IRAN ABREU MENDES
MIGUEL CHAQUIAM

HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

fundamentos e sugestões didáticas para professores

IRAN ABREU MENDES
MIGUEL CHAQUIAM

HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA
fundamentos e sugestões didáticas para professores

2016

1ª. Edição

Revisão de Texto: Os autores

Revisão Bibliográfica: Os autores

Texto da 4ª Capa: Iran Abreu Mendes

Capa/Projeto Gráfico: Miguel Chaquiam

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Belém – Pará – Brasil

Mendes, Iran Abreu; Chaquiam, Miguel
História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores / Iran Abreu Mendes; Miguel Chaquiam. Belém: SBHMat, 2016.

124 p.

Bibliografia
ISBN 978-85-89097-69-7

1. Matemática 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Matemática - História. 4. Professores - Formação I. Mendes, Iran Abreu. II. Chaquiam, Miguel. III. SBHMat. IV. Título.

CDD 510.7

Apresentação

O livro que oferecemos aos leitores não é um livro de história da matemática para os alunos do ensino fundamental ou médio, embora contenha muitas informações que poderão ser úteis na aprendizagem matemática desses alunos. Nosso foco central é o professor de matemática da Educação Básica e os estudantes de licenciatura em Matemática, uma vez que se trata de um material resultante das nossas experiências na formação inicial e continuada de professores de matemática e que vem sendo pensado continuamente. Esta versão reflete um fragmento do trabalho que temos pensado, planejado e experimentado há alguns anos na formação de professores de matemática. Nossa intenção primeira é propor uma maneira de abordar a matemática da Educação Básica, que consideramos mais adequada para integrar as informações sobre o desenvolvimento histórico das ideias matemáticas em sala de aula, desde que sejam priorizados o rigor e a naturalidade no tratamento dos conteúdos matemáticos.

Neste livro oferecemos aos professores de matemática da Educação Básica e da licenciatura, um encaminhamento didático que possa contribuir nas suas ações docentes. Nesse sentido, optamos por selecionar alguns aspectos centrais para serem abordados no momento de se inserir a dimensão histórica nas aulas de matemática como uma apresentação temática e material, desenvolvimento conceitual construído a partir da exploração de cópias de documentos originais ou adaptado de fontes primárias e algumas sugestões de atividades didáticas que poderão ser utilizadas pelo professor para introduzir, para ilustrar, ou mesmo para aprofundar um conceito a ser ensinado. Este livro não foi concebido para atender todos os objetivos definidos em um plano de ensino específico, pois consideramos que seu uso não pode abranger por completo, um programa estabelecido para o ensino de matemática, de história da matemática ou de fundamentos epistemológicos da matemática nos cursos de formação de professores de matemática.

As orientações e sugestões de atividades propostas por nós se caracterizam por tratar da história em uma perspectiva não cronológica, embora não sejam descartadas as informações datadas para exploração das temáticas relacionadas aos conteúdos matemáticos que pretendemos abordar. Todavia, a lógica adota por nós na escolha dos temas e textos propostos tem como finalidade central aproximar os estudantes e professores o máximo possível do desenvolvimento epistemológico dos temas matemáticos a serem explorados nas atividades de sala de aula. Nesse sentido, propomos a exploração de alguns textos adaptados dos originais (fontes primárias) para introduzir alguns assuntos. Além disso, sugerimos que sejam feitas algumas pesquisas na literatura disponível, pois os textos relacionados direta ou indiretamente ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos podem contribuir para o professor possa dar-lhes um tratamento matemático mais integrado.

Desejamos a todos os leitores uma reflexão profícua que lhes possibilite um aperfeiçoamento maior em seus estudos, que os levem a ampliar sua formação conceitual e didática acerca da matemática e seu ensino.

Iran Abreu Mendes
Miguel Chaquiam

Junho, 2016

HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA
fundamentos e sugestões didáticas para professores

IRAN ABREU MENDES
MIGUEL CHAQUIAM

SUMÁRIO

PARTE I

História da matemática e reinvenção didática na sala de aula

PARTE II

Um diagrama, um texto

PARTE I

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E REINVENÇÃO DIDÁTICA NA SALA DE AULA

Considerações gerais

Atualmente tem se ampliado os estudos sobre possíveis abordagens didáticas que podem ser propostas para o ensino da matemática com base na história desta disciplina. Uma dessas maneiras de fazer isso é revisitar da melhor forma os momentos históricos que envolvem os personagens que conceberam as noções matemáticas que se pretende ensinar, de modo a desafiar a capacidade dos alunos para exercitarem estudos, pesquisas e problematizações que estimulem suas estratégias de pensamento e, daí culminar na sua produção de conhecimento durante a atividade de estudar. Tal abordagem pressupõe que o aluno tem uma oportunidade enriquecedora de se inserir o máximo possível no contexto em que o matemático, o texto matemático escrito por ele, a comunidade em que viveu, trabalhou e produziu tal matemática, em busca de estabelecer uma de multiplicidade explicativa para as noções matemáticas que precisará aprender.

Por meio desse tipo de abordagem didática é possível ao professor, a utilização de um material útil para a apresentação e discussão de tópicos dos programas de matemática dos cursos de história da matemática na graduação ou na matemática abordada na educação básica. Nesse sentido, não se trata de apenas mostrar que os conceitos abordados pela matemática acadêmica têm uma história, mas que muitas vezes remonta ao nascimento da história em si, e que tudo o que é ensinado já foi pensado e praticado por outros há muito tempo. Nós nos limitamos ao presente, ou, às primeiras ocorrências sobre um conceito ou tópico matemático, sem seguir todos os desenvolvimentos da teoria para a qual eles foram submetidos, no momento de conduzir a apresentação que fazemos tradicionalmente, em nossos cursos.

É importante reconhecer, entretanto, que essa forma de propor a inserção da história nas explicações matemáticas na sala de aula é composta por outros aspectos que poderão mostram os diversos modos como um determinado tema relacionado à matemática se desenvolveu no tempo e no espaço, e como esse assunto foi se constituindo em teoria no campo acadêmico por meio de questionamentos, respostas, novos questionamentos e problematizações, que consequentemente fizeram emergir a necessidade de uma axiomatização de tal assunto (conceito, noção e teoria).

Para poder dar o primeiro passo na compreensão desse processo com vistas a estabelecer ações e conexões entre a matemática, sua história e seu ensino é necessário que se faça alguns esclarecimentos acerca dos significados atribuídos ao termo história e de que modo a matemática está situada nessa história, de modo a fornecer materiais informativos para a realização de transposições que contribuam para o exercício do ensinar e do aprender matemática com significado, e que a história da matemática não é apenas uma história de definições de objetos matemáticos, mas de um processo criativo que envolve sociedade, cultura e cognição. Para que possamos materializar nossos encaminhamentos em busca dos significados dessas histórias para a transposição didática da matemática na escola, focalizaremos a seguir algumas questões que nos levarão caminhos a fora. Vejamos, portanto, o que nos espera.

De qual história e de qual matemática tratamos?

Do nosso ponto de vista, a sociedade humana produz cultura e é a partir dessa cultura produzida que será possível extrair histórias. Histórias essas, das ideias humanas, ou seja, das nossas tentativas de responder aos desafios surgidos no tempo e no espaço, e dos quais tentamos nos deslocar de modo a superar as dificuldades e assim encontrar meios para sobreviver no planeta, sempre na tentativa de encontrar melhores possibilidades de manutenção da vida.

A história da qual falamos é uma história das explicações e compreensões sobre os objetos existentes no mundo e das construções de realidades que podem ser estruturadas e reestruturadas na medida em que a sociedade reflete, se reinventa e redireciona seu modo de ser, isto é, uma dinâmica cultural que exige esse movimento de construção da realidade.

Esclarecemos, portanto, que a história da qual trataremos está focalizada no aspecto cultural no qual a sociedade se fundamenta para se instituir, pensar e produzir ideias de modo a tomá-las como diretriz de ordem e de poder na construção social da realidade, com base nos conhecimentos estabelecidos na vida cotidiana em busca de compreender e explicar as práticas sociais como um processo dialético entre a realidade objetiva e subjetiva, conforme destacam Berger e Luckmann (2012).

> É importante ter em mente que a objetividade do mundo institucional, por mais maciça que pareça ao indivíduo, é uma objetividade produzida e construída pelo homem. O processo pelo qual os produtos exteriorizados da atividade humana adquirem o caráter de objetividade é a objetivação. O mundo institucional é a atividade humana objetivada, e isso em cada instituição particular. (BERGER e LUCKMANN, 2012, p. 84)

Nesse sentido, a matemática construída é uma produção social construída nessa realidade objetiva, mas que também recebe uma carga subjetiva na medida em que se estabelece entre o individual e o coletivo em busca de solucionar problemas das mais diversas ordens em todos os tempos.

É nessa dualidade objetiva-subjetiva que compreendemos a construção histórica estabelecida socialmente, ou seja, a construção de uma história social, ou até sociocultural, pois é necessário considerar a relação entre sociedade e cultura plenamente evidenciada nas construções históricas da realidade, dentre as quais a matemática é parte.

Essas discussões acerca da construção social da realidade, a ser observada historicamente, foram renovadas nos trabalhos de Claude Lévi-Strauss (1989)[1], na antropologia ao tratar da relação entre o concreto e o abstrato no pensamento humano, ao trata de natureza e cultura. Igualmente, tais discussões ganharam eco nas proposições sobre história da ciência, lançadas por Thomas Kuhn (2011)[2], ao tratar dos conceitos de estrutura, de revoluções científicas e de paradigma para explicar essa construção social, e, por fim nas proposições de Michel Foucault (2000)[3], na filosofia, ao reinventar os conceitos de arqueologia, genealogia e regime para abordar os modos de pensar e agir na construção social da realidade. Além desses três pensadores, há muitos outros que no decorrer do século XX trataram do assunto como, por exemplo, Ludwik Fleck (2010)[4], dentre outros que instituíram os estudos e pesquisa em história social da ciência, onde se inclui a matemática.

Nessa dinâmica, diversos filósofos que focalizavam suas reflexões acerca da matemática como uma maneira de explicar e compreender a realidade social em suas dimensões macroscópicas e microscópicas que insere diversos grupos sociais dentre os quais a escola, as universidades, as academias de ciência e outras instituições por onde a matemática pode

[1] Esse livro foi publicado originalmente em francês no ano de 1962.
[2] O original deste livro foi publicado em inglês no ano de 1962.
[3] Esse livro foi publicado originalmente em francês no ano de 1969.
[4] Esse livro foi publicado originalmente em inglês no ano de 1935.

ser tomada como cultura humana. Ainda a esse respeito também enunciaram suas proposições a esse respeito. Podemos mencionar, por exemplo, as discussões e argumentações estabelecidas por Imre Lakatos (1998)[5], Kitcher (1984). É nessa perspectiva que trataremos da matemática e de sua história como uma base para a inserção de uma dimensão histórica no ensino de matemática me busca da construção de significados para os objetos matemáticos na sala de aula. No entanto, é necessário compreendermos melhor de qual matemática tratamos.

Reiteramos, portanto, que a matemática a qual nos referimos é na verdade a cultura matemática, ou seja, a matemática construída socioculturalmente. Trata-se de uma cultura de práticas pensadas, experimentada e refletidas socialmente e que consequentemente fazem emergir modelos explicativos de tais matemáticas dentre os quais os modelos que se incorporam às matemáticas.

Tais maneiras de compreender e explicar sobre essas práticas faz surgir matemáticas descritivas dos fenômenos naturais, culturais e sociais, que por transposição ocasionaram o surgimento das matemáticas escolares, em vistas de que as práticas sistematizadas precisaram ser incorporadas a um modelo de formação social e, nessa dinâmica as praticas matemáticas também passaram a ser tomadas como um dos eixos dessa formação. É desse momento que também se oficializam, no sentido do substantivo *ofício*[6], as matemáticas produzidas por matemáticos profissionais. É também delas que tratamos quando investigamos historicamente para entender, compreender e explicar os modos de pensar e fazer matemática pela sociedade no decorrer da história.

---

[5] Esse livro foi publicado originalmente em inglês no ano de 1971.

[6] O dicionário refere-se ao termo *oficio*, lhe atribuindo o seguinte significado: qualquer atividade de trabalho que requer técnica e habilidade específicas. Trata-se, ainda, de ocupação, profissão, emprego.

História da matemática! Que história é essa?

Com base no que tratamos desde o inicio desta parte do livro podemos reiterar, então, que a história da qual argumentamos ser favorável a sua inserção em sala de aula, refere-se à histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades. Logo, podemos considerar que se trata de histórias sobre as produções de ideias matemáticas e suas materializações em múltiplas linguagens representativas e talvez também seja dessa multiplicidade que surge a característica plural dessas histórias. Se esquecemos ou desprezamos essa pluralidade tendemos a empobrecer qualquer abordagem dita ou concebida como transversal, integrada ou até mesmo contextualizada para a matemática que ensinamos.

Essas histórias focalizam muito mais as sistematizações dos conteúdos matemáticos no tempo e no espaço, sem perder de vista personagens, sistemas políticos e filosóficos que ocasionaram essas produções sistematizadas, bem como os modos nos quais essas histórias foram se tornando decisivas na transposição e institucionalização dos conteúdos adotados nas escolas da Educação Básica, atualmente. No caso das licenciaturas em Matemática, por exemplo, essas histórias têm um caráter decisivo na compreensão das relações epistemológicas estabelecidas pelas matemáticas em suas dimensões sociais inseridas nos diversos meios acadêmicos e escolares.

Cabe ao professor pensar cuidadosamente sobre para o quê e para quem é essa história da matemática. Em nosso modo de pensar e agir na formação de professores de matemática, a história que compreendemos como importante para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos em sala de aula é uma história que tem a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço. Assim, essa história pode ser tomada como um aporte para esclarecimentos de cunho epistemológico e didático que poderão contribuir para o professor explicar e orientar a organização das matemáticas escolares. Nesse sentido as informações históricas poderão ser utilizadas para auxiliar o professor de matemática a melhorar o planejamento e a execução de suas explanações durante as aulas de matemática, bem como para justificar os modos de produção matemática no tempo e no espaço.

Trata-se de uma história que deve ser dirigida aos estudantes de licenciatura em Matemática, aos professores de Matemática da licenciatura em Matemática, aos professores da Educação Básica e de maneira um pouco indireta, aos estudantes da Educação Básica.

Por que e qual história no ensino da matemática?

Uma das justificativas que mais encontramos à respeito da indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de matemática, aparecem no sentido de contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas para o exercício de ensino.

Além disso, diversos especialistas no assunto têm apontado que esse modo de encaminhar as atividades de ensino de matemática é importante para esclarecer os aspectos formativos, informativos e utilitários da matemática, principalmente no sentido de conduzir os estudantes ao acervo cultural da matemática, com a finalidade de desenvolver seu interesse pelo assunto e estimular a preservação dessa memória intelectual humana.

Igualmente, há outros indicativos de que a inserção das discussões sobre o desenvolvimento histórico da matemática no ensino da disciplina se torna de extrema importância para dar significado ao conhecimento matemático ensinado e aprendido por estudantes da Educação Básica e Superior.

Para que se compreender melhor esses argumentos que pretendem fortalecer a justificativa do uso dessas informações históricas nas aulas de matemática, é necessário que se tenha clareza sobre quais histórias tratamos e de que modo nos referimos direta e indiretamente à matemática a ser ensinada e até que ponto essas histórias podem ser utilizadas pedagogicamente.

Assegurar qual deve ser a história adequada ou não para ser usada no ensino da matemática, é uma questão bastante difícil, mas que provoca a manifestação de professores especialistas ou não sobre o tema, sempre com a intenção de expor seus argumentos reforçadores os contrários ao uso dessas informações para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos. Ressaltamos, entretanto que nãos e trata somente de promover a aprendizagem, mas sim de estabelecer princípios formativos relacionados à pesquisa, a autonomia de estudos e espírito científico, tal como propõe Mendes (2015) quando argumenta sobre a investigação histórica como princípio de ensino e de aprendizagem da matemática.

Diante do que foi mencionado anteriormente, podemos asseverar que a história da matemática que consideramos adequada para ser inserida no desenvolvimento conceitual dos estudantes refere-se diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares.

Assim é que consideramos a cultura matemática historicamente instituída que tem um potencial enriquecedor e viável para esclarecer os estudantes sobre os modos como a matemática se desenvolveu temporal e espacialmente. É necessário, portanto, esclarecer os leitores que nem todas as informações históricas podem conter um potencial que contribua de maneira suficiente para se ensinar matemática. Vejamos um pouco mais sobre esse aspecto dessas histórias.

As histórias que tratam exclusivamente sobre a vida dos matemáticos ou apenas dos professores de matemática, e que têm apelo fortemente biográfico, podem contribuir de forma apenas ilustrativa para o ensino e a aprendizagem de conceitos, propriedades e relações matemáticas, se forem exploradas apenas no âmbito dessas biografias. Uma alternativa para a superação dessas limitações das biografias é que o professor deve planejar, executar e avaliar o desenvolvimento de projetos de investigação histórica que avancem com relação a conexão entre vida, obra e o fazer matemático desses sujeitos investigados de modo a ir além da simples biografia. Caso contrário essas histórias com enfoque central nas biografias poderão tender a se configurar apenas como histórias pitorescas e anedotárias a respeito de personagens da história da Matemática.

Outro aspecto que merece muita cautela por parte do professor é a utilização de lendas e mitologias relacionadas às histórias das matemática, tais como encontramos muitas vezes pressentes em livros de literatura ou mesmo em livros de história da matemática ou em paradidáticos, cuja elaboração está baseada nas informações históricas de fontes nãos seguras ou que apostam no imaginário. O professor poderá utilizar tal material desde que saiba explorar o potencial imaginativo do material e estimular o exercício de problematização nos alunos, bem como a sua capacidade criativa para criar algumas matemática e conectá-las ao conteúdo programático previsto no planejamento do professor. As histórias romanceadas apresentam esse potencial em suas elaborações e muitas vezes podem ser prejudiciais se não forem bem utilizadas pelo professor.

Outras histórias das Matemáticas na sala de aula que se apresentam com características um pouco inadequadas para uso pedagógico são aquela que se apresentam como sinônimos de narrativas históricas sobre nomes, datas e locais, sem configurar fundamentalmente o desenvolvimento dos conceitos, propriedades e relações matemáticas.

Novamente reiteramos que o professor precisa redirecionar o uso dessas histórias para promover o exercício de uma investigação histórica mais ampliada a partir dessas histórias e encaminhar a composição de um cenário onde as histórias do desenvolvimento conceitual sejam agregadas às informações existentes. Daí sim poderá sistematizar as ideias matemáticas que precisa formalizar na aprendizagem dos estudantes.

Para o concretização desse exercício é necessário se compreender que:

> a história dos objetos culturais humanos é mais semelhante à história das espécies, que pode ser modelada, com precisão razoável, com a matemática típica dos sistemas dinâmicos (isto é, a matemática da teoria do caos). A história da matemática, portanto, é menos parecida com a história de uma marcha linear e mais parecida com a história das moléculas que trombam umas com as outras numa panela de pressão: é óbvio que o estado atual das moléculas pode ser explicado pela sucessão de estados anteriores, mas é impossível dizer, exceto em termos estatísticos, onde cada molécula estará depois de mais um minuto de fervura — pois a história das moléculas na panela é de natureza aleatória.
> (REVISTA CÁLCULO, 2013, p. 40)

Para finalizar nossas reflexões e sugestões acerca de qual história deve ser usada no ensino de matemática reafirmamos que ensinar matemática com apoio na história do desenvolvimento das ideias matemáticas não significa ensinar história da matemática. Nesse sentido caberá ao professor de matemática o exercício de transposição didática a ser operacionalizado em sala de aula, associado ao exercício investigatório ao qual está fundamentada toda a nossa proposta de uso didático da história no ensino de matemática. Para melhor esclarecermos essa relação, faremos uma pequena inserção no que diz respeito aos princípios estabelecidos pela didática francesa acerca do que Yves Chevalard (1985) denomina de *Transposição Didática*, embora não seja de nosso interesse enveredar por esse caminho, mas sem desconsiderá-lo no momento das ações didáticas do professor, seja qual for a tendência pedagógica a qual esteja filiado ou adote para o desenvolvimento da aprendizagem de algum tópico matemático em sala de aula.

Sobre uma transposição didática dessa história?

A expressão *transposição didática* aparece na perspectiva de constituição do saber escolar, pois educação escolar não se limita a fazer uma seleção de saberes que estão disponíveis na cultura em algum momento da história, mas sim transformá-los em saberes possíveis de serem ensinados e aprendidos na escola.

Quando menciono o termo transposição didática me refiro à transposição de saberes, uma vez que a transposição didática pressupõe um trabalho de reorganização, mediação ou reestruturação dos saberes historicamente constituído em saberes tipicamente escolares, ou seja, em saberes ensináveis e aprendíveis que possam compor a cultura escolar com conhecimentos que transcendem os limites da escola.

A esse respeito, muitos são os debates travados a respeito desse processo de mobilização de saberes de um campo a outro na perspectiva de possibilitar apropriações a cada situação que se quer promover conhecimento, aprendizagem e compreensão. Nesse sentido, as transposições circulam em uma roda viva entre os diversos campos de saber.

A transposição didática é o processo que faz com que os objetos do saber matemático erudito se transformem em saberes a ensinar, inscritos no projeto de ensino, e depois em saberes de ensino.

Nessa perspectiva, o processo de mobilização de saberes estabelecido no contexto social e científico para favorecer as atividades de ensino e de aprendizagem, ou seja, a transformação de um conhecimento estabelecido em um novo conhecimento a estabelecer-se, pode ser dinamizada por meio de transposições didáticas para que o conhecimento a ser ensinado se torne mais próximo e possível de ser aprendido.

É nesse sentido que as matemáticas exploradas por meio de investigação histórica podem ser mobilizadas para a sala de aula, em um processo de transposição didática, para se constituir em aparato didático para viabilizar a aprendizagem de conceitos, propriedades e teorias matemáticas.

As informações históricas, portanto, passam a ser tomadas como os saberes já estabelecidos socialmente, que podem ser tomados como matéria-prima a ser vetorizada com a finalidade de transformar o conhecimento a ser aprendido em algo mais aproximado do aprendiz. Trata-se, na verdade, de uma reinvenção matemática que deveria ser melhor apropriada aos objetivos de trabalho do professor e do nível de aprofundamento que precisa ser dado ao aprendiz, ou seja, ao aluno.

Sobre a reinvenção matemática a ser ensinada

Nesta seção apresento aspectos que considero essenciais no processo criativo que caracteriza a construção de significados na matemática produzida ao longo dos séculos; a reorganização desses significados para uma abordagem didática da matemática ensinada na Educação Básica e na formação de professores de matemática; exercícios de conexões cognitivas, cujas sinapses devem convergir para a compreensão e a prática da criação matemática em sala de aula.

A incorporação da heurística como cultura escolar materializada por reinvenções do processo de produção matemática nos estimula a aprender como buscar na história das práticas e elaborações matemáticas, em seus níveis experimentais e formais, aspectos que definem o contorno dos desafios que levaram à produção de tópicos matemáticos atualmente abordados no ensino fundamental, médio e superior.

Nesse sentido, considero de extrema importância que as licenciaturas em matemática proponham um currículo de matemática que tenha algumas finalidades centrais como estabelecer e analisar as conexões didáticas e epistemológicas da construção de um trabalho pedagógico mediado pelo professor pesquisador, os estudantes de pós-graduação, os estudantes de licenciatura em matemática e os professores da Educação Básica.

