

Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

O jogador terá mais chances em marcar a casa *Quadrada* do que a *Seguida*?

Espaço Amostral, Evento e Definição Clássica de Probabilidade

Apresentamos a seguir algumas situações-problema que poderão ser utilizadas para a sistematização do conceito de probabilidade na concepção de Laplace. Vamos supor na sequência a utilização de dois dados com faces equiprováveis. As resoluções comentadas de todos os problemas que serão aqui apresentados poderão ser obtidas em Lopes (2011).

Problema 1. Quais são os pontos possíveis para a casa *Fú*?

Problema 2. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, quais são as chances do jogador marcar a casa *Fú*? Justificar sua resposta.

Problema 3. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, quais são as chances do Jogador marcar cinco pontos na casa *Fú*? Justificar sua resposta.

Problema 4. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, quais são as chances do jogador marcar sete pontos na casa *Fú*? Justificar sua resposta.

Problema 5. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, o jogador terá mais chances em marcar a casa *Seguida* do que a *Quadrada*? Justificar sua resposta.

Para as resoluções dos problemas 2, 3, 4 e 5 devemos observar que, intuitivamente, já estaremos calculando a probabilidade (chance) como:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}},$$

ou seja, estaremos utilizando a resolução dos problemas para que os alunos possam reconstruir a concepção clássica de probabilidade.

Após o trabalho com problemas como os acima mencionados, o professor poderá ter mais facilidade para a sistematização dos conceitos de Experimento Aleatório, Evento, Espaço Amostral, Evento Elementar e apresentar a Definição de Probabilidade de Laplace. Todos estes conceitos já foram trabalhados nas soluções dos problemas, entretanto em

nenhum momento necessitam ser mencionados. Para o Ensino Fundamental os PCN recomendam que se deve evitar a teorização precoce.

4. Probabilidade Condicional

O cálculo de probabilidades condicionais está relacionado ao cálculo da probabilidade de um evento ocorrer sabendo-se que um outro evento já ocorreu a priori. O conceito de Probabilidade Condicional poderá ser sistematizado através do trabalho com os três seguintes problemas.

Problema 6. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade do Jogador marcar *Quadrada*, sabendo-se que ele obteve em pelo menos um dos dois dados uma face 5?

Problema 7. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade do Jogador marcar *Quadrada*, sabendo-se que a soma das faces obtidas foi igual a sete?

Problema 8. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade do Jogador marcar a casa *Quadrada*, sabendo-se que obteve números ímpares nas faces dos dois dados?

Observar que nos três problemas anteriores estaremos calculando a probabilidade do Jogador marcar a casa *Quadrada*. Entretanto, a informação fornecida a priori, altera o valor da probabilidade, ou seja, o cálculo da probabilidade está condicionado à informação que você dispõe a priori. Esta é a essência do conceito de Probabilidade Condicional; a informação conhecida à priori modifica o Espaço Amostral onde a probabilidade deve agora ser calculada. Após o trabalho com problemas do tipo dos problemas 6, 7 e 8, o professor poderá ter mais facilidade para sistematizar o conceito de Probabilidade Condicional.

Outros problemas poderão ser formulados para o trabalho com a soma e o produto de probabilidade, e também com os teoremas da Soma Total de Probabilidades e o Teorema de Bayes. Assim, o jogo aqui considerado, juntamente com os problemas formulados, poderão auxiliar no ensino e aprendizagem de todos os conceitos básicos de probabilidade.

5. Considerações finais

A proposta de ensino e aprendizagem apresentada utiliza os problemas para ensinar Matemática e também, utiliza matemática para resolver problemas. Assim, nossa proposta está alicerçada nos PCN considerando-se a forma de abordar Resolução de Problemas. Os problemas elaborados refletem situações de jogo, ou seja, usamos o jogo, uma outra estratégia de ensino e aprendizagem sugerida nos PCN, não apenas para motivar os alunos, mas como desencadeador de aprendizagem.

A associação do jogo com a resolução de problema torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento. O que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas.

A metodologia de trabalho com jogos e resolução de problemas sugerida neste minicurso segue a tendência construtivista do ensino de Matemática. Nesta tendência, “a preocupação é com a construção do conceito pela criança, estando esta ativa nesta construção. O professor é o mediador e facilitador na aprendizagem do aluno, intervindo e problematizando” (GRANDO, 2007, p. 47).

A literatura sobre o uso de jogos nas séries iniciais, para o trabalho com conceitos matemáticos com crianças, é relativamente extensa. Já para o Ensino Médio esta literatura é bastante escassa e, praticamente, inexistente em língua portuguesa. O objetivo principal desta proposta didático-pedagógica é fazer com que os próprios alunos reconstruam o conceito matemático, com a adequada e imprescindível participação do professor.

Segundo os PCN não existe um caminho único e melhor para o ensino de Matemática. “No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 2000, p. 42).

O trabalho com conteúdos de probabilidade é considerado difícil por muitos professores. Assim, nossa contribuição está em oferecer uma proposta de ensino diferente, não contemplada nos livros didáticos, a qual pode subsidiar e colaborar com a prática de sala de aula de professores que ensinam os conceitos iniciais de Probabilidade.

6. Referências

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: Uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP, 2004.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* v. 3, 2. ed.. Brasília: MEC/SEF, 2000.

_____. Ministério da Educação. Portal do professor. *A probabilidade do Bozó*. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1124>>. Acesso em: 31 jan. 2010.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000. 224p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

_____. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo: SBEM, v. 10, n. 12, p. 43-50, 2º sem. 2007.

KISHIMOTO, T. M. *O jogo e a educação infantil*. São Paulo: Pioneira, 1994, 63p.

LOPES, J. M. Uma proposta didático-pedagógica para o estudo da concepção clássica de probabilidade. *Bolema*. Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 607-628, ago 2011.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artmed, 2000, 116p.

MORGADO, A. C. O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2004.

MOURA, M. O. *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. São Paulo: FDE, 1992. (Série Idéias, 10).

_____. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. *A Educação Matemática em Revista*. São Paulo: SBEM, v. 2, n. 3, 1994.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, México, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996.