Nessa organização curricular é importante deixar lugar para que os professores em formação possam exercitar a investigação de aspectos matemáticos nas histórias de práticas sociais e científicas, visando possibilitar-lhes a construção de outros fundamentos epistemológicos para os tópicos matemáticos aprendidos por eles e que, posteriormente, serão ensinados na Educação Básica no seu exercício docente como professores.

Além disso, essa reorientação curricular deve sugerir a promoção de discussões sobre as possibilidades didáticas e conceituais da investigação histórica em sala de aula nessa formação de professores de matemática, tendo em vista suas implicações no desenvolvimento do processo educativo da Educação Básica, de modo a estimular nos professores em formação, o desenvolvimento de habilidades investigativas e reflexivas acerca do desenvolvimento conceitual da matemática sob uma perspectiva histórico-epistemológica, a ser aprendida por eles e que serão ensinadas na Educação Básica. Essa pode ser uma aposta para que no futuro tenhamos alunos mais autônomos no que diz respeito à busca de sua própria aprendizagem acera do conhecimento matemático que lhe for exigido em qualquer instância da vida.

Essa reorientação curricular pressupõe o desenvolvimento de atitudes e hábitos de investigação do contexto sócio-histórico e cultural, a partir da área de conhecimento de cada profissional envolvido em tal contexto, no sentido de contribuir para a formação de um profissional mais comprometido com a qualidade do trabalho educativo a ser desenvolvido no contexto sociocultural em que está inserido.

Talvez essa reorientação possibilite a efetivação de um diálogo entre os conteúdos escolares abordados nas salas de aula e as práticas socioculturais e científicas estabelecidas no passado e no presente, na forma de um processo de estímulo ao exercício de criatividade matemática por parte do professor em relação ao aluno, de modo a possibilitar a incorporação desse exercício pelo aluno.

Quando falamos de criatividade nos remetemos a um fenômeno sociocultural. Logo devemos compreender que não se trata de um fenômeno individual, mas como um processo coletivo e sistêmico que contribui para a ampliação da cognição social, pois ser criativo é praticar o pensamento divergente. Pensar criativamente é poder ser provocativo, paradoxal, metafórico, lúdico com o próprio pensamento, exercitando assim a sua flexibilidade para encontrar sempre melhores opções e melhores caminhos para toda e qualquer situação de vida, tanto pessoal, quanto profissional. Talvez essa seja uma das maneira de se colocar as histórias da matemática nas práticas de sala de aula.

Como colocar essas histórias da matemática na prática de sala de aula?

Para tratamos uma pouco mais sobre a inserção das informações históricas como um agente provocador do exercício cognitivo no desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes em sala de aula, precisamos inicialmente considerar que quando o estudante faz qualquer questionamento sobre os temas matemáticos tratados em sala de aula, ele não está querendo saber das aplicações práticas. Talvez ele próprio pense que sim, que gostaria de conhecer as aplicações práticas, mas na verdade, ele se contentaria com respostas de outra qualidade.

Uma delas é explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação de suas estratégias de pensamento e, consequentemente o ajudará na sua produção de conhecimento, ou seja, aumentará sua capacidade de aprendizagem. Em outro caso, o professor deverá explicar ao aluno que determinados assuntos em matemática, são ensinados devido serem muito úteis para determinadas profissões. Logo conhecer tal assunto poderá lhe ampliar as possibilidades na escola da carreira e lhe dará mais segurança com relação à matemática que terá de aprender futuramente.

Por fim, o professor poderá extrair das informações históricas, aspectos epistemológicos que favoreçam a sua explicação de porquês matemáticos e que muitas vezes favorecem a ampliação e o enriquecimento da aprendizagem dos alunos, ocasionando até a manifestação de interesses para estudos futuros sobre os temas tratados pelo professor, a partir das informações históricas como problemas extraídos de fontes primárias ou modelos matemáticos criados ou reformulados em determinadas épocas, bem como diferentes formas de demonstrar um teorema ou justificar a existência de uma propriedade matemática.

Nesse sentido considero que toda solução encontrada e proposta oficialmente para dar conta de responder a um problema é, particularmente, considerada uma solução validada em determinado momento histórico. A essa resposta Mendes (2015, p. 100) denomina de uma questão resolvida, que ao ser codificada e reutilizada em processo poderá fazer surgir novas questões em aberto. É importante que o professor tente se colocar no lugar do criador dessas soluções para que possa incorporar da melhor maneira possível às justificativas e argumentações para que sua solução seja compreendida e aceita pelos alunos. Além disso, esse posicionamento lhe dará possibilidade de estabelecer diálogos criativos que subsidiem a incorporação de novos elementos agregadores à reformulação das teorias matemáticas que foram complementadas ao longo do desenvolvimento histórico da matemática e com isso poderá ampliar sua compreensão sobre a formulação do conceito que está a aprender em sala de aula.

Vejamos a seguir, alguns exemplos de como o professor pode apresentar aos seus alunos, em sala de aula, uma prática em que a história da matemática será agente promotora de todo o processo de ensino.

Atividade 01
A incomensurabilidade dos números Irracionais

Objetivo: Abordar o surgimento da irracionalidade a partir do problema da diagonal do quadrado.

Contextualização histórica

Em coerência com o princípio de que tudo é número, os pitagóricos deram à aritmética uma importância e valor entre as outras ciências que estudavam (a música, a astronomia e a oratória). O conhecimento sobre os números naturais e suas propriedades era o fundamento para se conhecer as outras áreas. Assim a geometria pitagórica parecia subordinada a aritmética. Para eles, por exemplo, duas grandezas do mesmo tipo admitiriam medidas em comum tal como dois números admitem divisor comum, ou seja, admitiam a comensurabilidade das grandezas.

Duas grandezas dizem-se comensuráveis quando admitem uma medida em comum, ou seja, duas grandezas A e B, podem ser descritas em função de uma terceira C, isto é: $A = m.C$ e $B = n.C$.

Os pitagóricos, entretanto, encontraram dificuldades ao tentar solucionar problemas que envolviam medidas tal como, por exemplo a determinação da diagonal de um quadrado. Isso porque não conseguiram determinar um valor inteiro que pudesse representar a medida da diagonal em função dos lados do quadrado. De acordo com o teorema de Pitágoras, a diagonal era obtida da seguinte maneira (ver figura 1):

$$d^2 = u^2 + u^2$$
$$d^2 = 2\,u^2$$
$$d = u\sqrt{2}$$

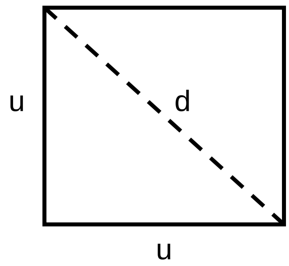


Figura 1

Nesse momento surgiu uma inquietação: qual o número que multiplicado por si próprio dá como resultado o valor 2? Assim surgiu um novo número: a $\sqrt{2}$, ou seja, d = u$\sqrt{2}$ como um obstáculo numérico e filosófico que abalou a crença dos pitagóricos a respeito dos números inteiros como única forma de representar a medidas de segmentos.

A partir desse problema os números irracionais foram sendo evidenciados na determinação da hipotenusa de triângulos retângulos e puderam ser representados geometricamente sobre a reta numérica, localizando-se em pontos entre os números racionais, conforme mostra a figura 2, a seguir.

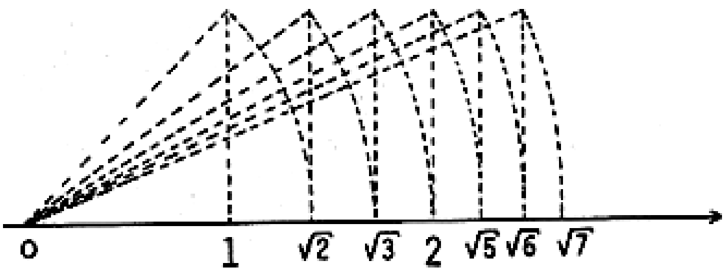


Figura 2

De outro modo, os triângulos retângulos foram gerados e representados geometricamente, originando uma nova forma geométrica, até então desconhecida e que pode ser investigada pelos alunos. Essa forma de representar os irracionais resultou das conclusões de Teodoro de Cirene, que o levaram a construir sua espiral, reproduzida conforme mostra a figura 3, a seguir.

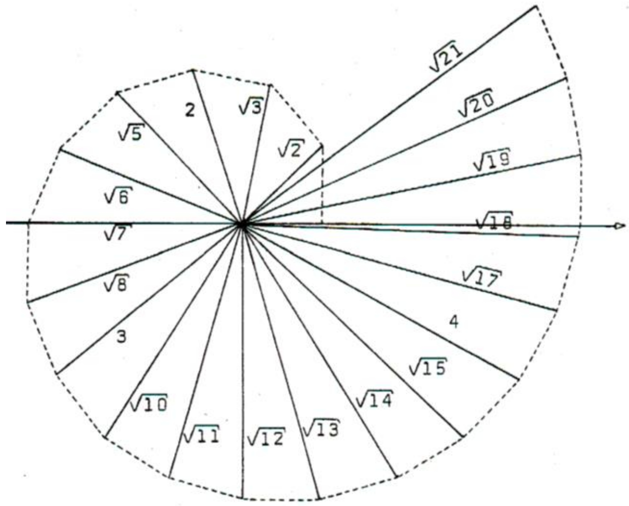


Figura 3

Podemos pensar sobre as razões que levaram Theodoro de Cirene a limitar $\sqrt{17}$. Ele descobriu que $\sqrt{17}$ é o primeiro passo antes da recuperação, porque, na verdade, como $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, concebendo assim um ângulo central em torno de 364°? Para fazer com que a teoria completa dos números irracionais deva ser elaborada por técnicas de cálculos relevantes que pertencem aos gregos, foi necessário apelar para um domínio não matemático: a logística e incorporá-lo à matemática que passou a ser recriada. Isso porque a razão dessa abordagem puramente geométrica das quantidades irracionais não lhes permite um desenvolvimento significativo no campo específico da análise matemática.

No livro *Número: a linguagem da ciência*, Tobias Dantzig (1970, p. 99-101) assinala que n*as* obras de matemáticos gregos da segunda ordem, como Heron de Alexandria e Theon de Esmirna, são encontrados valores aproximados para os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. Eles não indicam os métodos utilizados para a obtenção desses valores. Como a maioria dessas aproximações são bem adequadas, a imaginação dos historiadores da matemática foi fértil para contribuir na reconstrução desses processos, fazendo surgir uma série de teorias, algumas das quais atribuem o conhecimento matemático grego sobre séries infinitas. Outros dizem que são frações contínuas. Um prova matemática média grega de Euclides da irracionalidade de $\sqrt{2}$ era muito difícil de ser convincente, ainda não tinha encontrado entre os pitagóricos alguns conservadores persistentes que não tinham perdido a esperança de encontrar um valor racional para $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., e a pesquisa seguiu de maneira muito natural. Por exemplo, o número 2 pode ser representado infinitas maneiras de forma, de que uma fração tenha no denominador um quadrado perfeito:

$$\frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{32}{16} = \frac{50}{25} = \frac{72}{36} = \frac{98}{49} = \frac{128}{64} = \frac{162}{81} = \frac{200}{100} \cdots$$

Se 2 é um número racional pode ser encontrado indo o mais distante possível, uma fração cujo numerador seja, também, um quadrado perfeito. Obviamente, eles estavam errados nesta suposição, mas a sua pesquisa levou-os a uma boa aproximação: por exemplo: $\frac{288}{144} = 2$ ou $\frac{288}{144} = \frac{17^2}{12^2}$, e, assim, Theon provavelmente teria chegado a uma aproximação da $\sqrt{2}$, $1\frac{5}{12}$, que difere do seu valor verdadeiro que é 1/700.

Desafio: Deduza as aproximações para $\sqrt{2}$ e avalie cada erro dessa aproximação cometida.

Outros desafios e questionamentos para aprofundamento

1. Pesquisa e utilize o algoritmo babilônico para a extração da raiz quadrada, e verifique como calcular o valor da $\sqrt{2}$ com 6 casas decimais? Compare a sua resposta obtida, com a dos Babilônios.

2. Platão, em seu Teeteto, afirma que Teodoro de Cirene demonstrou a irracionalidade da $\sqrt{3}$. Tente fazer isto de forma rigorosa e comente os resultados com os procedimentos para utilizados para a $\sqrt{2}$.

3. Em que consiste o problema da quadratura do círculo?

4. Qual a contribuição de Arquimedes para a solução do problema da quadratura do circulo? Quais as implicações matemáticas de suas tentativas de solucionar o problema da quadratura do circulo?

5. O que caracteriza o método de exaustão de Arquimedes? O que eles equivalem atualmente?

Sugestão: Organize as informações obtidas nas questões propostas e apresente na forma de um seminário e discuta com seus alunos e explore os resultados das discussões para introduzir o tema referente aos números irracionais.

Atividade 02
Práticas com o Teorema de Pitágoras

Objetivo: subsidiar o exercício cognitivo do aluno acerca das relações entre os aspectos geométricos e numéricos relacionados ao teorema de Pitágoras.

Contextualização Histórica sobre o teorema de Pitágoras

Os triângulos retângulos são fundamentais para a trigonometria plana e lembram imediatamente o nome de Pitágoras, pois atribui-se a ele um dos feitos mais importantes relacionados a esse tipo de triângulo - o teorema pitagórico. Além disso, acredita-se que ele tenha obtido estes conhecimentos com os agricultores egípcios, chamados esticadores de cordas, que demarcavam as margens do rio Nilo quando as águas baixavam, visando utilizá-las na agricultura.

Por volta de 2000 a. C. os egípcios já sabiam que um triângulo cujos lados mediam 3, 4 e 5 unidades de comprimento, possuía um ângulo de 90^{o}, ou seja, era um triângulo retângulo. Eles também observaram que $3^2 + 4^2 = 5^2$, mas não sabiam como provar que o ângulo oposto ao lado de comprimento 5 é um ângulo reto, embora usassem esse fato nos seus cálculos. Essa observação corresponde à recíproca do Teorema de Pitágoras que afirma o seguinte: *em qualquer triangulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

Para os pitagóricos, entretanto, os resultados apresentados anteriormente significavam que ao considerarmos um triângulo de lados 3u, 4u e 5u e construirmos um quadrado sobre cada um dos lados, a área do quadrado formado pelo lado maior (hipotenusa) será igual à soma das áreas dos quadrados formados pelos lados menores (catetos). (Ver figura 4).

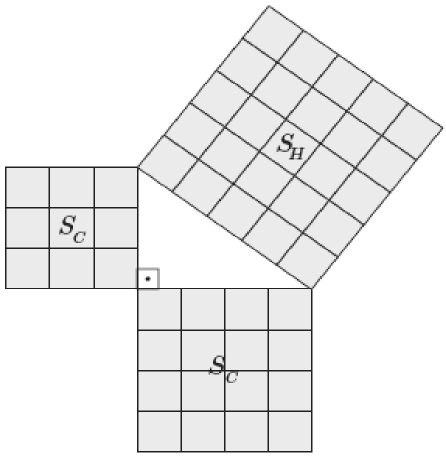
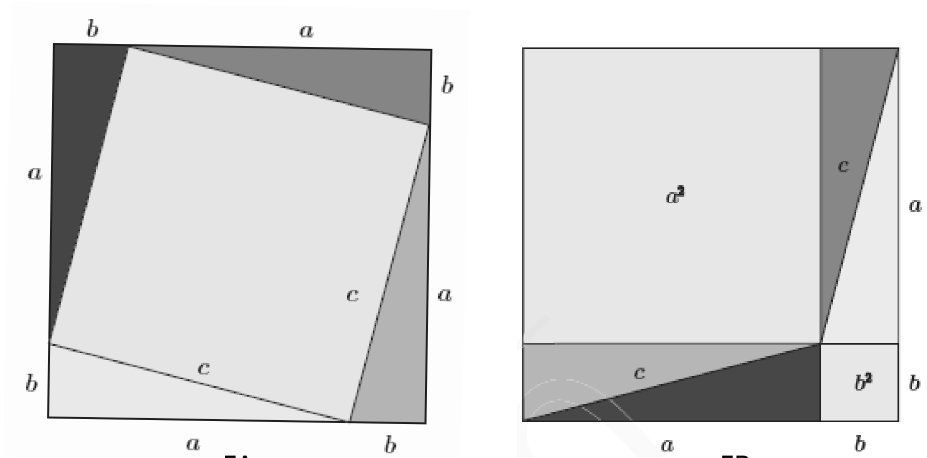


Figura 4. Representação geométrica da relação pitagórica

As demonstrações do teorema pitagórico representadas na figura 5 a seguir, foram atribuídas ao matemático indiano Bhaskara (c. 1150), que apresentou tal diagrama sem nenhuma explicação, pois segundo ele, a própria figura e a álgebra forneceria a prova.



5A 5B

Figura 5. Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras, atribuída ao matemático indiano, Bhaskara.

Algumas Problematizações Temáticas

1. A partir do quadrado representado pela figura 5A, considere que a, b e c representam os comprimentos dos segmentos, tal como está indicado na referida figura. Qual é o comprimento do lado do quadrado total representado por 5A? Qual a área do quadrado branco (menor; interno)?

2. Qual o tipo dos quatro triângulos coloridos de 5A? Qual é a área de cada um deles?

3. Explique por que a área do quadrado grande (de 5A) menos a área dos quatro triângulos coloridos é igual a área do quadrado (interno).

4. A partir do quadrado total representado pela figura 5B, considere que a, b e c representam os comprimentos dos segmentos, tal como está indicado na referida figura. Qual a área do quadrado branco maior? Qual a área do quadrado branco menor? Qual o tipo dos triângulos coloridos? Qual é a área de cada um deles?

5. Apresente os detalhes, omitidos por Bhaskara, para provar o Teorema de Pitágoras usando a figura 5A, da esquerda. Considere que você tem dois quadrados, um de lado medindo a + b e o outro medindo c.

6. Faça a mesma coisa com a figura 5B, da direita. Nesse caso você tem três quadrados, cujos lados medem a, b e a + b.

Em ambos os casos compare as áreas dos quadrados, considerando, é claro, as áreas dos triângulos presentes.

No livro I dos *Elementos de Euclides* (adaptado da versão brasileira traduzida do latim em 1944), encontramos a formulação do teorema de Pitágoras na proposição XLVII, no seguinte teorema:

> Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual [à soma] dos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.

Observe a figura 6 e analise a demonstração do teorema de Pitágoras feita por Euclides, numa linguagem mais atualizada. Nesta demonstração Euclides recorre aos seguintes resultados:

1. A área de um triângulo é igual à metade da área de um paralelogramo com a mesma base e a mesma altura.
2. Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre um cateto é igual a área do retângulo que tem por lados a hipotenusa e a projeção, sobre esta, do cateto em questão.

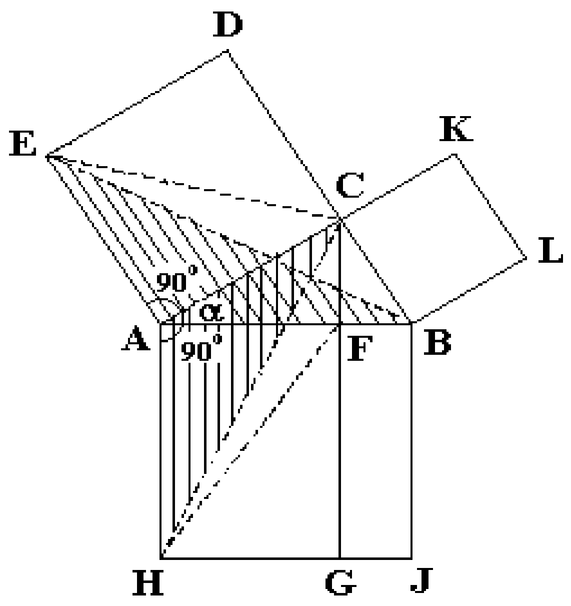


Figura 6. A demonstração geométrica de Euclides

Vejamos os comentários sobre a demonstração de Euclides

Seja o triângulo retângulo ABC, com $\hat{C}$ = 90º e seja F o pé da altura relativa a C. Constrói-se sobre os lados do triângulo ABC, quadrados ACDE, BCKL e ABJH. Prolonga-se a altura CF até encontrar o lado HJ em G (ver figura 6 anterior).

Como os triângulos ABE e AHC são congruentes, suas áreas são iguais. Como a área de ABE é igual à área de ACE e a área de AHC é igual a área de AHF, segue que a área de ACDE é igual a área de AHGF. De maneira análoga se mostra que a área de CBLK é igual a área de FGJB. Portanto, a área de AHJB é igual a soma das áreas de ACDE e CBLK.

Questionamentos e desafios

1. Como você justifica a afirmação de Euclides, na demonstração anterior, de que ABE é congruente a AHC.

2. Como justificar, também, por que as áreas dos triângulos ABE e AHC são, respectivamente, iguais as áreas dos triângulos ACE e AHF.

3. Atribua valores a, b, c, etc para as medidas dos segmentos da figura 6 e tente escrever a demonstração de Euclides em uma linguagem algébrica.

Ampliando o significado geométrico do teorema de Pitágoras

Sabemos que o teorema de Pitágoras é de grande utilidade nas aplicações práticas e que vários estudos realizados ao longo da nossa história mostraram que esse teorema não é válido apenas para o quadrado, mas para três figuras semelhantes com parte da fronteira sobre os lados de um triângulo retângulo. Desse modo, o teorema poderia ser reformulado da seguinte maneira:

> Dadas três figuras semelhantes, com parte de suas fronteiras sobre os lados de um triangulo retângulo, a área da figura correspondente a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras associadas aos catetos.

A figura 7 a seguir ilustra a situação descrita anteriormente.

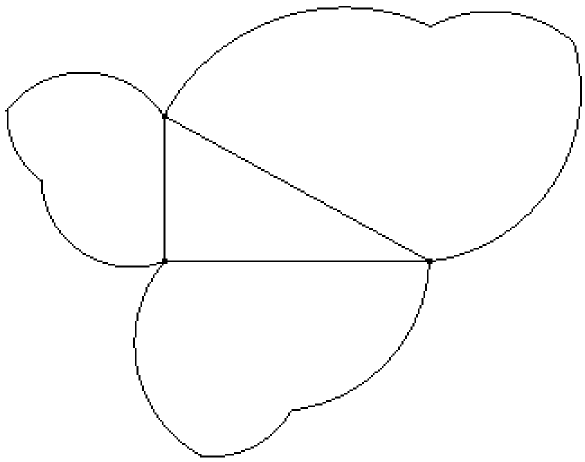


Figura 7

Quando ouvimos a expressão *figuras semelhantes*, logo pensamos em figuras que se assemelham, figuras parecidas, de mesma aparência. Podemos associar a ideia de figuras semelhantes a ampliações ou reduções de uma figura em outras guardando semelhança na forma. Matematicamente podemos dizer que duas figuras F e F' são semelhantes quando guardam entre elas uma proporção, ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de F e os pontos de F', tal que X'Y' / XY = r, onde X e Y são pontos de F e X' e Y' pontos de F' e r constante (*razão de semelhança*).

Novos desafios para ampliação conceitual

1. Tente provar o Teorema de Pitágoras para figuras semelhantes, utilizando o triângulo equilátero como figura construída nos lados do triângulo retângulo.

2. No item anterior você provou que a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos. Tente agora provar o mesmo teorema para hexágonos regulares.

3. Tente provar o teorema para semicírculos, considerando que a área de um círculo é dada por: $A = \pi . r^2$, onde r é a medida do raio do círculo.

4. Procure, nos livros de geometria, ou na internet, a demonstração do caso geral, isto é, a prova para figuras semelhantes quaisquer.

5. O Teorema de Pitágoras possui mais de 360 demonstrações diferentes. Sugerimos que você pesquise sobre algumas delas e crie formas de apresentação e discussão com os alunos.

Essa última prova do Teorema de Pitágoras que vamos apresentar é creditada ao próprio filósofo grego. A figura 8 a seguir mostra uma sequência de três passos, iniciados a partir de um triângulo retângulo ABC, sendo C o ângulo reto. Vamos à prova!

1. Desenhe, numa folha de cartolina ou papelão, um triangulo retângulo;
2. Faça uma cópia do triangulo desenhado, ou seja, desenhe outro triangulo congruente ao primeiro;
3. Trace o segmento CD, conforme mostramos na figura 8. CD é a altura h do triangulo ABC;

4. Recorte o primeiro triangulo ABC e os triângulos ADC e DBC, como mostra o passo 2 da figura 8;

5. Sobreponha os três triângulos obtidos, como mostra o passo 3 e conclua que eles são semelhantes.

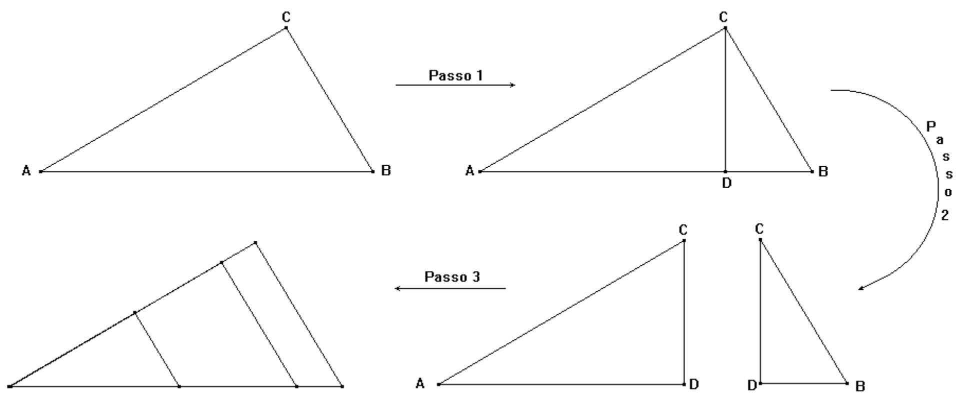


Figura 9

6. Da semelhança dos três triângulos (qual o caso de semelhança?) concluímos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \therefore \overline{AC}^2 = \overline{AB} x \overline{AD}.$$

(usando o triangulo médio e o grande)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB} x \overline{BD}.$$

(usando o triangulo pequeno e o grande)

Use os dois resultados acima para concluir que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

7. Descreva, com palavras, o resultado (Teorema de Pitágoras) obtido acima.

Novo desafio para provar o Teorema de Pitágoras

1. Comece tomando dois quadrados com lados a e b, respectivamente, colocados lado a lado. Determine algebricamente a área correspondente à soma dos dois quadrados. Mostre que a mesma é dada por a^2+b^2.

2. Como formar um novo quadrado que represente a soma dos dois representados na figura 10?

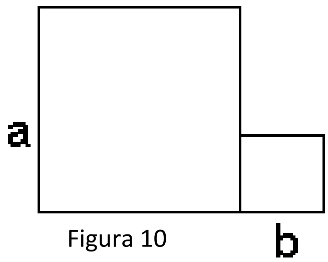


Figura 10

3. Para iniciar a prova, verifique a figura 11 e construa em cartolina os dois quadrados e recorte os dois triângulos de lados *a, b* e hipotenusa *c*. Note que o segmento comum aos dois quadrados foi removido. Neste momento, portanto, temos dois triângulos e uma forma de aparência estranha. Tente transformar essa forma estranha restante, em um quadrado.

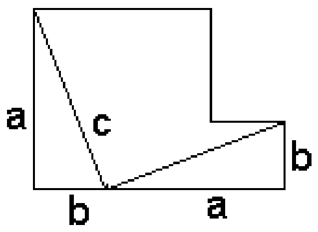


Figura 11

4. Como uma última etapa, você pode girar os dois triângulos de modo a formar um quadrado. Qual será esse quadrado?

5. Em quando graus você girou cada triângulo em torno de seu vértice superior de modo a encaixa-los até formar o quadrado de lado *c*. Observe a figura 12 e justifique algebricamente qual a área do novo quadrado encontrado.

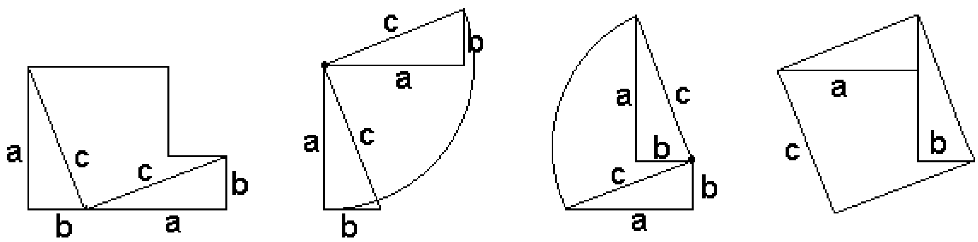


Figura 12

É evidente que a forma resultante é um quadrado com o lado c e área c². Todavia, é necessário que você prove algebricamente que a área do novo quadrado corresponde á soma das áreas dos dois quadrados iniciais da figura 10.

Curiosidade: Quadrados mágicos pitagóricos

A figura 11 mostra três quadrados mágicos dispostos conforme a relação pitagórica. ABIH é um quadrado mágico cuja soma das linhas, colunas ou diagonais é sempre igual a 147, ou seja, Soma de ABIH = 3 x 147 = 441.

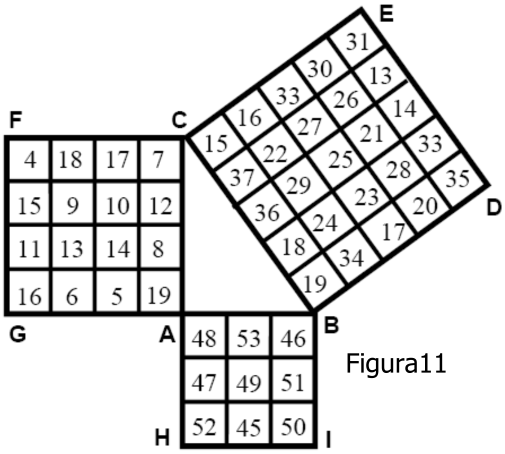


Figura11

AGFC é um quadrado mágico cuja soma das linhas, colunas ou diagonais é sempre igual a 46, ou seja, Soma AGFC = 4 x 46 = 184. Assim sendo, a soma dos quadrados mágicos ABIH + BCED = 441 + 184 = 625.

Explorando o quadrado BCED, que também é um quadrado mágico, veremos que a soma das suas linhas, colunas ou diagonais é sempre igual a 125, ou seja, Soma BCED = 5 x 125 = 625. Desse modo, percebemos que S(ABIH) + S(AGFC) = S(BCED).

1. Verifique se os quadrados mágicos, figura 12, satisfazem a relação anterior.

2. Tente criar novos quadrados mágicos pitagóricos e justique sua criação.

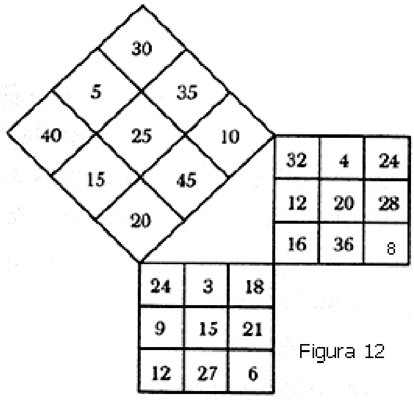


Figura 12

Atividade 03
Exploração de romances matemáticos

Objetivo: desenvolver o pensamento matemático reflexivo e analítico dos estudantes com relação às práticas e argumentações matemáticas em seus aspectos operacionais e enunciativos.

Contextualização histórica

1. Planolândia: um romance em muitas dimensões
   ABBOTT, Edwin. Planolândia: um romance em muitas dimensões São Paulo. Editora Conrad, 2002.

Em Planolândia, figuras geométricas dotadas de características bastante humanas convivem em um universo bidimensional onde a ordem é mantida a ferro e a pelas autoridades poligonais e circulares. No entanto, todas as convicções de um incauto quadrado planolandês ameaçam ruir quando um visitante esférico irrompe para revelar a transtornante existência de uma terceira dimensão.

O livro *Planolândia: um Romance de muitas dimensões* é uma obra literária de fundo histórico de escrita e publicada pelo clérigo inglês Edwin Abbott, em 1884. Nela seu autor satiriza os preconceitos da sociedade inglesa vitoriana criando um mundo de duas dimensões. Abbott acertou no uso das analogias e na sátira para ensinar de maneira não disciplinar, diversos conceitos e relações geométricas básicas para crianças e adolescentes.

A criação imaginativa de Edwin Abbott, conectada a uma mistura de matemática, física, ficção, crítica social e certa dose de sarcasmo e sátira favoreceram a criação de uma aventura que mesmo depois de mais de um século de existência constitui leitura prazerosa, divertida e recheada de informações úteis para uma aprendizagem matemática globalizante. O livro já foi base para a criação de um filme com o mesmo título.

Tópicos abordados no romance

Na parte I do romance, intitulada *Este Mundo*, o autor apresenta o contexto do lugar geométrico em que o lugar se fundou e como está estruturado o lugar ou seja a natureza de Planolândia, caracterizado pelo seu clima e a organização das casas, bem como dos habitantes do local (homens e mulheres). O autor segue caracterizando os métodos que usamos para reconhecermos uns aos outros em contextos sociais, a partir dos nossos sentidos como a visão. Nesse momento insere suas primeiras abordagens sobre as figuras irregularese a presenta dessas formas nas antigas práticas da pintura, bem como as relações entre as cores

Na parte II, intitulada *Outros mundos*, o autor propõe um novo olhar sobre o lugar, mas com enfoque nas linhas (uma visão de Linhalândia) e enuncia que não poderia explicar um espaço plano sem as linhas. Em seguida explora um novo mundo para além da linhalândia e da espaçolância. Trata-se do lugar que o autor denominou de Espaçolândia, cujos nomes de entidades habitantes no lugar são considerados todos misteriosos. Daí anuncia as formas espaciais e suas relações entre si e com as entidades relacionadas às linhas e ao plano. Com base nessas relações aponta suas tentativas de ensinar a teoria das três dimensões a uma criança (seu neto) e de que modos e poderia difundir tais teorias.

2. Diálogos de Aritmética práctica y especulativa

   PÉREZ DE MOYA, Juan. Diálogos de Aritmética práctica y especulativa. Zaragoza (ES): Prensas de la Universidad de Zaragoza, 1987. (Colección Clásicos).

O romance matemático *Diálogos de Aritmética práctica y especulativa,* de autoria de Juan Pérez de Moya, publicado por volta do ano de 1562, foi escrito na forma de diálogo. Neste livro o autor discute se as matemáticas, mais especificamente se a aritmética é um estudo puramente especulativo ou se é útil na realidade, nos usos comuns da vida. Essa foi uma das maneiras encontradas pelo autor para combater a ideia constante de nossos antepassados, de que o homem não necessitava saber mais além do que fosse necessário para sua sobrevivência.

Considerando a aritmética como uma coleção de regras práticas, nestes diálogos entre dois personagens centrais – Antímaco e Sofronio, o primeiro personifica exatamente um homem daquela época, que se admira de que haja quem leia livros de aritmética. Além disso, nega que os princípios da aritmética possam constituir uma ciência. O segundo, Sofronio, representa a polêmica como coisa de jogo e distração e se esforça para convencer Antímaco das vantagens do estudo matemático, demonstrando-lhe, com argumentações ao estilo daqueles tempos, e com exemplos incontestáveis, tomados de sucessos da vida, que não só os homens dedicados ao estudo especulativo, mas os comerciantes, os artesãos, os criados de serviço, os que exercem as mais simples indústrias, necessitam do conhecimento da aritmética.

Sugestões para uso didático dos romances históricos

Os dois exemplos mencionados neste bloco temático sobre histórias que podem ser usadas no ensino, se diferenciam dos anteriores porque neles depositamos uma esperança nas alterações pedagógicas que podem ser inseridas no tratamento didático com a matemática na escola. Em ambos os casos, o professor tem a oportunidade de desafiar os estudantes a pensarem, refletirem, e se divertirem com um exercício de inserção em um tema e em uma época que não viveram, mas que poderão dar vida aos personagens e daí se apropriarem dos modos de pensar, compreender e explicar matemática em um estilo de pensamento que pode lhes ajudar na aprendizagem de conceitos, propriedades e relações matemáticas previstas pelo professor.

Para uso deste tipo de material sugerimos que sejam feitas sessões de discussões temáticas, encenação teatral, entrevistas com a população em geral e comparação dos depoimentos com os presentes nos romances, bem como a criação de problematizações a partir do conteúdo dos livros.

Alguns exemplos de investigação histórica na formação de professores

Exemplo 1

Ensino dos números Complexos via história e atividades[7].

Introdução

Atualmente nos deparamos com professores de matemática bem como alunos de licenciatura em matemática e lhes lançamos questões do tipo: vocês estudaram números complexos no Ensino Médio? E na graduação, qual foi a disciplina do seu curso que abordou profundamente os números complexos? Como é a sua metodologia de ensino dos complexos para seus alunos? O que é um número complexo para você? Na maioria das vezes recebemos respostas vagas, vazias ou silenciosas como se quisessem ocultar alguma frustração ou desconhecimento sobre tal assunto. Vivenciamos uma experiência didática cuja abordagem dos números complexos considerou a importância de desafiar os estudantes para buscar construir sua própria aprendizagem acerca desse tópico matemático. Nosso objetivo principal foi oportunizar ao professor em exercício ou ao professor em formação, uma experiência de ensino-aprendizagem centrada em uma abordagem dinâmica, provocativa, construtiva e formal acerca do ensino-aprendizagem dos números complexos. Nesse sentido, desenvolvemos um bloco de atividades que envolvem demonstrações de aplicações geométricas dos complexos de modo a formalizar aspectos conceituais já estudados como definições, propriedades e operações. Um aspecto didático bastante importante abordado na experiência foi a possibilidade de se relacionar as demonstrações ao exercício da investigação matemática em sala de aula, em que os alunos devem formular conjecturas e buscar meios e estratégias

[7] Trabalho elaborado por Daniel Ecco, com minha participação como coautor, durante atividades de iniciação científica no curso de licenciatura em Matemática da UFRN. Este texto foi utilizado para um minicurso ministrado no III CIEM, na ULBRA/RS.

para demonstrá-las. Assim, a formalização das demonstrações contribui para a exploração e discussão de algumas questões de lógicas essenciais ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Revisitando o desenvolvimento histórico dos complexos

A abordagem aprofundada aos números complexos, apesar de ter sido feita a partir do séc. XVIII foi mencionada levemente por outros matemáticos anteriores à este século. No entanto, dada a incompreensão e o desconhecimento destes números, tais matemáticos abandonaram o seu estudo. O primeiro matemático de que se tem conhecimento de se ter deparado com um problema que envolvia números complexos foi Héron de Alexandria (séc. I d. C.) no livro *Stereometrica*. Este pretendia resolver a expressão $\sqrt{(81-144)}$ = $\sqrt{-63}$.

Por volta do ano 275 d.C. Diophanto (200 – 284 aprox.) ao resolver um problema deparou-se com a equação $24x^2$ - 172x + 336 = 0. Como concluiu que não tinha soluções reais, não viu necessidade de dar sentido à raiz $\sqrt{-167}$.

Quando tratamos dos aspectos históricos dos números Complexos, temos duas frentes de origem, interligadas uma na outra: a origem geométrica e a algébrica. As informações históricas apontam que o primeiro a questionar a raiz quadrada de um número negativo foi Gerolamo Cardano, no seu *Artis Magnae Silve de Regulis Algebrbraicis Liber Unicus* (Arte Magna ou sobre as Regras Algébricas Únicas) composto em 1542 e publicado em 1545, (RICIERI, 1993 LOUREIRO ET AL, 2000).

Partindo das elaborações presentes na Arte Magna de Cardano podemos considerar que o mesmo procurava as possíveis soluções para a equação do 2º grau $x^2+1=0$, em que Cardano refere-se às raízes como números artificiais. Logo em seguida, em 1559, Rafael Bombelli propõe a representação de duas raízes para o problema de Cardano, na forma, + $\sqrt{-1}$ e - $\sqrt{-1}$. Em seu primeiro estudo sobre os números complexos, Rafael Bombelli (1572) gastou 74 páginas de seu *L'Álgebra* para estudar as leis algébricas que regiam o cálculo com as quantidades $a+b\sqrt{-1}$. Em particular, mostrou que as quatro operações aritméticas sobre números complexos produzem números desse tipo e que a soma de um real e um imaginário puro não pode se reduzir a um só nome.

Investigação do fechamento dos complexos

Até cerca de 1650 d.C., em respeito à orientação geométrica da matemática grega, as únicas raízes consideradas como legítimas ou verdadeiras eram as que correspondiam às grandezas geométricas ou físicas: podiam ser interpretadas como comprimentos, áreas, volumes, massas, etc. diríamos hoje: correspondiam a números reais positivos.

A garantia de que era possível realizar algumas operações aritméticas com os números complexos dependia diretamente da comprovação de algumas propriedades da aritmética com os números inteiros. Uma que mais preocupava Bombelli era a propriedade de fechamento. Embora Bombelli já tivesse se preocupado em provar o fechamento das operações aritméticas com números complexos, em 1680, Leibniz questionou-se acerca do fato de ser real ou não o resultado de $\sqrt{(a+bi)}+\sqrt{(a-bi)}$.

Conforme Loureiro (2000), Cardano propôs a determinação de dois números cuja soma seja 10 e o produto 40. Na resolução do citado problema, obteve como solução: 5+ $\sqrt{-15}$ e 5- $\sqrt{-15}$. Assim Cardano foi o primeiro a considerar expressões desse jeito. Porém surgiu um foco central para a evidência dos números complexos relacionado com a busca de solução para equações do 3º grau tal como apareceu na solução de algumas equações do 2º grau. Na obra de Cardano, para a resolução de $x^3 = px+q$, em que *p* e *q* são números positivos, a solução é dada por:

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ . \qquad (1)$$

Bombelli(1526), em seu *L'Álgebra* (1572), considerou a equação $x^3 = 15x - 4$, aplicando-lhe (1) obteve

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \qquad (2)$$

expressão estranha, tanto mais que ele conhecia todas as raízes:

$$4, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}.$$

A fórmula de Cardano (1) parece não ajustar-se muito a este caso. Todavia, Bombelli apresentou uma nova ideia que pareceu viável à solução do problema, pois talvez os valores

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

estivessem relacionados entre si como os respectivos radicandos, o que o levou a procurar *a* e *b* positivos tais que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}.$$

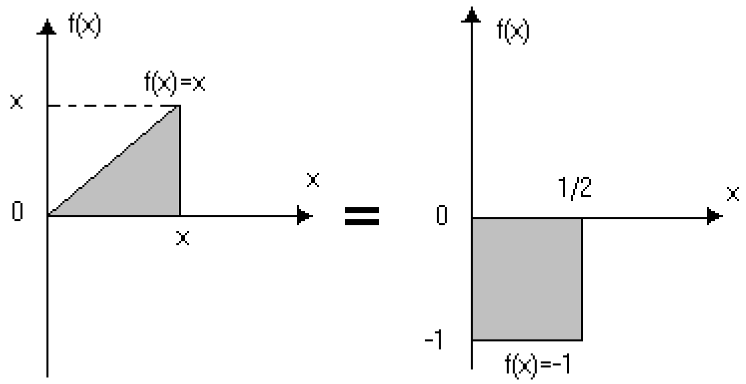
Se assim fosse, então (2) concluir-se-ia facilmente tendo como resultado x = 2a.

Algumas manipulações algébricas permitiram-lhe obter a = 2 e b = 1. Portanto de (2) conclui-se que x = 4.

Fica evidente, portanto, que tanto Cardano como Bombelli, apesar de frequentemente referirem-se à álgebra, não pensavam em termos algébricos. Suas ideias eram basicamente geométricas. A prova disso é o uso da frase "*radix quadratus*" que literalmente significa "lado do quadrado". Assim, a sentença *radix quadratus 9 aequalis 3* comunicava a ambos que o lado do quadrado de área nove vale 3. Deste modo, qual o lado do quadrado cuja área é igual a -1? Nesse questionamento temos a primeira evidência de uma origem geométrica dos complexos.

Um momento bastante importante a esse respeito ocorreu em 1665, quando John Wallis, publicou seu *Arithemetica Infinitorum* (Aritmética no Infinito), fazendo emergir um maior número de problemas geométricos envolvendo os complexos. Wallis chegou a concluir que a área de uma curva x^n definida no domínio [0, b] é $A = \frac{B^{n+1}}{n+1}$, o que hoje nada mais é do que $\int_0^b x^n dx$, no mesmo domínio.

Com esta solução, chamada de Integridade Roberval-Cavalieri, Wallis tentou igualar as duas áreas a seguir:



O problema pode ser enunciado da seguinte maneira: "... *qual o valor de x no gráfico da esquerda para que a área do triângulo seja igual a área do retângulo à direita..."*. Apesar de ser imprecisa a questão enunciada, Wallis buscava resolver essa identidade de áreas usando o resultado de Roberval- Cavalieri. Assim substituía b = x e n = 1 em $A = \frac{B^{n+1}}{n+1}$, ou seja:

Área do triângulo = Área do retângulo

$$x^2 = -1$$

Surge, no entanto outra questão: "... *qual seria o lado (x) de um quadrado de área negativa (-1)? Não deve ser x = 1, pois 1 vezes 1 é um, nem tão pouco x = –1, pois –1 vezes –1 é também um. Eis uma dúvida cruel..."* É importante refletirmos que no século XVII não se tinha o conhecimento sobre áreas como temos hoje, não se admitindo validade para os valores negativos atribuídos ao cálculo de áreas.

Com Wessel, nasce o conceito da unidade $\sqrt{-1}$ ser perpendicular à reta dos reais. A mesma idéia de representação geométrica teriam Argand (1806) e Gauss (1811). Com todos esses estudos a respeito da Álgebra e da Geometria dos Complexos, logo se chegou a elaboração das representações conhecidas atualmente como *Forma Algébrica* e *Forma Trigonométrica dos Complexos*.

Algumas sugestões para o ensino de números complexos

Durante dois anos, experimentamos uma tentativa de abordagem didática para os números complexos, considerando a importância de lançar desafios para que os estudantes de graduação em matemática, ou mesmo professores do ensino médio possam construir sua própria aprendizagem acerca desse tópico matemático abordado na escola. Nosso objetivo principal foi oportunizar ao professor em exercício ou ao professor em formação, uma oportunidade de experimentar uma abordagem dinâmica, provocativa, construtiva e formal acerca do ensino-aprendizagem dos números complexos.

Nos apoiamos nas propostas oferecidas por Loureiro (2000), através da qual nos oferece um elenco de atividades para o ensino de números complexos, centradas na investigação matemática, no exercício de demonstrações e na busca de solução para problemas de aplicação dos complexos em subáreas correlatas da matemática, nas quais os números complexos se mostram diretamente associados a sistemas de coordenadas, vetores, transformações trigonométricas, geometria e o cálculo.

Com base neste material, realizamos um estudo coletivo visando obter as soluções para as atividades propostas de modo a propor uma alternativa didática para professores de matemática do ensino médio. Partindo daí organizamos um minicurso a ser ministrado aos professores visando dar-lhes os primeiros subsídios para desenvolvimento da proposta em suas sala de aula. Além das soluções propostas para os problemas lançados, ampliamos as informações acerca do desenvolvimento histórico dos complexos visando oportunizar um melhor entendimento conceitual por parte dos professores envolvidos. Assim, foi possível solidificarmos a proposta, contextualizando os aspectos histórico-epistemológicos através de uma interação dos números complexos com a história e outras áreas da Matemática.

Um modelo de atividades em desenvolvimento

A partir do uso de uma linguagem e notação, algébrica e trigonométrica aliada a uma perspectiva investigatória centrada na experimentação e na demonstração, buscamos elaborar e propor atividades de ensino nas quais a contextualização Matemática foi se construindo na medida em que os alunos efetivaram concretamente o exercício de formulação das ideias matemáticas em sala de aula, apoiando-se em três componentes essenciais para tais atividades: a intuição imaginativa, a experimentação centrada na elaboração de esquemas algorítmicos e gráficos e a formalização simbólica apoiada na linguagem algébrica.

Verificamos que ao longo do desenvolvimento das atividades, a simplificação nas notações apoia-se nos isomorfismos existentes entre as várias estruturas algébricas em causa, e torna toda a escrita matemática algébrica mais simples, sem qualquer perda de rigor. O formalismo da linguagem matemática não existe para complicar, apenas para tornar a comunicação e o pensamento mais rigorosos. Assim consideramos importante mencionar que há quem considere a designação *números imaginário tantas vezes atribuído* aos números complexos como uma designação infeliz. Como temos uma tendência natural para ligar os nomes aos sentidos já conhecidos das palavras e aprendemos os termos *imaginário* e *número* em contextos totalmente diferentes dos que são usados pelos matemáticos, os alunos podem ser levados a pensar que estes números não existem. A existência destes números tem exatamente a mesma natureza que a existência dos números reais: é uma construção matemática.

Com os complexos não estão presos a uma representação única, podemos usar a que melhor nos convier para encontra soluções de problemas surgidos. Por isso mesmo, uma das dificuldades com que nos debatemos é como dialogar permanentemente com as diversas representações, utilizando-as em cada momento aquela que for mais útil e mais fértil para a produção matemática. É nessa perspectiva de abordagem que a atividade se torna muito mais rica para o desenvolvimento de um pensamento matemático avançado.

Para realizar essas escolhas temos que dominar as relações entre as várias representações, para poder nos movimentar cognitivamente entre uma e outra conforme a finalidade, para poder perceber em cada caso as vantagens de usar uma ou outra. O trabalho com os números complexos é, por isso mesmo, um trabalho matemático ricamente formativo em termos de educação matemática, pois dá significado à capacidade de decisão. Decidir o tipo de coordenadas, escolher a unidade ou decidir a representação são ações que contribuem para que os alunos compreendam que só é possível haver tomada de decisão quando são conhecidas as várias alternativas, as suas possibilidades e se tem destreza e maleabilidade para transitar entre elas.

É importante, porém, notarmos que ao tomar a decisão de ir por um determinado caminho estamos praticando uma experiência na qual podemos ter a intuição de que a mesma nos levará a uma solução, embora nem sempre possa nos levar. Então, é preciso avaliarmos o resultado obtido e voltar atrás, se for necessário, pois esse processo de avanço e retrocesso faz parte do verdadeiro caminho das investigações e da demonstração.

No ensino de números complexos, o professor deve optar por duas fortes alternativas: valorizar mais a prática do cálculo ou valorizar as conexões com a geometria e o trabalho com as transformações geométricas. Embora as transformações geométricas sejam bem desconhecidas dos alunos que entram e saem do Ensino Médio, muitos aspectos da sua linguagem têm sido trabalhados nas funções, quando se investiga a influência de alguns parâmetros nos gráficos. Os números complexos proporcionam grande oportunidade para se abordar as transformações geométricas e as noções de simetria, tão centrais em matemática. Simultaneamente, as transformações geométricas são indispensáveis para uma boa compreensão destes números e das suas utilizações dentro da matemática.

Atividades de investigações e demonstrações envolvendo os complexos

Alguns matemáticos consideram que os números complexos constituem um dos temas de unificação da matemática por excelência, pois na medida em que englobam todas as propriedades dos reais, acrescentam novas propriedades específicas dos imaginários. Esse processo de construção matemática nos mostra que, historicamente, na medida em que as pesquisas sobre esse tema foram avançando, foi se evidenciando cada vez mais a necessidade de compreensão numérica para além dos números reais, ou seja, com os números complexos ampliou-se a possibilidade de conexão entre a intuição e a descoberta em matemática. Uma das idéias mais importantes, senão a mais importante, para trabalhar os números complexos deve-se à quantidade de informação que estes números sintetizam.

A geometria possui um corpo de propriedades cujas demonstrações podem ser elaboradas e praticadas sem usar seus rigorosos axiomas, recorrendo sim aos princípios lógico-matemáticos estabelecidos na construção dos números complexos. E assim fizemos; desenvolvemos atividades com uma enorme visualização geométrica dos complexos, formalizando propriedades, operações e definições; agora com as características desse corpo numérico.

As atividades foram constituídas de alguns momentos: 1) leitura e verificação do problema que estava sendo apresentado; 2) esboço do raciocínio de solução do problema; 3) elaboração e formalização da demonstração. Nesses momentos, o aspecto didático ficou bastante evidenciado na experiência, pois quando relacionamos as demonstrações e a investigação matemática aos princípios pedagógicos a serem utilizados pelos alunos, exploramos suas competências matemáticas para solucionar problemas visando alcançar uma prática demonstrativa dos princípios matemáticos que envolvem os complexos.

No primeiro momento, portanto, percebemos que é através dos artifícios matemáticos, presentes nos alunos, que os mesmos buscam elaborar suas primeiras possibilidades de demonstração, seguido de uma tentativa de formalização que os leve à conclusão da mesma. Verificamos, então, que a finalização da atividade se constitui em um momento muito rico para exploração e discussão de relações conceituais fundamentais que conduzam o aluno a um amadurecimento matemático, o que para muitos se constitui na construção de uma compreensão relacional em matemática.

Organizamos dois módulos dedicados ao ensino dos números complexos com atividades propostas para o ensino médio. Um deles é o de *números complexos e sistema de coordenadas*, pois o domínio desse sistema de representação é fundamental para a compreensão dos outros sistemas de representação gráfica como o das coordenadas polares, relacionado ao corpo dos complexos.

O outro módulo refere-se aos *números complexos com vetores*. No trabalho com números complexos, uma das ideias mais simples e com mais potencialidades é a da representação dos mesmos por vetores. É simples porque a cada número complexo $a + bi$ está associado o vetor de coordenadas (a, b). As potencialidades são várias e em perspectivas diferentes. Por um lado, a representação visual dos complexos, a sua comparação, a interpretação das operações com complexos em termos de transformações geométricas ou operações com vetores. Por outro lado, o poder do cálculo algébrico com complexos para resolver problemas geométricos ou de natureza vetorial. Em nossa opinião, estas potencialidades são exploradas através de um trabalho sistemático de interpretação vetorial dos complexos, das suas relações, e das operações que se realizam com eles.

As duas representações numéricas de um número complexo, algébrica e trigonométrica, têm leituras diferentes na interpretação vetorial. A forma algébrica corresponde imediatamente às coordenadas do vetor, a forma trigonométrica dá informação direta da norma, da direção e do sentido do vetor.

Enfim, organizamos e testamos um bloco de atividades que tem a finalidade de construir uma proposta de abordagem para os números complexos, de modo que os professores possam dar aos seus alunos um ensino investigatório com significado e desenvolvimento conceitual. Para além destes, é importante lembrar que este tema tem aspectos históricos muito relevantes que podem proporcionar interessantes atividades de pesquisa.

As atividades não foram organizadas pela ordem pela qual poderão ser propostas aos alunos, mas sim por conexões fundamentais nos permitindo identificar e esclarecer relações e refletir sobre as possibilidades didáticas de cada conexão. Consideramos importante que os professores tenham ideias claras e precisas acerca do que está sendo tratado, para assim estruturarem um melhor caminho a percorrer com seus alunos. Para estes, as ligações com os outros temas da matemática vão aparecendo na medida em que se avança nesse caminho pelos complexos, numa perspectiva de esclarecimento mútuo entre os números complexos e os outros temas matemáticos que lhe estão ligados.

Considerações finais

A partir do desenvolvimento e discussão das atividades propostas é possível afirmarmos que as aplicações realizadas apontam para diversas conexões entre os complexos, a geometria, a trigonometria e a álgebra. Tais conexões devem se articular continuamente objetivando dar aos alunos uma compreensão relacional do conceito de número complexo como um elemento de unificação do pensamento numérico e que é através de um trabalho matemático mais formativo, significativo que se torna possível a ampliação da capacidade de decisão e investigação dos alunos como, por exemplo, a exploração dos aspectos geométricos e da representação dos complexos sob diversas modalidades.

Após a realização das atividades foi possível percebermos que em muitas situações, as transformações geométricas aparecem como um instrumento útil à interpretação de relações entre números complexos, mesmo que não seja explícita a necessidade de representá-los geometricamente, isso fica evidente nas demonstrações das aplicações realizadas.

Vale ressaltar, porém, que quando experimentamos demonstrar em matemática, temos a intuição de que chegaremos a uma solução, o que nem sempre é possível. É necessário, entretanto, avaliarmos o resultado e as lacunas deixadas em cada demonstração realizada, o que torna possível a busca de novas possibilidades de superação dessas lacunas, o que garante o verdadeiro princípio das investigações e da demonstração em matemática.

Bibliografia

BELL, E. T. ***História de las matemáticas***. Tradução R. Ortiz. México: Fondo de cultura econômica, 1996.

CARAÇA, Bento de Jesus. ***Conceitos Fundamentais da Matemática***. Lisboa: Editora Gradiva, 1998. (Coleção Ciência Aberta, 98)

COURANT, R., ROBBINS, H. ***O que é matemática*: uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: editora Ciência Moderna, 2000.

DANTZIG, Tobias. ***Número*:** a linguagem da ciência. Tradução Sérgio Gomesm de Paula. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. ***A Experiência Matemática***. Lisboa: editora Gradiva, 1995. (Coleção Ciência Aberta, 75)

GODEFROY, Gilles ***A aventura dos números*** Lisboa Instituto Piaget, 2000

LOUREIRO, Cristina et al. ***Trigonometria e Números Complexos***. 12º ano de escolaridade. Lisboa: Ministerio da Educação. Departamento de ensino secundário, 2000.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. ***Assim nasceu o imaginário***: origem dos números complexos. São Paulo: Edições Pradiano, 1993.

RODRIGUEZ, Juan Argüelles. ***História de la matemática***. Madri: edições Akal, 1989.

Exemplo 2

A Invenção da Calculadora sobre três olhares históricos: O Ábaco, A Régua de Cálculo e a Pascaline[8]

Introdução

Este trabalho retrata sobre uma síntese histórica da origem da calculadora. Esse magnífico instrumento tornou-se importante no auxílio do cálculo, bem como nas soluções de determinadas operações matemáticas. Os primeiros estudos sobre a calculadora foi desenvolvido aproximadamente 20 séculos atrás. Os estudiosos matemáticos da época sempre procuravam uma forma mais simples de obter uma solução matemática. Assim, tudo começou com um simples instrumento chamado ábaco, que era usado pelos os hindus para a resolução de cálculos simples, tais como: adição, subtração, multiplicação e divisão entre outros meios. A análise primordial da calculadora reconhecida nessa época como ábaco

[8] Trabalho elaborado por Evanildo Costa Soares, com minha participação como coautor, durante atividades de mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM/UFRN).

contribuiu bastante para que outros estudiosos desenvolvessem máquinas sofisticadas de cálculo.

Dessa forma, o ábaco foi ápice inicial para a invenção da calculadora. Os seus mecanismos e meios de realização de operações eram simplesmente manuais, ou seja, requeria da pessoa certa habilidade mental para a concretização do cálculo aritmético.

Nesse trabalho, discorreremos sobre as principais invenções que geraram a calculadora, são eles: o ábaco, a régua de cálculo e a primeira máquina de calcular desenvolvida por Pascal. Ao retratar sobre os estudos e o desenvolvimento da calculadora, destaca-se que Pascal foi mais objetivo ao idealizar em sua mente, os principais procedimentos testados manualmente para a invenção de uma calculadora que ficou conhecida como Pascaline. O mecanismo e a formulação sobre este instrumento de cálculo foi importante para que ele construísse uma máquina de calcular movida a engrenagens e ajudassem os principais estudiosos e comerciantes da época que tinham contato direto com uso das operações matemáticas, principalmente, a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão.

A origem do ábaco

Ao certo não temos uma informação precisa de quem inventou o ábaco, mas sua origem possivelmente tenha sido a Índia de onde se espalhou para o oeste da Europa e leste da China, assumindo várias formas que manteve-se essencialmente como o mesmo instrumento. Sua disseminação na Europa pode ser seguida pela introdução gradual e o aperfeiçoamento do sistema de codificação da notação moderna que, por sua vez, teve a sua origem primitiva com as indicações do Ábaco em si (KNOTT, 1915).

Segundo este mesmo autor, historicamente, a origem do ábaco foi na Índia, mas poderia severamente ter sido inventado pelos índios ariana, quando escrevia e falava de modo inverso. A probabilidade é que eles tenham sido adquiridos pelos povos semitas, que eram os comerciantes do mundo antigo; e teses que possivelmente tenham sido inventado ou talvez tenha provavelmente recebido um dialeto de linhagem, escrita direta de raça, tal como conhecemos por ter seguido uma forma culta e encadeada.

Nos tempos primórdios, o ábaco, foi inicialmente uma evolução do desenvolvimento natural do homem ao transcrever uma trajetória completamente diferente da representação gráfica dos números. Este último, podemos investigar diretamente por quatro processos: O pictórico, o simbólico, o decimal e a cifra. O pictórico tem sido encontrado nos hieróglifos egípcios, na escrita cuneiforme e nos tratados de técnica de matemática chinesa; o simbólico nos métodos numerosos que cresceu com o desenvolvimento de alfabetos e silabários; o decimal na simplificação destes, vivenciados atualmente pelos chineses e seu sistema de numeração. Assim, o processo de utilização do decimal foi crescendo notavelmente e de uma forma geral foi semelhante ao ábaco sugerindo indicações e correspondências ainda mais próximas. Este avanço parece ter ocorrido entre os índios arianos, que juntamente com os arianos do Ocidente, possivelmente, tenha desenvolvido o ábaco com uma notação de cifra[9].

O Soroban ou ábaco pode ser definido como uma combinação de contas móveis, que deslizam ao longo das hastes fixas e indicará em sua configuração definitiva alguma quantidade numérica. Sua forma mais conhecida foi formulada por uma caixa retangular rasa ou estrutural, que é dividida longitudinalmente por um cume estreito em dois compartimentos, um dos quais é cerca de uns três ou quatro vezes maior que o outro. De uma forma mais abrangente: é um antigo instrumento de cálculo, formado por uma moldura com bastões ou arames paralelos, dispostos no sentido vertical, correspondentes cada um a uma posição digital (unidades, dezenas, ...) e nos quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas,

[9] Número escuro, em notação atual é o zero.

contas,...) que podem fazer-se deslizar livremente, conforme ilustra a figura 1.

O ábaco pode ser considerado como uma extensão do ato natural de se contar nos dedos. Emprega um processo de cálculo com sistema decimal, atribuindo a cada haste um múltiplo de dez. Ele é utilizado ainda hoje para ensinar às crianças as operações básicas da matemática.

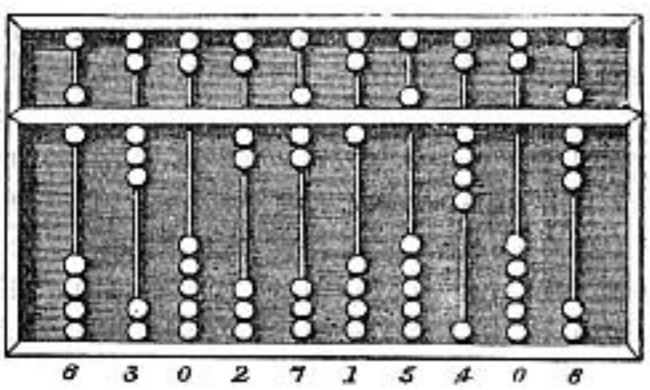


Figura 1: Google imagens

A Régua de cálculo

Segundo Soares (2011, p. 68) "A criação dessa régua foi realizada pelo padre inglês William Oughtred em 1638, baseando-se num trabalho chamado círculo das proporções, publicado em 1633".

De acordo com Magalhães (2003, p.13), "o uso específico dessa régua era necessário, pois ela continha escalas decimais e os intervalos tinham exatamente o mesmo comprimento, que facilitava os cálculos multiplicativos e ajudava a calcular os logaritmos" conforme mostra a figura 2 a seguir.

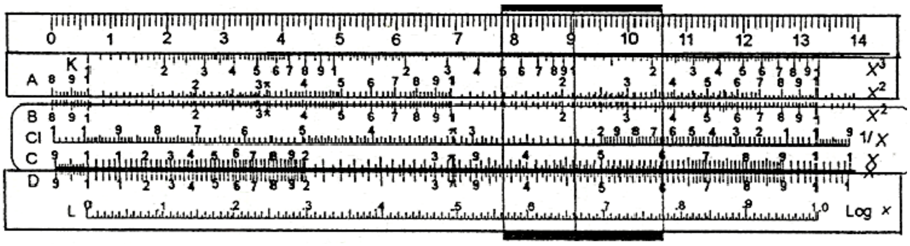


Figura 2: Figura extraída do livro de Magalhães (2003)

A figura 2 nos mostra a ampla aplicação que era feita desta régua:

- Efetuar multiplicação ou divisão convertendo-os em somas e subtrações;
- Encontrar o logaritmo decimal – Escala L;
- Elevar ao quadrado ou extrair raiz quadrada, podendo efetuar diretamente multiplicação e divisão de quadrados – Escalas A e B;
- Elevar ao cubo ou extrair raiz cúbica – Escala K;

No outro lado da lingueta apresentava as escalas trigonométricas

- Seno de x – Escala S;
- Tangente de x – Escala T;
- Arco correspondente à função trigonométrica – Escala ST.

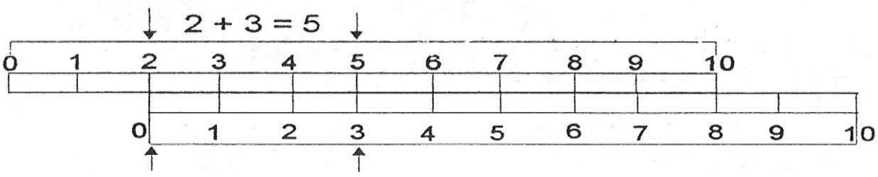


Figura 3: Imagem extraída do livro de Magalhães (2003).

A principal diferença que existia entre elas era que suas escalas tinham formatos diferentes. Na régua com escala decimal, os intervalos entre os valores têm exatamente o mesmo comprimento. Então, a efetuação da soma de dois segmentos era realizada normalmente, conforme ilustra a figura 3 anteriormente.

Na régua com escala logarítmica, os intervalos são proporcionais aos logaritmos (base dez). Dessa maneira, para efetuar a soma de dois comprimentos era necessário realizar a multiplicação dos valores, conforme ilustra a figura 4.

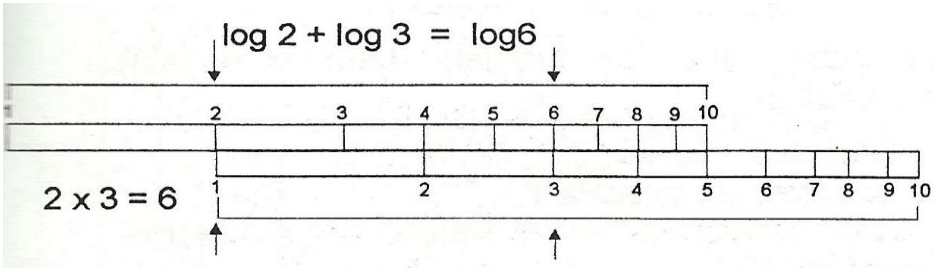


Figura 4: Ilustração extraída do livro de Magalhães (2003)

Existiam réguas de vários tamanhos e com diversas funções, como por exemplo, função hiperbólica, logaritmo natural, valores trigonométricos do cosseno. Esse objeto de cálculo tinha diversas utilidades e facilitava os cálculos logaritmos da época, além de auxiliar na sua publicação.

A Pascaline

A primeira máquina de calcular foi idealizada por Blaise Pascal (1623-1662), no qual desenvolveu, na França, um mecanismo de cálculo com 8 valores transportando os seguintes números 10, 100, 1000, etc. Essa máquina foi reconhecida e chamada de "Pascaline". Embora vários modelos fossem concluídos, a máquina de Pascal era mais provável de ser encontrado nos apartamentos de proprietários como uma peça em conversação ao invés de usá-la em escritório. Pascal, em sua memória, desenvolve esta máquina porque pensava em ajudar seu pai em seu trabalho como cobrador de impostos. Os cálculos são feitos com uma espécie de ABAX, usando pequenas pedras para somar e subtrair. O processo de funcionamento da máquina se dava quando uma engrenagem com dez dentes produzia uma rotação (dezenas) e uma segunda marcha puxasse até que um dente da engrenagem girasse dez vezes (centenas) que desloca outra engrenagem (milhares), etc. Este princípio é ainda utilizado em odômetro de automóveis, bombas de postos de gasolina, e medidor de eletricidade caseira.

Os números a serem adicionados foram criados através de alguns discos girando na parte inferior. Depois de trabalharem com um identificador a resposta aparecia em uma janela. Desta forma, a máquina só poderia somar. Ao Subtrair era necessário fazer algumas adaptações para que contasse "para trás". A divisão e multiplicação podem ser realizadas através de repetidas adições e subtrações. Esta é a forma mais mecânica de funcionamento de uma calculadora (figura 5).

Figura 5: Imagem extraída da internet

A Pascaline ajudou os principais comerciantes da época, que tinham contato direto com a matemática e sua construção lógico-matemática proporcionou que os estudiosos desenvolvessem novos modelos mais sofisticados importantes para o avanço científico e tecnológico da sociedade, além de apontar novos caminhos e métodos para possíveis realizações do cálculo envolvendo as operações e fórmulas matemáticas.

Reflexões finais

O estudo mostrou que a construção lógico-matemática das calculadoras, ao longo da história contribuiu para o desenvolvimento da matemática, e apontou novos caminhos para a exploração do processo de cálculo de forma divertida, inteligente e prática. Desse modo, a modernização do conhecimento matemático e o facilidade do uso das operações básicas da matemática foi importante para que o uso tecnológico da calculadora ampliasse novos métodos, caminhos e fórmulas de calcular levando a sociedade a idealizar e construir modelos mais sofisticados, tais como: a régua de cálculo e a pascaline que contribuiu de forma significativa tanto nos cálculos básicos quantos nos mais complexos nos séculos XVI e XVII.

Atualmente, o auxílio da calculadora é incontestável para a sociedade contemporânea, sendo o progresso e uso desse instrumento notável em diversos setores industriais, pessoais ou até mesmo acadêmicos. Portanto, o uso científico e tecnológico da calculadora ultrapassou os limites do conhecimento e da razão humana, tornando-se um instrumento importante para a sociedade moderna e para o ensino da matemática.

Referências

BOYER, C. **História da Matemática.** São Paulo: Editora da USP, 1974.

KNOTT, C. G. **Napier tercentenary memorial volume.** Edinburg: Royal Society of Edinburg, 1915.

HAYES, F. Pascaline, 2013. Disponível: **<**http://www.thocp.net/hardware/pascaline.htm> Acesso em: 25/11/2014.

MAGALHÃES, G. N. **Trabalho monográfico sobre logaritmos.** Rio de Janeiro: Ed. Fundação Biblioteca Nacional, 2003.

ROGER, A. M. **La machine de Pascal:** La pascaline. [S.I]. Disponível: <http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/pascaline.htm> Acesso em: 26/11/2014.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

O que se pode oferecer à educação básica?

Apresentamos a seguir algumas questões e temas referentes aos tópicos abordados neste livro e outros que podem ser úteis aos estudos da disciplina história da Matemática bem como poderão suscitar questões de estudos monográficos a serem desenvolvidos como atividades orientadas para alunos de iniciação científica na licenciatura em matemática. Cabe ao professor reorganizar algumas das questões aqui propostas com vistas a delinear pequenos projetos de estudos durante a disciplina ou durante toda a graduação.

Questões para aprofundamento de estudos

1. Faça uma investigação histórica sobre as principais contribuições matemáticas dos povos da Mesopotâmia e relacione com os conteúdos matemáticos do ensino fundamental e médio. Amplie a pesquisa para a matemática egípcia, chinesa, indiana e árabe.

2. Faça um estudo comparativo entre as contribuições dessas civilizações para o campo da matemática e indique semelhanças e diferenças existentes. Para essa atividade promova seminários entre os alunos de licenciatura em matemática, os professores e os estudantes da educação básica, sem esquecer-se de relacionar tudo aos conteúdos de matemática abordados atualmente na escola.

3. Em que se diferenciam as fontes da civilização grega e as das civilizações da Mesopotâmia, do Egito, da China antiga, da India e dos países árabes? Estimule essas discussões na forma de seminário entre seus alunos, promovendo exposições e debates em sala de aula. Um ponto importante é solicitar relatório escrito com todas as atividades realizadas e observadas pelos participantes dos seminários.

4. Solicite que seus alunos pesquisa e organizem um dossiê sobre as principais contribuições do livro "Os Elementos", de Euclides para o desenvolvimento inicial da axiomática em geometria. Novamente promova seminários sobre esse trabalho e solicite relatório escrito e a apresentação de conexões entre essa geometria e a que se aborda atualmente na escola.

5. Como chegaram os que inventaram as geometrias não euclidianas a estabelecer geometrias distintas da de Euclides?

6. Quais as contribuições de Arquimedes na invenção do cálculo diferencial e integral? Que inovações, em relação aos seus antecessores, Arquimedes introduziu? Porque Arquimedes não utilizou o método das colunas para demonstrar rigorosamente os teoremas?

7. Que inovações, em relação aos seus antecessores, Apolônio introduziu no estudo das secções cônicas? Em que aspectos são comparáveis as secções cônicas de Apolônio aos *Elementos* de Euclides? Justifique sua resposta.

8. Caracterize a álgebra de Diofanto em relação com a geometria algébrica grega de seus antecessores.

9. Quais os clássicos matemáticos da Índia antiga? Descrever o conteúdo e a origem de cada um deles? Como os indianos concebiam o número zero nas operações aritméticas? Quais os principais inconvenientes que podem ser encontrados nos enunciados matemáticos dos indianos? Quais as contribuições mais notáveis da matemática indiana?

10. Descrever as principais características da trigonometria indiana em relação à trigonometria de Ptolomeu.

11. Qual a importante modificação apontada pelos indianos para a geometria algébrica dos gregos?

12. Qual a influência das civilizações anteriores na álgebra árabe? Qual a maior falha (insuficiência, carência) na álgebra de Al-Khowarizmi? Qual a contribuição árabe para a formação do nosso sistema de numeração? Em que consistia o método de Al-Khowarizmi para resolver equações?

13. Quais as contribuições mais notáveis no campo da matemática se devem a civilização islâmica? Exemplifique.

14. Quais as contribuições dos sábios do império bizantino para a história da matemática?

15. Descrever o conteúdo matemático do *Líber Abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci). Quais as suas principais falhas ou insuficiências matemáticas? Enumerar algumas propriedades das "sucessões de Fibonacci".

16. Quais as contribuições de Nicolau de Oresme para a matemática?

17. Em que ramos da matemática mais se destacou Regiomontanus? O que ele acrescentou ao conhecimento já existente?
18. Por que a summa de aritmética de Lucas Pacioli se tornou tão popular nos ambientes intelectuais dos princípios do séc. XVI?

19. Quais foram as contribuições de Rheticus no campo da trigonometria?

20. Quais foram as contribuições mais importantes dos sábios do Renascimento nos campos da álgebra simbólica; da teoria das equações; da trigonometria e da geometria?

21. Por que podemos considerar que Viète era o defensor dos números decimais? Quais as contribuições de Viète para a álgebra de sua época? Que aspectos novos sugere a sua álgebra?

22. Analise a evolução do conceito de função no domínio matemático e no filosófico. Dê exemplos da presença da noção de função nas ciências naturais e nas sociais descrevendo e comentando seus aspectos matemáticos característicos. Discuta a importância do conceito de função na análise matemática atual.

23. As ideias de Euler acerca do conceito de função evoluíram no decorrer de sua vida. Descrever essa evolução mediante exemplos adequados, comentando suas características.

24. Descreva as transformações sofridas pela definição de função desde Leibniz até Dirichlet. Quais as relações com a definição atual?

25. Caracterize a continuidade e descontinuidade de uma função a partir dos conceitos de variável e limite.

26. O que chamamos de uma função contínua, atualmente? A definição de função contínua é ambígua? Investigue o exemplo de Cauchy apresentado 1844.

27. Estabeleça um teorema em séries de potências das quais podem ser consideradas como a versão moderna da continuidade analítica, estabelecida entre os séculos XIV e XVIII.

Sugestão de temas para investigação histórica

Apresentamos a seguir alguns tópicos de história da Matemática para a investigação histórica em sala de aula.

Para o Ensino Fundamental

Podem ser realizadas atividades investigatórias estruturadas envolvendo tópicos históricos como: sistemas de numeração; aritmética egípcia antiga; aritmética hindu; números figurados; números primos; crivo de Eratóstenes; números abundantes; números deficientes; o número Pi; geometria na Babilônia; história dos calendários; quadrados mágicos; matemática e arte; matemáticas e jogos; matemática e literatura; história das medidas; teorema de Pitágoras; ternos Pitagóricos; números quadrados; simetria, entre outros.

Para o Ensino Médio

Podem ser desenvolvidos alguns projetos de investigação sobre a história dos seguintes tópicos matemáticos: números de Fibonacci; problema das quatro cores; fractais; razão áurea; retângulo de ouro; números imaginários; números complexos; números irracionais; a fórmula de Euler; matemática e arquitetura; matemática e arte islâmica; matemática e música; as barras de Napier; o triângulo de Pascal; a trigonometria e os polígonos regulares; sólidos de Platão; simetria em diversas culturas; transformações geométricas; o desenvolvimento das ideias sobre funções, entre outros.

Para o Ensino Superior

Para a licenciatura em Matemática sugerimos alguns temas que possam dar aprofundamentos aos estudos sobre alguns tópicos matemáticos como os seguintes:

- A gênese do conceito de número: como os primeiros humanos chegaram ao processo de contagem e de que maneira conseguiram expressar seus resultados?
- A origem do nosso sistema de numeração: desde os primeiros humanos até a aceitação definitiva desse sistema de numeração, no século XVII.

- A história do sistema sexagesimal: A gênese da numeração suméria e as diversas aplicações deste sistema à metrologia e à astronomia.
- O sistema de numeração dos Maias: origem e diferentes características do sistema dos sacerdotes e do sistema das populações tradicionais.
- O papiro de Rhind: seu conteúdo e suas principais características.
- A fração unitária na matemática e suas aplicações: sua origem e suas aplicações.
- O volume de um tronco de pirâmide: como os egípcios conseguiram encontrar a fórmula exata? Como outros matemáticos ampliaram esses conhecimentos para aperfeiçoar essa descoberta matemática? Quais suas aplicações na arquitetura e na engenharia em diferentes épocas da história e em diferentes locais?
- A tablita babilônica Plimpton 322: sua origem, seu conteúdo matemático e as diversas interpretações sobre sua importância na matemática babilônica.
- A álgebra babilônica vista por meio de problemas: sua natureza e suas principais características.
- A origem dos números irracionais: o descobrimento das medidas incomensuráveis pelos gregos; a solução original proposta por Eudoxo para superar os pontos fracos da teoria pitagórica das proporções.
- A origem dos números complexos e sua formulação: a origem histórica; as primeiras manipulações algébricas com números imaginários; as primeiras representações geométricas e suas aplicações práticas e a definição do corpo dos complexos em termos de pares ordenados de números reais.
- O corte de Dedekind: a criação dos números irracionais e as operações com números reais em termos de cortes.
- Os *quartenions* de Hamilton: origem, definição e operações vetoriais associadas.

- Os números figurados planos: sua origem grega; suas propriedades fundamentais e as relações mais importantes entre estes números.
- As lúnulas de Hipócrates: origem e análise das diferentes lúnulas estudadas por Hipócrates, incluindo as demonstrações.
- Os poliedros regulares: primeiros estudos históricos, definição, descrição e propriedades de cada um deles, bem como sua construção.
- O método da exaustão: sua origem histórica; em que se baseia e diferentes aplicações possíveis no campo da geometria das áreas.
- A duplicação do cubo: origem histórica; diversas tentativas de resolução do problema com régua e compasso; sua resolução por métodos distintos.
- A trissecção do ângulo: origem histórica; diversas tentativas de resolução do problema com régua e compasso; sua resolução por métodos distintos.
- A quadratura do círculo: origem histórica; diversas tentativas de resolução do problema com régua e compasso; sua resolução por métodos distintos.
- O arenário de Arquimedes: objetivos desta obra; conteúdo matemático e principais características.
- A construção de tábuas de cordas de arco no Almagesto de Ptolomeu: como Ptolomeu conseguiu construir suas tabelas; aspectos conceituais e operações matemáticas envolvidas; aplicações imediatas dessa construção em outras áreas.
- A resolução da equação quadrática: das soluções babilônicas ao *Líber abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci).
- O descobrimento do teorema do binômio: primeiros rastros e diferentes generalizações até chegar à formulação de Newton.
- O postulado das paralelas: principais tentativas de deduzir este postulado a partir de outros postulados de Euclides e os estudos que conduziram à invenção das geometrias não euclideanas.

- A evolução do conceito de função das diferentes épocas até o começo do século XIX.
- A invenção dos logaritmos por Napier e Burgi.
- A evolução dos diagramas lógicos.
- A origem histórica da indução matemática.
- O método dos indivisíveis de Cavalieri.

Bibliografia consultada e mencionada

ABBOTT, Edwin. **Planolândia:** um romance em muitas dimensões São Paulo. Editora Conrad, 2002.

BERGER, Peter L.; LUCKMANN, Thomas. **A construção social da realidade**. 34. ed. Tradução Floriano de Souza Fernandes. Petrópolis/RJ: Editora Vozes, 2012.

BLOOR, David. **Conhecimento e imaginário social**. Tradução Marcelo do Amaral Penna-Forte. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BRUTER, Jean-Paul. **Compreender as matemáticas**. As dez lições fundamentais. Lisboa: Instituto Piaget, 2000 (Colecção Ciência e Técnica).

BURKE, peter. **Uma história social do conhecimento**: de Gutenberg a Diderot. Tradução Plínio Dentzien. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2003.

BURKE, peter. **Uma história social do conhecimento II**: da Enciclopédia à Wikipéwdia. Tradução Denise Bottmann. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

CHEVALARD, Yves. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

COLLETTE, Jean-Paul. **História de las matemáticas I**. Tradução Pilar González Gayoso. Madrid: Siglo Xxi de España Editores, S. A., 1985.

COLLETTE, Jean-Paul. **História de las matemáticas II**. Tradução Pilar González Gayoso. Madrid: Siglo Xxi de España Editores, S. A., 1985.

DANTZIG, Tobias. **Número:** a linguagem da ciência. Tradução Sergio Goes de Paula. Rio de Janeiro, Zahar editores, 1970. (Coleção Biblioteca de Cultura Científica).

FLECK, Ludwick. **Genese e desenvolvimento de um fato cientifico**. Tradução: Mariana Camilo de Oliveira. Belo Horizonte: FABREFACTUM, 2010.

FOUCAULT, Michel. **Arqueologia do saber**. 6. ed. Tradução Luiz Felipe Baeta Neves. Rio de Janeiro: Forence Universitária, 2000.

KITCHER, Philip Stuart. **The Nature of Mathematical Knowledge**. Oxford: Oxford University Press, 1984.

KUHN, Thomas. **A estrutura das revoluções científicas**. Tradução Beatriz Viana Boeira e Nelson Boeira. 4. ed. São Paulo: Editora Pespectiva, 1996. (Coleção Debates, 115).

LAKATOS, Imre. **História da Ciência e suas reconstruções racionais**. Tradução Emília Picado Tavares Marinho Mendes. Lisboa: Edições 70, 1998. (Coleção Biblioteca de Filosofia, 26).

LAVE, Jean & WENGER, Etiene. **Situed Learning: Legitimate Peripheral Participation**. Cambridge: University of Cambridge Press.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education** (2010) 42: 381–392. Springer Berlin/Heidelberg, 2010.

PÉREZ DE MOYA, Juan. **Diálogos de aritmetica prática y especulativa (1562)**. Zaragoza: Prensas universitarias, 1987.

REVISTA CALCULO. **Matemática para todos**. A humanidade não marcha. Ano 3. N. 33. São Paulo: editora segmento, Outubro, 2013. (p. 38-41).

PARTE II

UM DIAGRAMA, UM TEXTO

O uso da história no ensino

É bem verdade que nos encontramos num mundo em que gra parte dele é resultante de forças naturais desde tempo muito remoto, entretanto, somente a partir de alguns poucos milhares de anos que aceitamos o fato de que a raça humana passou a ser capaz de modificar em profundidade a realidade ambiental, social, cultural e científica, em outras palavras, "fazer história" e, mais recentemente, procurar entender o sentido de tais ações e refletir sobre a realidade instável na qual estamos imersos.

Nas últimas cinco décadas observa-se um crescente desenvolvimento de pesquisas relacionadas à História das Ciências e, em particular, a História da Matemática, que estão se constituindo um valioso elemento para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, nas diferentes áreas e nos diversos níveis, o que permite compreender as origens das ideias que deram forma à nossa cultura, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem bem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Pesquisas atuais indicam que a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Concordamos com Weinberg (2015) quando afirma que a pesquisa hoje é amparada e alumiada pelo conhecimento de seu passado é pode contribuir para o sucesso no desenvolvimento do trabalho no presente ou infortúnios pelo seu desconhecimento.

Neste sentido, os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada.

De acordo com Lopes & Ferreira (2013), a História da Matemática vem se consolidando como área de conhecimento e investigação em Educação Matemática ao longo dos últimos trinta e cinco anos. As pesquisas desenvolvidas nessa área apontam um maior interesse por parte de professores e alunos e nos mostram que a aprendizagem matemática está intimamente ligada à motivação e interesse dos alunos por essa ciência.

Lopes & Ferreira (2013), apontam que a história da matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, que é possível mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos e que o professor pode construir um olhar crítico sobre o assunto em pauta.

Por outro lado, é muito comum ouvir de alunos e professores que a História da Matemática pouco contribui para a compreensão da própria Matemática, de um modo geral, é um desperdício de tempo e esforço. Em Vianna (1998) encontramos a lista de objeções levantadas por diversos autores contra a utilização da história da matemática como recurso didático, estas sintetizam de certa forma as demais:

> i. O passado da matemática não é significativo para a compreensão da matemática atual;
> ii. Não há literatura disponível para uso dos professores de Primeiro e Segundo Graus;
> iii. Os poucos textos existentes destacam os resultados, mas nada revelam sobre a forma como se chegou a esses resultados;

> iv. O caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico e
> v. O tempo dispendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais matemática.
>
> (VIANNA, 1998, p. 3)

Além disso, quando Miguel (1997) discute as potencialidades pedagógicas da história da matemática apresenta como argumentos questionadores a ausência de literatura adequada e a natureza imprópria da literatura disponível sobre história da matemática, argumentos esses que podem se tornar entraves tanto na utilização da história da matemática de forma didática ou quanto a elaboração de um texto baseado no modelo ora proposto.

Embora esses argumentos tenham sido apresentados acerca de duas décadas e também considerando os esforços empreendidos pela comunidade acadêmica no sentido de apresentar resultados de novas investigações, observa-se que os argumentos acima ainda se mantêm de certa forma como obstáculos às iniciativas pedagógicas do uso da história da matemática em sala de aula.

Para contrapor as objeções acima, Vianna (1998) apresenta a favor do uso didático da história da matemática parte da conferência proferida por André Weil (1906 – 1998) no Congresso de Matemáticos de Helsinki, em 1978, e Dirk Jan Struik (1894 – 2000) que, em resumo, defendem que o estudo da História da Matemática pode contribuir para:

> i. Satisfazer nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram;
> ii. O ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo;
> iii. Entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências, em particular a física e a astronomia; e também com as artes, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais;

> iv. O encontro entre o especialista em Matemática e profissionais de outras áreas científicas;
> v. Oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente e
> vi. Ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática.
>
> (VIANNA, 1998, p. 8)

Para corroborar com o uso da história da matemática em sala de aula, reconhecer a Matemática como uma criação humana e conectar a Matemática as atividades humanas, citamos D'Ambrosio (1999):

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.
>
> (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

Sobre a formação do licenciado, concordamos com Ponte (2000) quando afirma que a formação inicial deve ser pautada por uma sólida formação ética, cultural, pessoal e social, além deste ter:

> [...] de trabalhar segundo metodologias de ensino e de aprendizagem diversificadas, de modo a desenvolver uma variedade de conhecimentos, de capacidades, de atitudes e de valores. Esta exposição a diferentes métodos também funciona como um mecanismo de aprendizagem.
>
> (PONTE, 2000, p. 15)

Para Miguel e Brito (1996) a história pode possibilitar que o futuro professor perceba que a matemática modifica-se através dos tempos devido interferência de outros setores do conhecimento humano, da cultura e da técnica, e também que:

> A história poderia auxiliar os futuros professores a perceber que o movimento de abstração e generalização crescentes por que passam muitos conceitos e teorias em matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático.
>
> (MIGUEL e BRITO, 1996, p.4)

Sobre o uso da história da matemática em sala de aula, Schubring (1997, p. 157) aponta que na introdução de elementos históricos na sala de aula por meio dos textos originais ou de biografias de matemáticos ilustres estamos fazendo uma abordagem direta da história da matemática em sala de aula. Nesse tipo de abordagem a descoberta dos conceitos é apresentada em toda a sua extensão e a legitimação para seu uso é baseada nas possibilidades de aumentar o interesse dos alunos e motivá-los para o estudo da Matemática. Por outro lado, a abordagem indireta envolve a apresentação de uma análise da gênese dos problemas, dos fatos e das demonstrações envolvidos no momento decisivo dessa gênese.

Ainda de acordo com Schubring (1997, p. 58), a abordagem indireta na formação de professores favorece a constituição de um meta-saber capaz de contribuir para uma melhor orientação dos processos pedagógicos. Além disso, pode servir como base para a compreensão do desenvolvimento da matemática não como uma concepção continuísta e cumulativa, mas com fases alternadas de continuidade e rupturas.

Concordamos com Mendes (2013, p. 68) quando afirma que o uso da história da matemática em sala de aula transcende o uso de narrativas que retratam nomes, datas e locais, e que em grande parte se encontram desvinculadas dos conteúdos matemáticos abordados em sala de aula ou das ideias produzidas para explicar determinados contextos, sejam sociais, culturais ou internos a própria Matemática.

Tendo-se em vista a formação didática e conceitual do professor, Mendes (2013) salienta que a história da matemática:

> Serve para dar suporte para a disciplina de formação conceitual e epistemológica na licenciatura em matemática e tem como característica a sua organização sob três enfoques: história dos tópicos matemáticos; história da Matemática e história da Educação Matemática.
>
> (MENDES, 2013, p. 70)

Refletindo sobre os debates que argumentam favoravelmente ou contra o uso da história da matemática no ensino de matemática, sobre qual matemática deve ser ensinada ou constar nos livros textos e também sobre as diferentes concepções sobre como a história pode servir ao ensino, concordamos com Roque (2014) quando afirma que:

> A história da matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos matemática.
>
> (ROQUE, 2014, p. 169)

Diversos historiadores, matemáticos e educadores apontam vantagens na inserção de conteúdos históricos no ensino tendo em vista a melhoria do aprendizado de conceitos e ideias, além de contribuir para a formação geral do indivíduo. Por outro lado, Moura e Silva (2014, p. 337) nos mostram uma contradição por parte dos professores, ou seja, embora estes reconheçam a importância de conteúdos históricos para o ensino de conteúdos científicos, tratam a história como um apêndice ao ensino e não estão dispostos a sair do conforto das abordagens tradicionais do conteúdo específico e enveredar por novos caminhos.

Uma abordagem bastante interessante apresentada por Moura e Silva (2014, pp. 337-338), resultado da tese de doutoramento de Moura em 2012, envolve uma Abordagem Multicontextual da História da Ciência (AMHIC) para o ensino de conteúdos históricos na formação de professores, proposta baseada na contextualização de conteúdos históricos, sob o viés teórico de uma formação crítico-transformadora de professores, aonde os episódios históricos são estudados a partir da contextualização e por meio dos contextos científico, metacientífico e pedagógico.

Segundos os proponentes da AMHIC, os resultados da aplicação de uma abordagem constituída pelos episódios históricos trabalhados a partir de um viés problematizador e os contextos de análise acendeu soluções admissíveis para o problema de *como fazer* e minimizar a lacuna entre o conteúdo histórico ensinado durante a formação do professor e o que ele de fato ensina e mobiliza no cotidiano escolar.

Os Parâmetros Curriculares, no contexto da educação brasileira, apontam que as abordagens devem incluir aspectos sociais, culturais e históricos no ensino, observado as respectivas habilidades e competências desejáveis no desenvolvimento da formação dos estudantes, em particular, no ensino de matemática.

Os argumentos favoráveis apresentados nos estimulam à continuidade das investigações, bem como, o desenvolvimento de novas ações na busca de preencher as lacunas existentes, esclarecer fatos históricos, como dosar a abordagem geométrica, mais utilizada na resolução de problemas no passado, e a algébrica, mais atual, e dá sentido à sua utilização em tempos tecnológicos, principalmente às pessoas que trazem uma visão constituída da Matemática impregnada de crenças e convicções.

Nesses diversos cenários encontramos razões para fazer uso da história da matemática como um recurso didático no ensino de conteúdos matemáticos e, mais, propor um diagrama metodológico para subsidiar a elaboração de um texto que envolve história e conteúdos da matemática para uso em sala de aula e na formação de professores.

Implementando alternativas no ensino

Quando concordei com a designação do Departamento de Matemática para ministrar História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática, decidi que deveria aprofundar os estudos e instruir mais sobre a História da Matemática e pesquisa em História, embora o curso fosse voltado para alunos da graduação que pouco ou quase nenhum embasamento sobre história matemática, ciências ou pesquisa em história. Além disso, como fazê-los enfrentar leituras que nos revelam uma realidade bem diferente daquela com que estão acostumados a lidar nos livros didáticos de matemática.

Entendo que até a metade do curso de licenciatura os alunos ainda não possuem cabedal de conhecimentos matemáticos que possam dar suporte ao entendimento do desenvolvimento de certos conteúdos matemáticos, portanto, neste sentido, concordo que a disciplina História da Matemática deve ser ministrada nos últimos três semestres do curso, pois, caso contrário, pode ter seu desenvolvimento prejudicado pelo não entendimento da evolução dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos. Neste sentido, a disciplina História da Matemática ministrada ao final do curso pode, além de viabilizar a retomada e consolidação dos conteúdos matemáticos, propiciar reflexão sobre a importância do seu uso como recurso didático.

Os questionamentos iniciais surgiram quanto ao desenvolvimento da disciplina História da Matemática depois de uma tentativa de desenvolvê-la por meio de seminários que contemplassem tópicos da matemática, com ênfase aos séculos XVII, XVIII e XIX, e temas que pudessem promover discussões em torno de personagens ou a respeito do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

As apresentações dos seminários, de um modo geral, constituíram-se basicamente nas leituras de textos obtidos em livros ou artigos e, principalmente, informações obtidas na internet. Além disso, ficou bem demarcado que a maioria dos alunos procurou destacar os conteúdos matemáticos, principalmente às demonstrações, nomes e datas. Uma avaliação um pouco mais criteriosa nos aponta que a disciplina não foi desenvolvida de forma satisfatória de modo a fomentar o surgimento de debates em torno das origens, evolução e formalização dos conteúdos matemáticos, mesmo assim, considero os resultados finais satisfatórios para um primeiro curso de História da Matemática baseado em seminários.

No ano seguinte mudei a metodologia e iniciei a disciplina com debates sobre como a História de Matemática pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, seguido da análise de livros didáticos do ensino fundamental e médio quanto ao uso da história da matemática como estratégia facilitadora no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Na sequência, houve um primeiro esboço do uso da história da matemática como recurso didático por parte dos alunos durante a apresentação de aulas envolvendo história e conteúdos matemáticos e, por fim, novos seminários envolvendo personagens pré-selecionados que contribuíram para o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo, na perspectiva da construção de uma visão histórica e crítica da matemática ao longo das várias fases de sua evolução.

A princípio, para balizar a elaboração dos textos dos seminários sobre os personagens pré-selecionados, foi estabelecido que os trabalhos escritos devessem conter: a) Nome completo do personagem/matemático e sua árvore genealógica, quando fosse possível identificar sua genealogia; b) Pseudônimo, quando fosse o caso; c) Traços biográficos e trajetória acadêmica; d) Trabalhos produzidos, com ênfase aos mais relevantes e/ou soluções de problemas relacionados ao cotidiano, internos à própria matemática ou áreas afins; e) Relação dos personagens pré-estabelecidos com outros personagens da sua época; f) Frases célebres vinculadas aos personagens pré-estabelecidos; g) Fotografias vinculadas aos personagens em tela, ou seja, fotografias de cunho pessoal, trabalhos, com outros personagens, livros, etc.; h) Curiosidades sobre os personagens ou que os envolvessem; i) Fatos históricos da humanidade referente ao período de vida dos personagens pré-estabelecidos e j) Bibliografia utilizada na pesquisa.

O texto produzido por D'Ambrosio (2000) subsidiou muitas das discussões a respeito das interfaces entre História e Matemática, principalmente em relação às seguintes questões:

> i. Para quem e para que serve a História da Matemática?
> ii. A matemática é produzida individualmente ou socialmente?
> iii. A partir de que problemas esse tema se desenvolveu?
> iv. Quais eram as forças que o impulsionavam?
> v. Por que foi essa descoberta tão importante?
> vi. O que se pode fazer de História da Matemática em sala de aula?
>
> (D'Ambrosio, 2000)

Naquele ano não foi possível realizar a apresentação dos seminários pelos alunos por questões temporais, mas todos entregaram os textos relativos aos personagens pré-selecionados e seguiram, em boa parte, as recomendações propostas quanto ao que deveria constar nestes. Visando o aproveitamento desses textos foram produzidos vinte quadros, expostos inicialmente na Galeria de Artes Graça Landeira, na Universidade da Amazônia, no período de 01 a 07 de dezembro de 2006. Em função da boa repercussão frente aos alunos e professores que visitaram a exposição, foram confeccionados mais dezesseis quadros e, assim, criada a coleção *Trilhos da Matemática*, exposta no IX Encontro Nacional de Educação Matemática – IX ENEM, realizado em Belo Horizonte (MG), em 2007.

Essa experiência fez com que ressaltasse a possibilidade de se ministrar temas relativos a história da matemática, envolvendo conteúdos matemáticos, a princípio da educação básica, e proporcionar uma visão geral da história da matemática a partir da apresentação de personagens ou conteúdos pré-selecionados.

Após a exposição passei a desenvolver pesquisas relacionadas ao ensino e uso da história da matemática como recurso didático, tendo em vista a possibilidade de ministrar a disciplina História da Matemática a partir da apresentação de personagens pré-selecionados, tomando por base a coleção *Trilhos da Matemática*, e correlacionar conteúdos matemáticos de diversos níveis de ensino à história da matemática.

Os estudos relacionados ao uso da história da matemática como recurso didático foram intensificados a partir da aproximação com a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), em 2007, realização do VIII Seminário Nacional de História da Matemática (VIII SNHM), em Belém do Pará, em 2009, e a coordenação dos Encontros Paraenses de Educação Matemática (EPAEM), em 2010 e 2011, este último sob a temática *Faces da História da Matemática e da Educação Matemática na Amazônia*.

Por fim, quando Lopes & Ferreira (2013) afirmam que há certa resistência quanto ao uso da história e que esta é proveniente de uma falta de experiência dos opositores nesse campo, associada à carência de um referencial para aplicação pedagógica da história em sala de aula, nos dá a sensação de que algo deve ser construído em relação a essa situação, bem como, em relação às práticas pedagógicas.

A constituição do modelo

Vale ressaltar que não é objetivo apresentar e discutir de forma detalhada e aprofundada indagações acerca de determinado tema ou conteúdo matemático ou sobre a história da matemática, mas, subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação de tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista à matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, principalmente na Educação Básica, e formação de professores.

Uma das preocupações durante a construção do diagrama foi de evitar que a história da matemática fosse constituída apenas como ilustração, presa a fatos isolados, nomes célebres, datas ou fatos pitorescos, além disso, evitar também histórias fantasiosas que vinculam o conhecimento matemático a um grupo de pessoas consideradas por uma grande maioria como "iluminadas".

Baseado em Freudenthal, D'Ambrosio (2013) nos alerta para o perigo de se fazer uma história anedotária, entretanto, afirma que "é possível fazer uma história da matemática contextualizada, interessante e atrativa, evitando todas essas distorções".

Antes de tudo, devemos ter em mente que escrever história é gerar um passado, circunscrevê-lo, organizar material heterogêneo dos fatos para construir no presente uma razão. Neste sentido, deve-se observar com muita atenção qual o espaço que será "recomposto", tendo em vista o ocorrido e os perigos do imaginado, que as articulações em torno dos recortes cronológicos podem gerar distorções, além da preocupação com a linguagem no sentido de retratar o passado na modernidade de forma contextualizada e significativa. O difícil é encontrar respostas para a seguinte pergunta: Como proporcionar uma visão histórica e crítica da Matemática ao longo das várias fases de sua evolução?

A partir de 2012, tomando por base as pesquisas efetuadas e a experiência decorrente do desenvolvimento das aulas da disciplina História da Matemática no curso de licenciatura em Matemática, decidi ministrar parte dos conteúdos relacionados a essa disciplina a partir de personagens/matemáticos pré-selecionados, correlacionando traços biográficos, seus contemporâneos, trabalhos produzidos e as principais contribuições à Matemática ou à Ciência.

No XI ENEM de 2013 apresento durante a participação na mesa *Propostas práticas de uso didático da História da Matemática na Educação Básica*, junto com os professores Iran Abreu Mendes (Coordenador) e Ligia Arantes Sad (expositora), a primeira versão do diagrama e proponho o ensino de conteúdos matemáticos e de história da matemática a partir de personagens/matemáticos. Destaco a importância de se efetuar a priori estudo detalhado a respeito do personagem/matemático eleito com objetivo de identificar as interações, tanto do ponto de vista dos conteúdos matemáticos quando as relações com outros personagens/matemáticos, bem como, a construção de um esquema primário para identificar inicialmente quais aspectos serão abordados/aprofundados para evitar uma abordagem superficial dos conteúdos matemáticos ou da história da matemática, além do cuidado em não exagerar na quantidade de correlações para não desvirtuar do foco principal.

O diagrama apresentado no referido evento trazia como personagem principal Leonhard Euler, associado ao problema das Pontes de Königsberg, alguns matemáticos contemporâneos a Euler de forma não muito explícita, como tema/conteúdo matemático "a evolução do conceito de função" e, para complementar tudo isso, os pontos de vista de Guilherme de La Penha (1942 - 1996) e José Maria Filardo Bassalo (1935).

Essa proposta foi experimentada e modificada visando clarificar elementos que tornavam a pesquisa mais abstrusa para os alunos e a inserção de um tema/conteúdo previsto para ser ministrado em sala de aula. Após a incorporação das modificações e novas experimentações com alunos do curso de licenciatura em Matemática, pretende-se elaborar um texto envolvendo tópicos da história da matemática correlacionados a evolução de conteúdos matemáticos a partir da escolha de um conteúdo/tema e eleição de um personagem associado a esse conteúdo/tema, tendo base um diagrama metodológico para orientar a escrita do texto.

Após novas experimentações e recomposições do diagrama, apresento a seguir o modelo base do diagrama metodológico que poderá orientar a elaboração de um texto envolvendo tópicos de história da matemática associada a personagens/matemáticos e tema/conteúdos ministrados em salsa de aula, apresentado inicialmente em 2015 durante o XI Seminário Nacional de História da Matemática (XI SNHM) no livro *História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*.

Diagrama I

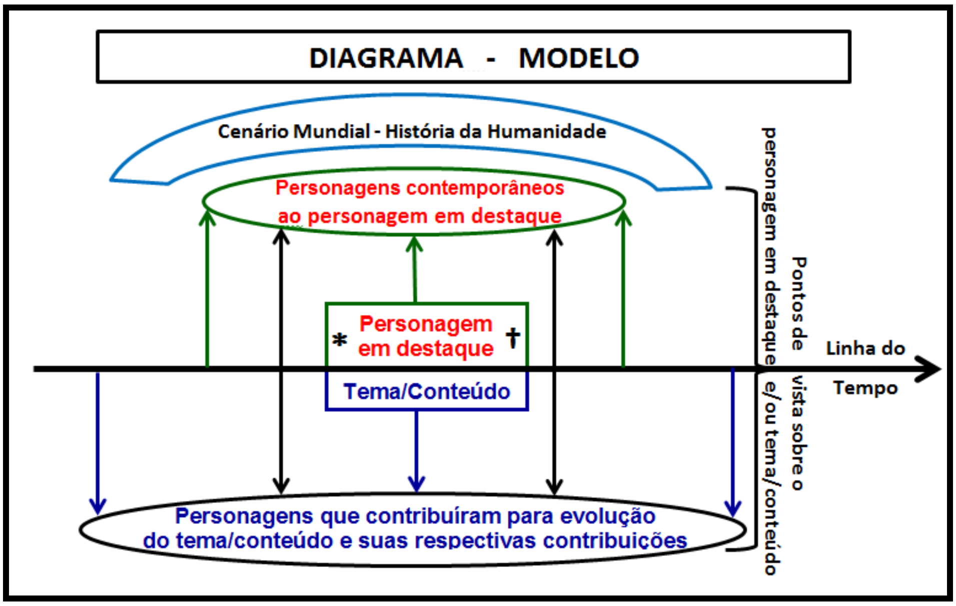


Figura 1: Diagrama-Metodológico I - Modelo
Fonte: Elaborado por Miguel Chaquiam

Torna-se necessário esclarecer as ações de recolha dos elementos a partir da eleição do tema/conteúdo matemático e a de composição do texto para utilização em sala de aula. A primeira parte para a montagem do diagrama é a constituição da evolução do desenvolvimento histórico do tema/conteúdo matemático que se deseja abordar em sala de aula e personagem a destacar, a segunda, pode ser vista como uma peça de teatro composta por vários atos, que se inicia com a localização em tempo e espaço e finaliza com uma visão geral sobre o tema/conteúdo matemático e/ou sobre o personagem em destaque. Por fim, as inserções de outros pontos de vista mais atual visam estabelecer uma relação entre o presente o passado e ressaltar uma visão sobre o tema/assunto matemático eleito ou personagem em destaque.

Ressalto que, de acordo com Bicudo & Garnica (2003), o conhecimento da história da criação e evolução de um conceito são importantes para dar significado ao texto especializado e podem contribuir para a constituição de um discurso didático-pedagógico.

É evidente que o exercício para a constituição do diagrama e a elaboração do texto baseados nesse modelo irá requerer tempo e disposição para efetuar as pesquisas necessárias de modo que, ao final, o diagrama possibilite o entendimento dos elementos abordados, tanto ao que se refere aos conteúdos matemáticos quanto aos relacionados a história da matemática e da humanidade.

De certa forma, o texto elaborado com base no modelo apresentado pode levar o sujeito a reconstruir algumas das operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos. Assim, esse recurso se apresenta como uma opção para superação das desordens cognitivas que possibilitam a passagem de uma etapa da construção do conhecimento para outra de nível superior.

Ao adotar o modelo deve-se ter clareza que o seu nível de conhecimento histórico e matemático, as possibilidades de acesso à bibliografia especializada e sua visão sobre história da matemática podem influenciar ou até mesmo desvirtuar da finalidade didático-pedagógico proposta.

Por fim, um problema que deve ser evitado durante a composição do texto é a sobreposição do discurso técnico ao discurso didático-pedagógico, deve-se ter em vista que o texto não é especializado matematicamente e, sim, um texto no qual deve prevalecer o discurso didático-pedagógico, numa linguagem simples e clara, rico em formas de apresentação, para a comunicação do conhecimento posto, disponível e reproduzido, observado o formalismo e o rigor matemático para esclarecer terminologias, o uso correto das nomenclaturas e impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos.

O modelo apresentado no XI ENEM, em 2013, foi recomposto, adequado a nova proposta, e tornou-se um exemplo de diagrama orientador, base para discussão em sala de aula e consolidação da estrutura apresentada no Diagrama-Metodológico I.

Diagrama II

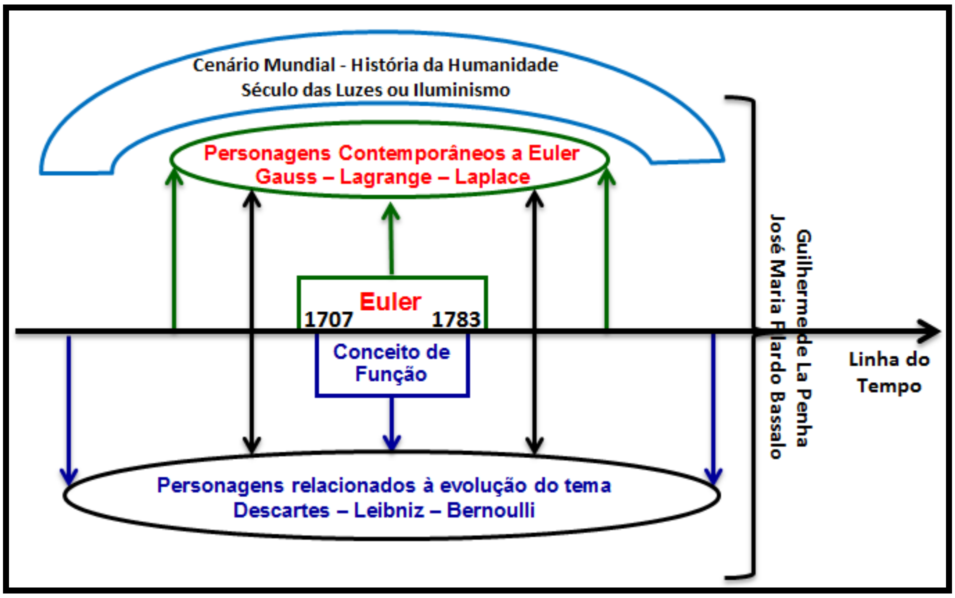


Figura 3: Diagrama-Metodológico II
Fonte: Elaborado por Miguel Chaquiam

O diagrama pode ser modificado de acordo com o enfoque desejado ou devido às dificuldades de se obter informações para constituição dos componentes do diagrama, por exemplo, dificuldades em obter informações que revelem pontos de vista mais atual sobre o personagem em destaque ou tema/conteúdo.

O diagrama a seguir foi elaborado por uma concluinte do curso de licenciatura em Matemática em 2014, a partir do diagrama orientador I, e subsidiou a produção do texto constante no livro *História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*. O texto dessa concluinte, dentre outros, comprovam a funcionalidade do modelo proposto, evidentemente que também devemos associar os méritos de cada aluno.

Diagrama III

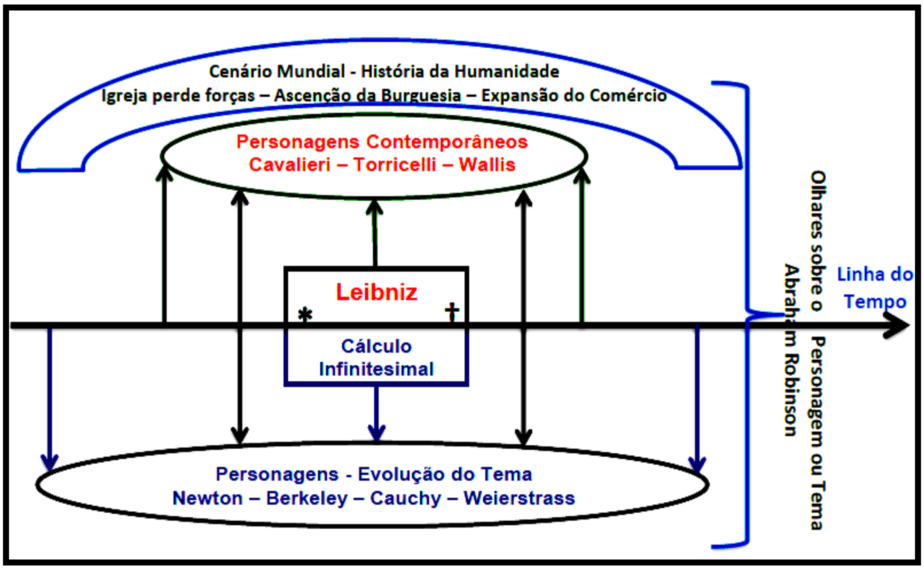


Figura 4: Diagrama-Metodológico III
Fonte: Elaborado por Gabriela Coêlho Rodrigues

Para corroborar com o proposto, foi inserido neste livro o texto produzido pela concluinte Cláudia G. Balbino, em 2015, sob minha orientação e baseado no diagrama-metodológico I.

Em 2016, após apresentação do diagrama-metodológico modelo e diagramas decorrentes deste no II Seminário Cearense de História da Matemática, no curso de mestrado profissional em Ensino de Matemática e no grupo de pesquisa em História da Matemática e Educação Matemática na Amazônia, vinculado a Universidade do Estado do Pará, e reflexões a respeito dos debates ocorridos, apresento preliminarmente a versão atual do diagrama-metodológico, inseridos os elementos que caracterizam no diagrama-metodológico anterior os seguintes contextos: técnico-científico, pluridisciplinar, sociocultural e didático-pedagógico.

Diagrama IV

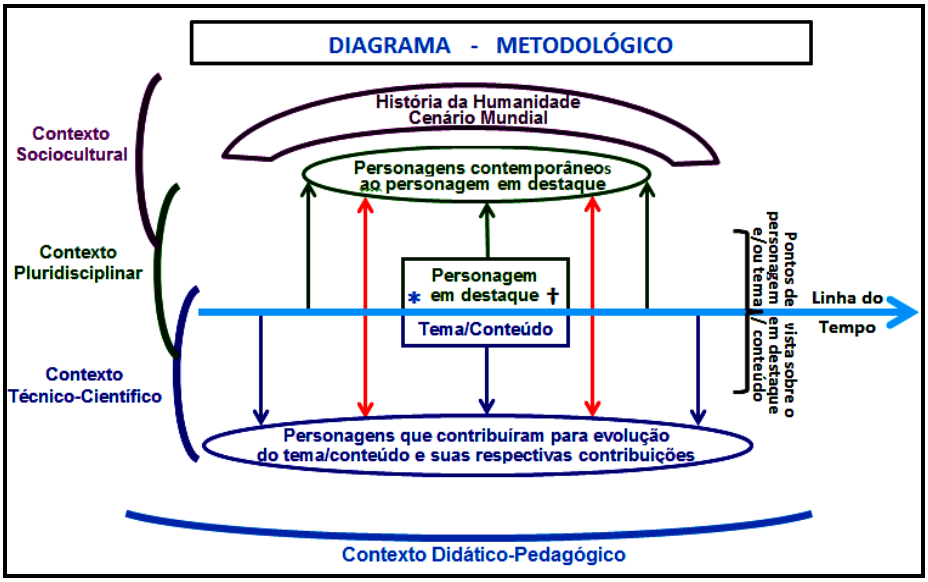


Figura 4: Diagrama-Metodológico IV
Fonte: Elaborado por Miguel Chaquiam

As discussões teórico-práticas que caracterizam cada um dos elementos do diagrama e contextos serão apresentadas no próximo livro.

Ressalto que o proposta não se trata em fazer uma simples cronologia ou tampouco uma onomástica comentada envolvendo conteúdos matemáticos.

Os componentes do diagrama modelo e a elaboração do texto

Para enveredar por esse caminho torna-se necessário que se recolha, numa visão unitária do diagrama, os vários componentes que devem ser agrupados de forma a configurar àquilo que se pretende apresentar, sejam acontecimentos, personagens e/ou conteúdos matemáticos que, de certa forma, devem ser apresentados de acordo com a ordem de sucessão e linha da cronológica, sendo reservado o primeiro plano ao desenvolvimento histórico dos conteúdos e aos personagens que contribuíram para o desenvolvimento deste.

Os esclarecimentos a seguir visam elucidar o que comporta cada um dos componentes que compõem o diagrama-metodológico de modo a facilitar a obtenção dos dados, a composição do diagrama que servirá de base para elaboração do texto didático-pedagógico e o ordenamento destes no texto.

A ordem posta a seguir está em consonância com a ordem de prioridades que deve ser seguida ao longo do desenvolvimento da pesquisa, isto é, inicia-se com a escolha de um tema/conteúdo matemático; segue-se com a composição da evolução do tema/conteúdo e identificação dos personagens que contribuíram para o tema/conteúdo; eleja um dos personagens para dar destaque no texto; identifique os contemporâneos do personagem evidenciado; faça um recorte da história da humanidade para descrever o cenário mundial e, por fim, identifique historiadores/pesquisadores que emitiram pontos de vista sobre o personagem destacado ou tema/conteúdo.

Ressalto que a ordem estabelecida para obtenção dos dados para constituição do diagrama no decorrer da pesquisa não é a ordem sugerida para elaboração do texto didático-pedagógico, embora, esta seja uma decisão pessoal. As sugestões de ordenamento podem ser modificadas por diversos motivos, dentre eles, surgimento de obstáculos ao longo da pesquisa ou obtenção antecipada de elementos previstos a posteriori.

Tema/conteúdo: Eleja um tema/conteúdo matemático previsto para um dos níveis de ensino, preferencialmente Educação Básica, ao qual se pretende apresentar paralelamente ao desenvolvimento e formalização uma abordagem histórica do mesmo, seja com o intuito de introduzi-lo, para incentivar os alunos ou apresenta-lo segundo sua evolução histórica, dentre outros motivos.

Evolução do tema/conteúdo: Em função das experiências realizadas, acredito que seja parte mais complexa do processo, isto é, identificar os elementos necessários para compor a evolução do tema/conteúdo elencado inicialmente. Na grande maioria dos casos não existe uma única bibliografia que contenha o procura na ordem sequencial desejada. De um modo geral, os dados serão garimpados nas diversas bibliografias que abordam história da matemática ou, mais especificamente, história dos conteúdos matemáticos. Neste momento, é importante identificar o(s) problema(s) gerador(es), as forças que o impulsionaram ou os obstáculos que impediram sua evolução.

Ressalto novamente que na constituição deste componente se deve observar o formalismo e o rigor matemático, o uso correto das nomenclaturas e impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos, no entanto, sem perder de vista que se trata de um texto didático-pedagógico num contexto técnico-científico.

Personagens que contribuíram para evolução do tema/conteúdo: É muito provável que durante o processo de constituição da evolução do tema/conteúdo matemático se consiga identificar os personagens/matemáticos que contribuíram para evolução e/ou formalização deste, enfatizando sua contribuição.

Escolha do personagem/matemático que será evidenciado: Dentre os personagens/matemáticos que contribuíram para a evolução e/ou formalização do tema, eleja um para ser evidenciado/destacado em relação aos demais. Durante a realização das experiências observou-se que foram estabelecidos os mais diversos critérios de escolha, neste sentido, decidiu-se inicialmente que os critérios para eleição do personagem ficam ao encargo de cada um.

Eleito o personagem/matemático, construa um perfil deste de modo a contemplar minimamente os seguintes itens: a) Nome completo e pseudônimo, quando for o caso; b) Constituição da árvore genealógica, quando for possível identificar os familiares ascendentes ou descendentes; c) Traços biográficos para além do acadêmico e profissional; d) Trabalhos produzidos, dando ênfase aos mais importantes e/ou soluções de importantes problemas; f) Frases célebres vinculadas ao eleito; g) Fotografias pessoais e de familiares, de livros e trabalhos de sua autoria ou em coautoria, com outras pessoas, dentre outras; h) Curiosidades, fatos pitorescos ou anedotas.

Personagens contemporâneos ao personagem evidenciado: Identifique personagens/matemáticos contemporâneos ao personagem/matemático destacado. Apresente um resumo biográfico destes e suas contribuições para os diversos campos do conhecimento, em especial, para o desenvolvimento das ciências, em particular da Matemática. Estes personagens contemporâneos podem ter contribuído, ou não, na mesma área do personagem eleito. Sugere-se que sejam identificados personagens contemporâneos nas mais diversas áreas do conhecimento para uma melhor localização em tempo e espaço, além de proporcionar uma visão contextual pluridisciplinar.

História da Humanidade / Cenário Mundial: Um dos objetivos deste componente é delimitar em tempo e espaço o personagem principal e seus contemporâneos. Deve-se caracterizar o cenário mundial da época do personagem principal tendo em vista à vinculação da história da matemática a história da humanidade e identificar as forças que o impulsionaram ou geraram obstáculos para o desenvolvimento do tema/ conteúdo eleito inicialmente, de modo a constituir um contexto sociocultural.

Pontos de vista sobre o personagem em destaque ou tema: Considerando que não é nosso objetivo investigar, analisar ou tirar conclusões sobre o personagem principal ou tema, recomendamos que sejam empregados esforços no sentido de identificar historiadores/pesquisadores que fizeram leituras e interpretações sobre o personagem principal ou tema abordado e apresentaram seus pontos de vista. Esse complemento enriquecerá o trabalho, proporcionará questões para debates e proporcionará diferentes visões e/ou interpretações a respeito do personagem principal e/ou do tema, podendo gerar novas pesquisas para maiores esclarecimentos.

Considerando que o texto a ser elaborado a partir do diagrama-metodológico tem dentre seus objetivos vincular à história da humanidade a história da matemática e aos conteúdos matemáticos, destacar os personagens/matemáticos com suas respectivas contribuições para o tema, gerar um contexto didático-pedagógico para uso em sala de aula, propor um único caminho se constituiria em desprezar todas as diversidades e peculiaridades que permeiam a sala de aula, dentre elas, as culturais, sociais, econômicas, tecnológicas e cognitivas.

Embora existam diversas possibilidades de composição do texto e tendo em vista sua função didático-pedagógica, proponho que o mesmo seja desenvolvido na seguinte ordem: a) História da humanidade/cenário mundial; b) Apresentação dos personagens contemporâneos ao principal; c) O personagem principal, exceto suas contribuições para o tema/conteúdo; d) Evolução do tema e os respectivos personagens que contribuíram para evolução do mesmo e, por fim, apresentação dos pontos de vista atual de historiadores/pesquisadores sobre o tema/conteúdo ou personagem principal.

A seta em destaque indica o caminho a ser percorrido na elaboração do texto.

Diagrama V

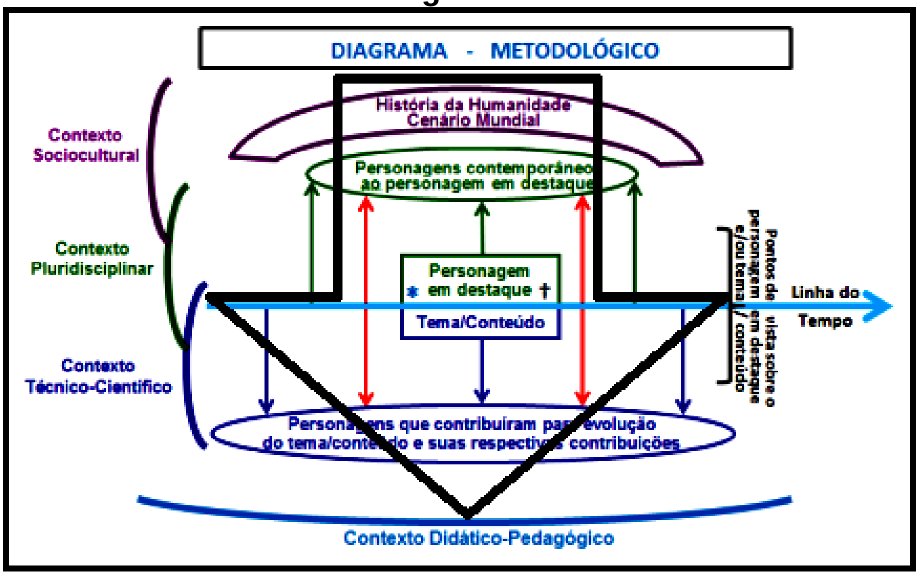


Figura 4: Sequência – Elaboração do Texto
Fonte: Elaborado por Miguel Chaquiam

Essa ordem pode proporcionar uma visão geral que se inicia dentro de um contexto sociocultural, perpassa por um contexto pluridisciplinar e finaliza dentro de um contexto técnico-científico, com localização em tempo e espaço do personagem principal e evolução do conteúdo matemático.

Exemplo baseado no diagrama modelo

O exemplo a seguir foi escrito em 2015 por Cláudia G. Balbino durante o desenvolvimento da disciplina História da Matemática, final do curso de licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Pará, sob minha orientação e coautoria, a partir do diagrama-metodológico ora proposto. Este é um exemplo, dentre outros, que pode auxiliar na corroboração da funcionalidade do diagrama-metodológico proposto.

Números "sofísticos" de Cardano

Introdução

Os escritos a seguir são frutos das aulas da disciplina História da Matemática, baseado na proposta apresentada por Chaquiam (2015), e tem por objetivo apresentar uma abordagem histórica sobre Girolamo Cardano e a evolução dos números complexos, visto que a ideia de raiz de um número negativo gerava opiniões diversas em relação sua aceitação.

Quanto ao início da descoberta de radicais negativos não existem muitas evidências, mas sua repercussão no desenvolvimento da Matemática tornou-se de vital importância, tanto internamente à Matemática quanto às aplicações em outras áreas do conhecimento.

A escolha do tema surgiu a partir da curiosidade a respeito da construção do que conhecemos hoje como números complexos e suas aplicações nas diversas áreas. Durante o ensino médio surgiram questionamentos diários tipo *Para que servem*?, *Quem os inventou*?, *Onde se aplicam*? e *Porque estudá-los*? geravam uma sensação de vazio e insegurança. No ensino superior surgiu a oportunidade de estudá-los com mais detalhes, com um aprofundamento teórico e situações com possibilidades de aplicação.

Com intuito de ampliar o ambiente de estudo em torno dos números complexos, optou-se por destacar, primeiramente, o contexto histórico em que viveu o personagem principal, Girolamo Cardano. Para caracterizar esse contexto histórico são apresentados fatos ocorridos nos séculos XV e XVI, destacando os caminhos que a Europa precisou enveredar para sair de um ambiente regido pela igreja para o desenvolvimento científico e nova percepção de mundo.

Os escritos foram elaborados a partir do diagrama abaixo, diagrama composto a partir do diagrama-metodológico modelo apresentado por Chaquiam (2015).

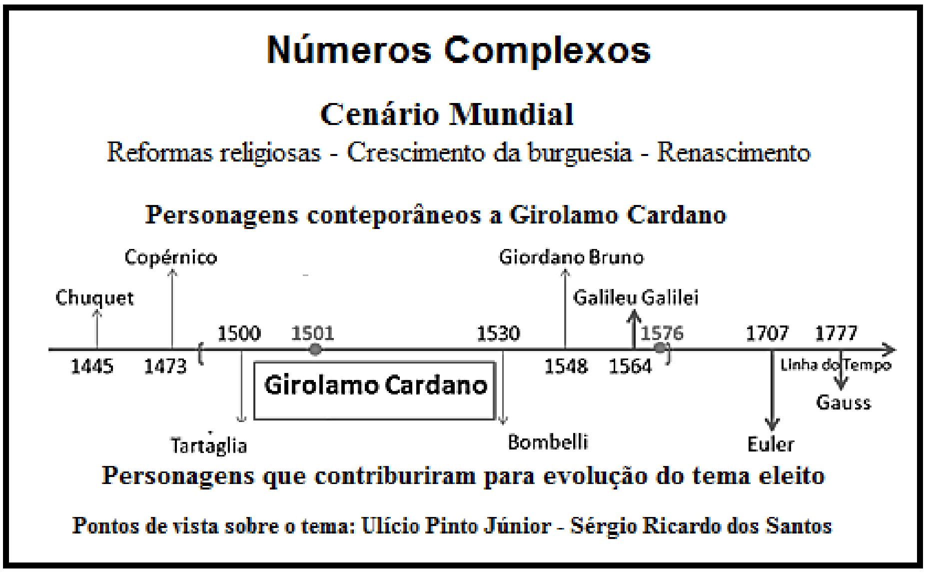


Figura 5: Diagrama – Números Complexos de Chuquet a Gauss
Fonte: Elaborado por Balbino & Chaquiam

Para caracterizar o cenário mundial em que viveu Girolamo Cardano, foram eleitos alguns personagens contemporâneos a ele e ressaltado suas respectivas contribuições científicas. Os contemporâneos escolhidos foram Chuquet, Copérnico, Giordano Bruno e Galileu. A evolução dos números complexos será por meio de Tartaglia, Bombelli, Euler e Gauss, com suas contribuições e respectivos traços biográficos.

Estes escritos nos proporciona uma visão geral sobre Girolamo Cardano, delimitação de tempo e espaço por meio dos fatos históricos de sua época e seus contemporâneos, bem como a evolução dos números complexos até sua formalização, e podem ser utilizado em sala de aula durante o desenvolvimento do referido tema.

O renascimento na Europa

A Idade Moderna, período compreendido entre os séculos XV e XVIII, foi um período de revoluções, modernidades e transformações que alavancaram o desenvolvimento na Europa.

Durante o século XIV e XV a Europa sofreu duas grandes crises, a Guerra dos Cem Anos entre França e Inglaterra e a peste negra, a primeira gerou o declínio do comércio e a segunda dizimou um grande número de pessoas, além de causar escassez de alimentos. Tais situações contribuíram para a formação do cenário da centralização do poder político e declínio do poder feudal.

Nos séculos XV e XVI surgem as Grandes Navegações que abrem um novo caminho para o desenvolvimento comercial, dando origem ao capitalismo, ao surgimento de moedas e crescimento de uma nova classe, a burguesia. Apesar do medo do mar, monstros e abismos, a conquista de novas terras coloca Portugal como pioneira nesse empreendimento, seguido da Espanha.

A Igreja Católica, soberana durante o período feudal, começa a perder espaço para os movimentos religiosos motivados pelos abusos cometidos pelas autoridades eclesiásticas, por exemplo, a venda de indulgências, ou seja, o fiel pagava para ter seus pecados perdoados. A Reforma Protestante promoveu mudanças religiosas e o Renascimento nos trouxe uma nova visão de mundo, com transformações intelectuais, culturais e artísticas.

Neste cenário o capitalismo ganhou espaço, a burguesia passou a fazer parte não apenas do comércio, mas também da política, da religião e da cultura. Assim surge um novo movimento inspirado na cultura greco-romana que tira da igreja o monopólio do conhecimento.

A rejeição aos valores feudais dá origem a movimentos importantes, a exemplo, a valorização do ser humano, humanismo; o homem no centro do universo, antropocentrismo; retomada da natureza, naturalismo; prazer individual, hedonismo; e a busca pela integridade espiritual em Deus, neoplatonismo.

Esse novo pensar europeu desencadeou também o desenvolvimento científico na física, astronomia, matemática e biologia. Destaca-se nesse processo o confronto entre a teoria heliocêntrica (o Sol como centro do universo) e geocêntrica (a Terra como centro do universo). Os nomes que se destacam nessa etapa da história são: Nicolau Copérnico (1473 - 1543), Giordano Bruno (1548 - 1600) e Galileu Galilei (1564 - 1642). Nesse contexto a razão passa a explicar os fenômenos naturais e celestes e não mais a fé.

O poder centrado nas mãos de um rei, conhecido como absolutismo, incentivou a formação de Estados Nacionais e, neste cenário, destaca-se um importante personagem, Nicolau Maquiavel (1469 - 1527), que em sua célebre obra, *O Príncipe*, procurou justificar que o homem não seria capaz de fazer algo útil e precisaria estar sob a Lei. De acordo com Campos (2000, pp. 5-6; 21-22), um governo bem estruturado, que ele denominou de misto, criado em Roma, traria o perfeito equilíbrio para a sociedade.

Todas as transformações acima citadas na Europa culminaram com o desenvolvimento da ideologia denominada *Iluminismo*. Este foi um movimento do século XVII que visava esclarecer questões políticas, sociais, filosóficas, culturais por meio da razão e da ciência e com isso criar uma visão oposta ao absolutismo e aos dogmas da igreja católica.

A matemática no renascimento

No século XVI a matemática italiana teve seu auge histórico, mais precisamente, no período compreendido entre o ano de 1450 e início do século XVII, período marcado pela invenção da imprensa e, a seguir, por avanços na matemática, mecânica e astronomia. Na matemática os conhecimentos baseados em Euclides apresentavam avanços. Dentre esses avanços destacam-se: a simplificação da álgebra com a introdução de frações decimais e logaritmos, criação de um sistema se simbologia mais adequado e a utilização dos sinais **+** (mais), **−** (menos), × (multiplicar), ÷ (dividir), **=** (igual), **√** (raiz quadrada), parêntesis e expoentes e as soluções das equações de terceiro e quarto graus com a aceitação das raízes negativas e imaginárias.

Muitos matemáticos na época faziam uso da álgebra sincopada, isto é, abreviação das palavras que representavam o que temos como símbolos. Esse fato pode ser evidenciado na obra *Tripaty* de Nicolas Chuquet (1445 - 1500, aprox.) e que segundo Boyer (2000):

> A obra é essencialmente retórica, sendo as quatro operações fundamentais indicadas pelas palavras e frases *plus, moins, multiplier par, e partyr par,* as duas primeiras às vezes abreviadas à maneira medieval como $\bar{p}$ e $\bar{m}$. (BOYER, 2010, p.189)

Assim, o surgimento das simbologias muito contribuiu para a simplificação dos cálculos e diminuição dos esforços para realiza-los. Leonhard Euler, personagem aqui abordado, foi um dos que contribuíram para esse feito.

Personagens no cenário renascentista

No modelo proposto por Chaquiam (p.25, 2015) há uma recomendação para se associar aos conteúdos matemáticos os recortes da história da matemática, e mais, envolver personagens, história da matemática e história do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

Para tanto, sugere a escolha de um tema/conteúdo ao qual possa ser associado um personagem, tendo em vista o desenrolar histórico do processo evolutivo e formalização do tema/conteúdo eleito.

Em meio às novas perspectivas de renascimento científico, o conhecimento de mundo e tudo o que nos rodeia passou a ser explicado por meio das ciências. O homem passou a estar no centro de tudo, um ser perfeito e com capacidade de compreender e divulgar novas ideias.

Observado as recomendações e analisando os dados obtidos na pesquisa para constituir um caminho evolutivo dos números complexos, optou-se por destacar Girolamo Cardano e demais personagens constantes na figura 5, acima apresentada.

Iniciamos com Nicolas Chuquet (1445 - 1500), matemático francês do século XV, que nasceu em Paris, mas dedicou-se à medicina em Lyon. Sua obra mais importante está intitulada *Triparty dans la sicence des nombres* (*A Triparte da Ciência dos Números*), escrita em 1484, contempla o cálculo com números racionais e irracionais; a teoria das equações; simbologias avançadas do tipo R2 e R3, com o objetivo de indicar raiz quadrada, cúbica; representação das potências das incógnitas por meio de expoentes, embora omitisse o símbolo da incógnita, por exemplo, 5x3 + 1 era representado por $\boldsymbol{5^3\bar{p}1}$.

Em relação aos números negativos, Chuquet admitia expoentes inteiros, positivos e negativos. Mas o seu trabalho era considerado muito avançado e, muito provavelmente, não gerou influência em seus contemporâneos. Em relação aos números complexos, Chuquet registra na citada obra que algumas equações apresentavam soluções imaginárias e, portanto, preferiu descartá-las dizendo *Tel nombre est ineperible*.

De acordo com Faria (2014, p. 36), Nicolau Copérnico (1473 - 1573) nasceu em Torun, na Polônia. Estudou matemática e astronomia na Universidade de Cracóvia e Direito na Universidade de Bolonha, na Itália. Em sua obra *Commentariolus* (*Pequeno Comentário*), apresentou uma descoberta que revolucionou a física e a astronomia, indo de encontro ao que a igreja impunha, ou seja, o Sol como centro do universo e os planetas orbitando ao seu redor, conhecida atualmente como a Teoria do Heliocentrismo.

Segundo Silva (2012, p. 1-2), Giordano Bruno (1548 - 1600) nasceu em Roma, na Itália. Estudou astronomia, filosofia aristotélica e teologia tomista, tornando-se doutor em Teologia. Foi acusado de herege por duvidar da santíssima trindade e defendeu, dentre outras ideias, a de que o universo é infinito. Seus estudos, que tanto incomodavam a Igreja Católica, foram silenciados pela Inquisição quando o condenaram à fogueira.

Conforme Faria (2014, p. 42), Galileu Galilei (1564 - 1642) nasceu em Piza, na Itália. Fazendo ajustes no seu telescópio, comprovou por meio de observações celestes que as teorias de Copérnico estavam certas. Em sua obra *Mensageiro Sideral*, por volta de 1610, fez descrições detalhadas de astros como a Lua e Júpiter, sobre a Via Láctea e o comportamento do Sol. Contudo, o Tribunal da Inquisição pretendia condená-lo a morte caso não abandonasse tais ideias. Embora tenha abandonado tais ideias, deixou grandes contribuições à Física Moderna.

Traços biográficos de Girolamo Cardano

Girolamo Cardano[10]nasceu em 24 de setembro de 1501, em Pavia, na Itália, filho de Fazio Cardano, geômetra, e Chiara Micheri, fruto de uma relação não oficial. Teve uma infância conturbada por conta de doenças e maus tratos e uma vida adulta cheia de alegrias e tristezas.

Desde pequeno, Cardano demonstrou interesse pela Matemática. Estudou nas universidades de Pavia e Pádua. Usava seus conhecimentos matemáticos para ganhar nos jogos de azar e, mesmo assim, nem sempre alcançava seus objetivos.

Sua aptidão pelos estudos foi muito intensa e deixou importantes trabalhos em matemática, como é o caso do estudo em teorias das probabilidades que surgiu do seu vício em jogos de azar. Tal vício lhe

[10] Há variações do nome, caso *Hieronymus Cardanus* na América latina.

rendeu a obra intitulada *Liber de ludo aleae* (*O livro dos jogos de azar*). (TOMAZ, 2011; OLIVEIRA, 2013; SANTOS , 2013).

Conforme Santos (2013, pp. 10-15), por duas vezes o título de doutor em medicina a Cardano, entretanto, numa nova tentativa conseguiu obtê-lo em 1525. Tentou exercer a profissão em Milão, porém, foi rejeitado por ser um filho bastardo, visto que seus pais não tinham uma relação oficial. Foi, então, trabalhar em Piove de Sacco, um vilarejo próximo, casou-se com Lucia Bandarini e teve três filhos. Mesmo na clandestinidade e depois de muitos altos e baixos, conseguiu o reconhecimento da tão sonhada vaga de membro do Colégio de Médicos de Milão.

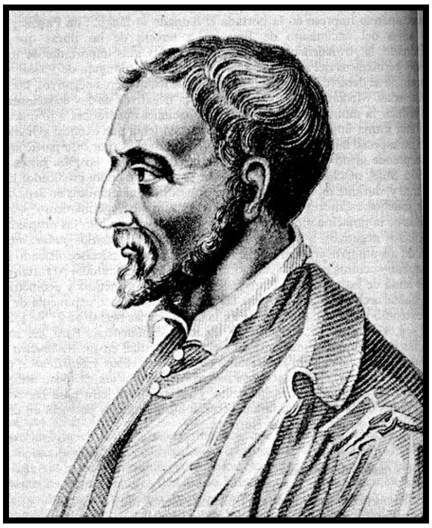


Figura 6: Girolano Cardano
Fonte: www.zena-in.cz

Cardano também fez parte da Fundação Piatti e seu talento com os números foi rapidamente reconhecido ao escrever várias obras nessa área, dentre elas, *Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis* (*A prática da aritmética e mensuração simples*), escrito na época da competição entre Tartaglia e Fior, em Milão. Sabe-se também que

Leonardo da Vinci (1452 - 1519) foi seu orientador em assuntos ligados à geometria.

Santos (2013, p.10-15) destaca que Cardano possuía uma ligação com a filosofia ocultista, embora fosse o astrólogo oficial do Vaticano, escreveu algumas heresias como não concordar com a imortalidade da alma e que o cristianismo não era maior do que outras religiões monoteístas. Encarcerado por algum tempo pela Igreja, foi colocado em liberdade desde que não viesse mais a lecionar, não escrever obras e manter sigilo sobre a detenção. Posteriormente, o Papa Gregório III o perdoou e concedeu um lugar para viver até sua morte, data por ele prevista e, para não correr o risco de errar, suicidou-se em 21 de setembro de 1576, em Roma.

Apesar das intempéries de sua vida, como a morte da esposa, filhos rebeldes e problemáticos, vícios, sucessos e declínios na vida profissional, tendências suicidas, entre outros, seu legado como matemático, médico, filósofo e educador contribuíram para continuidade dos estudos por outros personagens da história, em particular, sobre os números complexos.

Em 1545, de acordo com Boyer (2010, p. 193-195), Cardano publicou sua obra mais importante intitulada *Ars Magna*[11] onde se encontram as soluções para as equações cúbicas e quárticas, considerado um grande avanço na matemática. Embora Cardano as tenha publicado, ele afirmou que a descoberta das soluções das cúbicas se deviam a Tartaglia (1499 - 1557), e das quárticas, a Ludovico Ferrari (1522 - 1565).

Lima (1987), afirma que Scipione Del Ferro (cerca de 1465 - 1526), professor de matemática em Bolonha, na Itália, foi quem descobriu a solução para o problema de 3 mil anos, porém não a publicou. Confidenciou a dois de seus discípulos, Annibale Della Nave (1500 – 1558, futuro genro) e Antonio Maria Fior (séc. XV - séc. XVI, amigo), que recebeu a regra sem demonstração.

[11] Título original *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (*Da Grande Arte* ou *As Regras da Álgebra*).

Nesse interim, Tartaglia se empenhou na busca da solução algébrica e, quando a notícia se espalhou, por volta de 1535, foi organizada uma competição entre Fior e Tartaglia. Competição profícua de acordo com Boyer (2010), visto que cada competidor propôs ao outro trinta questões, contudo, Tartaglia sabia lidar tanto com cubos e quadrados quanto com cubos e raízes igualados a um número, e Fior, apenas esta última.

Quando Cardano soube desse triunfo, tratou de arquitetar seus planos e agiu de má-fé com Tartaglia quando prometeu guardar segredo para, em 1539, conseguir obter as informações e publicá-la em sua obra. Atitude semelhante a essa, publicação de obra de terceiro, ocorreu também em 1543 quando publicou uma obra de Arquimedes.

Quanto aos números imaginários, Boyer (2010, p.196) afirma que Cardano, ao calcular a equação cúbica $\boldsymbol{x^3 = 15x + 4}$, concluiu que $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}}$ e sabia que x era igual a 4, mas ao mesmo tempo afirmava a não existência da raiz quadrada de número negativo.

Outra situação que o levou a interpretações equivalentes a primeira foi ao tentar dividir 10 em duas partes de tal forma que o produto resultasse em 40, fato que resultou em $\boldsymbol{5 + \sqrt{-15}}$ e $\boldsymbol{5 - \sqrt{-15}}$. De acordo com Boyer (2010, p. 196), Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como *sofísticas* e concluía que o resultado nesse caso era "tão sutil quanto inútil".

Segundo Roque (2012), a equação $x^3 = 15x + 4$ é considerada irredutível, pois redução de equações era um método muito usado para simplificação dos cálculos. É possível reduzir uma equação cúbica em uma quadrática, mas no caso citado isso não é possível por conta das raízes imaginárias. Naquela época, quando apareciam resultados com radicais de números a saída mais prática era dizer que não havia solução, uma vez que tais números não eram considerados.

Em Roque (2012) e Boyer (2010) constam que as soluções racionais eram mais fáceis de serem aceitas em relação às irracionais, consideradas inicialmente como "mudas" ou "números surdos" ou "sem razão", pois, não podiam ser escritas na forma decimal. Na época de Cardano tais soluções eram aceitas, entretanto, o problema persistia quando a solução era um número negativo, superado com a representação numérica na reta e tornaram-se aceitáveis. Cardano chamou-as de "*numeri ficti*", assim, para equações do tipo $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$, bastava dizer que não podiam ser resolvidas, caso semelhante acontecia com os imaginários.

Antes de apresentar a resolução que gerou polêmica, ressalta-se que Tartaglia não resolveu a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, mas sim, dentre outros, dois tipos especiais: $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$.

Em Lima (1987, pp. 16-17), encontramos a demonstração para o citado caso, visto que não é tão simples a ideia é fazer x = y + m de modo a anular o termo do 2º grau.

Seja a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (I), equivalente a:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \qquad (II)$$

Cardano mostrou que a substituição x = y – a/3 permitia eliminar o termo em x^2, então, a equação (I) se transforma em:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

ou seja,

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \qquad (III)$$

Observa-se que a equação III não apresenta o termo do segundo grau e enquadram-se no grupo de terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (IV)$$

Para a obtenção da solução e necessário admitir x = u + v e substituir em (IV), para então obter na sequência as equações:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Portanto, ao encontrar os números u, v obtém-se:

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad uv = -\frac{p}{3}$$

ou seja,

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

Assim, x = u + v será a raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Desse modo, encontramos u^3 e v^3 como raízes da equação do segundo grau:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (V)$$

Faz-se uso da fórmula Cardano-Tartaglia para resolver a equação (V), e obter:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

consequentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (VI)$$

Desta forma, x = u + v é raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

A título de exemplo e verificação da descoberta de Tartaglia, será aplicado os procedimentos acima na equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Então, para p = – 6 e q = – 9 obtêm-se:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1 = 3$$

A aplicação da fórmula apresentada por Cardano na resolução da equação $x^3 = 15x + 4$ também foi analisada posteriormente por Rafael Bombelli.

Considerando a estrutura da equação original $x^3 + px + q = 0$ e comparando-a com a equação $x^3 = 15x + 4$ ou $x^3 + (-15)x + (-4) = 0$, conclui-se p = –15 e q = – 4. Substituindo esses dados em (VI), obtém-se:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-3375)}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-3375)}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Percebe-se que o radicando da raiz de grau 2 é menor que zero, fato que gera um número "*sofístico*".

Após essa primeira discussão em torno dos números complexos, segue-se com a apresentação dos personagens que contribuíram para a evolução dos números complexos, dentre eles, Tartaglia, Bombelli, Euler e Gauss.

Niccolò Fontana (1499 - 1557), popularmente conhecido como Tartaglia, contribuiu com os estudos das soluções de equações cúbicas e como trabalhar com soluções contendo raízes de números negativos.

Niccolò Fontana nasceu em 1499, na cidade de Bréscia, na Itália, e faleceu em 1557, na cidade de Veneza. Era apelidado de Tartaglia devido as dificuldades para falar em decorrência de um golpe de sabre na boca desferido por um soldado que atacou sua família, deixando-o gago. De acordo com Cerri & Monteiro (2001), sua marca mais importante foi a disputa com Cardano no que tange as soluções das equações cúbicas.

As contribuições de Bombelli, em linguagem matemática atual, estão relacionadas aos imaginários conjugados. Ele propôs que os números $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser números na forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, respectivamente, ou seja, os radicais poderiam ser relacionados do mesmo modo como os radicandos. De acordo com proposto obtém-se x= $2+1\sqrt{-1}$ e x = $2 - 1\sqrt{-1}$, ou seja, x = 4.

Rafael Bombelli (1526 - 1572) nasceu em Bolonha, na Itália, e foi matemático e engenheiro. Sua maior contribuição encontra-se registrada na sua obra *L'Algebra* escrita por volta de 1560 e impressa, em parte, em 1572. Nessa obra estão os estudos de Bombelli a respeito dos números imaginários.

Leonhard Euler (1707 - 1783) nasceu em Basiléia, na Suíça, e faleceu na Rússia. Foi matemático, físico, engenheiro e educador. De acordo com D'Ambrósio (2009), foram catalogadas 866 obras voltadas para várias áreas como matemática e física.

Euler contribuiu com a notação do símbolo i para $\sqrt{-1}$, o qual foi usado primeiro por ele, adotado em 1777 e publicado em 1794. Também aproveitou as relações de Cotes e de De Moivre entre números imaginários e trigonometria para o desenvolvimento da Análise.

Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777, em Braunschweig, na Alemanha, e faleceu em 1855. Conforme Jesus (2013), Gauss teve uma infância pobre, mas soube aproveitar as oportunidades para estudar e se aperfeiçoar em matemática. A dedicação à aritmética superior lhe consagrou como "Príncipe da Matemática". Em 1798, escreveu o que muitos consideram sua obra prima, *Indagações Aritméticas*.

Gauss trabalhou números complexos usando gráfico de curvas. Segundo Bentley (2009), Gauss introduziu a notação a + bi, a expressão "números complexos" e concluiu através do teorema Fundamental da Álgebra que o campo dos números complexos é algebricamente fechado.

Quanto a nomenclatura, observa-se que, inicialmente Cardano utilizou a expressão "números sofísticos", posteriormente René Descartes (1596 - 1650) os denominou de "números imaginários" e, finalmente, Gauss nos apresenta a denominação atual, "números complexos".

Pontos de vista sobre a evolução dos números complexos

Finalizamos apresentando comentários sobre o tema, baseados nas dissertações de mestrado *A História dos Números Complexos*: "*das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand*", de Ulício Pinto Júnior, datada de 2009, e *As equações polinomiais de 3º e 4º graus*: *sua história e suas soluções*, de Sergio Ricardo dos Santos, datada de 2013.

Ulício Pinto Junior apresenta o desenvolvimento dos números complexos na resolução das equações cúbicas a partir de Cardano, passando por Wallis, Buée, Wessel e Argand e nos mostra como as contribuições desses matemáticos formaram o que conhecemos hoje. O trabalho está dividido em três capítulos que comentamos a seguir.

No trabalho de Pinto Junior (2009) constam as construções das soluções das equações cúbicas e o aparecimento da raiz de um número negativo nos cálculos de Diofanto de Alexandria (séc. III), bem como Cardano tomou conhecimento das soluções descobertas por Tartaglia e as novas descobertas de Bombelli.

Pinto Junior (2009) apresenta comentários sobre Harriot, Descartes, Leibniz e De Moivre, dentre outros, discute como as raízes de números negativos eram tratadas, embora houvesse rejeição por parte de muitos matemáticos, inclusive no caso dos números complexos, mesmo com o surgimento de novas teorias para sustentação.

Pinto Junior (2009) faz um apanhado histórico sobre a importância de se representar geometricamente as entidades algébricas e nos mostra que foi John Wallis (1616 - 1703) o primeiro a construir um ambiente gráfico para os imaginários. Nos apresenta também uma descrição sobre o trabalho de Jean-Robert Argand (1768 - 1822) a respeito do que se conhece hoje como "plano de Argand-Gauss" nos livros didáticos.

Em Santos (2013) encontram-se equações de 3º e 4º graus, suas respectivas soluções, e uma alternativa de soluções por meio de técnicas algébricas elementares. Inicialmente apresenta recorte histórico sobre a solução das equações algébricas nas diferentes civilizações e resumo sobre as primeiras tentativas de solução até chegar a Cardano.

Sobre o exemplo apresentado

Observa-se que a partir do diagrama, figura 5, elaborado com base no modelo apresentado por Chaquiam (2015), é possível elaborar escritos, seguindo a cronologia do desenvolvimento dos números complexos, que associam conteúdos matemáticos, história da história. Observa-se que foram necessários séculos de estudos e descobertas, matemáticos que apoiavam e outros que os matemática e personagens, dentro de um cenário universal.

Este exemplo também corrobora no sentido de elucidar aspectos importantes e não tão evidenciados no desenvolvimento dos números complexos, em particular, os estudos iniciais de Cardano e Tartaglia a respeito das equações cúbicas.

Observa-se que é possível elaborar escritos a partir de recortes históricos com base no proposto por Chaquiam (2015), embora ciente de que não foram apenas os personagens apresentados que contribuíram para a evolução e formalização dos números complexos.

Ressalta-se que esse exemplo foi elaborado com o objetivo de ser utilizado em sala de aula durante o desenvolvendo dos conteúdos relativos aos números complexos, tendo-se em vista a integração da história da matemática aos conteúdos matemáticos, com a demarcação de tempo e espaço a partir do cenário mundial e personagens elencados.

Ficou evidente que é possível a partir do modelo proposto por Chaquiam (2015) associar fatos relacionados a história da matemática e da história da evolução dos conteúdos matemáticos durante o desenvolvimento de conteúdos matemáticos em sala de aula.

Bibliografia utilizada ou consultada na elaboração do exemplo

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BENTLEY, Peter. **O Livro dos Números:** Uma História Ilustrada da Matemática. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009. ISBN 978-85-378-0134-5.

CAMPOS, W. J. **O Absolutismo e a formação dos Estados Nacionais**. História, imagens e narrativas, n.8, p.5-6 e 21-22. Abr. 2002. ISSN 1808-9895.

CERRI, C. MONTEIRO, M. S. **História dos Números Complexos**. Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem /complexos.pdf> Acessado em: março, 2015.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Série História da Matemática para o Ensino, v. 10. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 82 p. ISBN: 978-85-7861-309-9.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Euler, Um Matemático Multifacetado**. Revista Brasileira de História da matemática. V. 9, n. 17, 2009. p. 13-31. ISSN 1519-955X.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
FARIA, Jhaison Costa de. **A Evolução Histórica do conceito de Gravitação**. 2014. 76 f. Tese de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Rondônia. Rondônia: UNIR, 2014. Disponível em: <http://www.fisicajp.net/tccs/2013/tccjhaison.pdf > Acessado em: 10 de junho de 2015.

JESUS, Márcio S. dos S. **Os Inteiros de Gauss**. Campinas: Unicamp, 2013. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/M_M2_FM_ 2013 .pdf > Acessado em: 17 de junho de 2015.

LIMA, E. L. **A Equação do Terceiro Grau**. 1987. Revista Matemática Universitária, n. 5, p. 9-23, 1987. Disponível em: <http://rmu.sbm.org.br/Conteudo /n05/n05_Artigo01.pdf> Acessado em: maio, 2015.

MUÑOZ, José Manuel Sánchez. **Historias de Matemáticas**: Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones. Revista Pensamiento Matemático. N. 1, 2009. p. 7-8. ISSN 2174-0410

OLIVEIRA, N. J. de. **Noções de Probabilidade e Aplicações ao Caso Discreto**. 2013, 121 f. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Minas Gerais: UFTM, 2013.

PICKOVER, Clifford A. **O Livro da Matemática**. Tradução de Carlos Carvalho. Holanda: Librero, 2011. ISBN: 978-90-8998-165-3.

SANTANA, Tânia de. **Licenciatura em História**. História Moderna. Faculdade de Tecnologia e Ciências – Ensino a Distância. In: www.ftc.br/ead.

SANTOS, Sérgio Ricardo dos. **As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus**: Suas Histórias e Soluções. 2013, 88f. Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão: UFS, 2013. p. 10-15.

SILVA, Pedro Henrique Ciucci da. **Introdução sobre o infinito**: Giordano Bruno. Revista Pandora Brasil. N. 46, p. 1-2. set. 2012. ISSN 2175-3318.

PINTO JÚNIOR, Ulício. **A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:** "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand". 2009. 94 f. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.

TOMAZ, P. S. S. **Gerolamo Cardano:** Pai da Teoria da Probabilidade ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar: In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9, 2011, Recife. Anais do IX Seminário Nacional de História da matemática, Recife. UFS, 2011, 8p.

VICENTINO, C. DORIGO, G. **História para o ensino médio:** história geral e do Brasil. São Paulo: Scipione, 2001.

Reflexões sobre o diagrama-modelo

Concordamos com D'Ambrosio (2013) quando afirma que "a intensão de um curso para Licenciatura não é fazer uma cronologia e nem uma onosmástica comentada, mas com base na historiografia moderna, indicar e sugerir direções e sinalizar indagações e questionamentos sobre o que se lê em diversos textos e estudos que estão disponíveis em livros e artigos".

Ressalta-se a importância de se situar a matemática na História Universal, apresentando o cenário mundial da época em que viveu o personagem principal, tendo em vista a vinculação da História da Matemática com a História da Humanidade e identificar as forças que pode ter impulsionado ou gerado obstáculos para o seu desenvolvimento.

Considerando a apresentação dos seminários e a qualidade dos textos produzidos pelos alunos a partir do diagrama-modelo, ficou evidente que o diagrama, além de suprimir as dificuldades iniciais relativas à produção de textos voltados à História da Matemática em sala de aula, contribuiu para localizar o aluno no tempo e espaço, em um primeiro plano, a partir de um personagem principal e tema/conteúdo elencado e, num segundo plano, com a presença dos contemporâneos e fatos da história universal.

Tendo em vista os resultados obtidos com as experiências aqui descritas, acredito que é possível interrelacionar conteúdos matemáticos e tópicos da História da Matemática, seja na Educação Básica ou Superior, tendo como balizador o diagrama-metodológico para orientar a escrita de um texto par uso nas aulas de matemática.

Embora a experiência apresentada tenha gerado resultados profícuos, entendo que está é mais uma das formas de abordar a História da Matemática ou utilizá-la como recurso pedagógico no processo de ensino da Matemática, principalmente nos cursos de formação de professores de Matemática.

Dentre outros resultados, ficou evidente que conhecendo a História da Matemática é possível perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados pelos matemáticos e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta.

Embora a proposta apresentada se encontre em fase final de maturação, fundamentação conceitual e epistemológica e foco principal na matemática, vislumbra-se que está proposta pode gerar um exercício de pesquisa investigatório; pode ser um meio de formação conceitual e epistemológica; pode contribuir para explicação e compreensão de fatos praticados pela humanidade; pode constituir práticas viáveis na atualidade; pode contribuir para a ressignificação de informações adaptadas pedagogicamente de acordo com o modelo social e educativo; pode contribuir para a compreensão das linguagens simbólica e materna associadas à matemática; desvendar problemas sociais e históricos que originaram, contribuíram ou foram obstáculos para o surgimento ou desenvolvimento do conhecimento matemático.

Observa-se que alunos e professores das diferentes áreas de conhecimento e dos diversos níveis de ensino passaram a ter mais consciência da importância da História da disciplina que ministram e que essa consciência tem assumido múltiplas formas e dado origem a diversas iniciativas.

As discussões em torno do modelo e os experimentos que estão em andamento nos assinalam inicialmente que o diagrama-metodológico proposto, com as devidas adaptações, pode ser extensivo para outras áreas, com destaque para física, química e biologia.

Bibliografia consultada e mencionada

BASSALO, José Maria Filardo. **La Penha:** Gerador e Gerenciador da Ciência. Revista Ciência e Sociedade do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio De Janeiro: CBPF, 1997.

BICUDO, M. A. V., GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003

BODEI, Remo. **A História tem um sentido?** Tradução Reginaldo Di Piero. Bauru (SP): EDUSC, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A Interface entre História e Matemática: Uma Visão Histórico-Pedagógica**. Revista de Matemática, Ensino e Cultura. Natal (RN): EDUFRN, 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Por que e Como Ensinar História da Matemática**. In: FOSSA, J. A. (Org) Facetas do Diamante. Rio Claro – SP: Ed. SBHMat, 2000, p. 241-271.

DYNNIKOV, Circe e SAD, Lígia Arantes. **Uma abordagem pedagógica do uso de fontes originais em História da Matemática**. Guarapuava (PR): SBHMat, 2007.

GASPAR, Maria Terezinha Jesus e MAURO, Suzeli. **Contando histórias da matemática e ensinando matemática**. Coleção História da Matemática para Professores. Guarapuava (PR): SBHMat, 2007.

LOPES, Lidiane Schimitz e FERREIRA, André Luis Andrejew. **Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. Revista Abakós. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da Matemática:** reflexões teóricas e experiências. Belém (PA): EDUEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu; BRITO, Arlete de Jesus; MIGUEL, Antônio; CARVALHO, Dione Lucchesi de. **História da Matemática em atividades didáticas**. Natal (RN): EDUFRN, 2005.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino:** Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MIGUEL, A. BRITO, A. J. **A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática**. Cadernos CEDES - História e Educação Matemática. Campinas (SP): Papirus, n. 40, 1996. p. 47-61.

MIGUEL, A**. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão**: argumentos reforçadores e questionadores. Revista Zetetiké. Campinas (SP): UNICAMP – FE – CEMPEM, 1997. pp. 73-105.

MIGUEL, A. & MORIN, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte (MG): Autêntica, 2004.

MOTTA, C. D. V. B. **História da Matemática na Educação Matemática:** espelho ou pintura? Santos (SP): Comunicar Editora, 2006.

MOURA, Breno Arsioli; SILVA, Cibelle Celestino. **Abordagem multicontextual da história da ciência:** uma proposta para o ensino de conteúdos históricos na formação de professores. Revista Brasileira de História da Ciência. V. 7, N. 2. Rio de Janeiro: SBHC, 2014. pp. 167-185

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; FRAGOSO, Wagner da Cunha. **História da Matemática:** história de uma disciplina. Revista Diálogo e Educação. Curitiba (PR): EDUFPR, 2011.

PACHECO, Edilson, PACHECO, Enilda das Graças. **Uma abordagem pedagógica para a introdução da Histórica da Matemática**. Coleção História da Matemática para Professores. Belém: SBHMat, 2009.

PONTE, João Pedro da; JANUÁRIO, Carlos; FERREIRA, Isabel Calado; CRUZ, Isabel. **Por uma formação inicial de professores de qualidade**. Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para a formação de professores. Portugal, 2000. In: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte. Acessado em 10 de outubro de 2012.

ROQUE, Tatiana. **Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?** Revista Brasileira de História da Ciência. V. 7, N. 2. Rio de Janeiro: SBHC, 2014. pp. 167-185.

STAMATO, Jucélia Maria de Almeida. **A Disciplina História da Matemática e a Formação do Professor de Matemática**: Dados e Circunstâncias de sua Implantação na Universidade Estadual Paulista, campi de Rio Claro, São José do Rio Preto e Presidente Prudente. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, 196 p. UNESP, Rio Claro, 2003.

VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Ubiratan D´Ambrosio:** conversas, memórias, vida acadêmica, orientandos, educação matemática, etnomatemática, história da matemática, inventário sumário do arquivo pessoal. São Paulo: Annablume, 2007.

VIANNA, Carlos Roberto. **Usos didáticos para História da Matemática**. Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática. (Org) Fernando Raul Neto. Recife (PE): SBHMat, 1998. pp. 65 – 79.

VIANNA, Carlos Roberto. **História da Matemática, Educação Matemática:** entre o Nada e o Tudo. Revista Bolema. Rio Claro (SP): EDUNESP, 2010.

WEINBERG, S. **Para explicar o mundo**: A descoberta da ciência moderna. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.

Dados sobre os autores

IRAN ABREU MENDES
Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1983), graduação em Licenciatura em Ciências pela Universidade Federal do Pará (1983), Especialização em Ensino de Ciência e Matemática pela Universidade Federal do Pará (1995), Mestrado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (1997), Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2001) e Pós-doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro (2008). Atualmente é professor Titular do Departamento de Práticas Educacionais e Currículo do Centro de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase no ensino de Cálculo, Geometria Analítica, Geometria Euclidiana, História da Matemática e na área de Educação Matemática, com ênfase em História da Educação Matemática, Didática da Matemática e Fundamentos Epistemológicos da Matemática. Atua principalmente nos seguintes temas: História da Matemática, História da Educação Matemática, Ensino de Matemática, História da Matemática em sala de aula e Etnomatemática. Bolsista Produtividade em Pesquisa nível 1D do CNPq.
E-mail: *iamendes1@gmail.com*

MIGUEL CHAQUIAM
Licenciado em Ciências pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1983), Licenciado em Matemática pelo Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (1984), Especialista em Matemática pela UNESPA (1989), Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001) e Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2012). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Análise Real, Matemática Computacional e História da Matemática, e na área de Educação Matemática, com ênfase em Ensino de Matemática e História da Educação Matemática. Foi professor de Matemática da Educação Básica durante 18 anos e é professor no Ensino Superior há mais de 30 anos. Atualmente é professor da Universidade da Universidade do Estado do Pará, vinculado ao Departamento de Matemática, Estatística e Informática e ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.
E-mail: *miguelchaquiam@gmail.com*

Este livro é destinado ao professor de matemática da Educação Básica e aos estudantes de licenciatura em Matemática, uma vez que se trata de um material resultante de experiências na formação inicial e continuada de professores de matemática e que vem sendo pensado continuamente. Esta versão reflete um fragmento de um trabalho dos autores, que foi planejado e experimentado há alguns anos na formação de professores de matemática. A principal finalidade é sugerir maneiras de abordar a Matemática da Educação Básica, consideradas adequadas para integração de informações sobre o desenvolvimento histórico das ideias matemáticas em sala de aula, desde que sejam priorizados o rigor e a naturalidade no tratamento dos conteúdos matemáticos sem desconsiderar a singularidade e a pluralidade cultural que fundamenta a matemática como conhecimento humano.

Sociedade Brasileira de
História da Matemática
SBHMat

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-89097-69-7
9 788589 097697