



## **O ENSINO DO CÁLCULO NA GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES BASEADAS NO CASO DA USP**

Gabriel Loureiro de Lima

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

gllima@hotmail.com, gllima@pucsp.br

Benedito Antonio da Silva

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

benedito@pucsp.br

### **RESUMO**

No presente trabalho, tomando por base os dados obtidos na tese de doutorado de Lima (2012), discute-se a implantação, em 1934, da disciplina de Análise na graduação em Matemática da Universidade de São Paulo e os motivos que levaram a criação, em 1964, de um curso inicial de Cálculo precedendo aquele de Análise. Destaca-se que tal disciplina foi introduzida sem que houvesse uma reflexão a respeito de seus objetivos específicos, sendo a mesma concebida, na maioria das vezes, como um preparatório para a Análise. Finalmente, apresentam-se alguns reflexos desta concepção pré-analítica do Cálculo nas aulas ministradas no curso e instituição em questão. O objetivo de se fazer tais considerações é apresentar algumas reflexões salientando a importância de discussões específicas a respeito do papel e dos objetivos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na graduação em Matemática.

**Palavras-chave: Ensino Superior, Curso de Cálculo na Matemática, Análise Matemática.**

### **ABSTRACT**

In this paper, based on obtained data in the doctorate thesis of Lima (2012), it is discussed the introduction of the discipline of Analysis, in 1934, in the Mathematics Graduation of Universidade de São Paulo and the reasons that led up to creation of the initial Calculus course, in 1964, preceding that of Analysis. It is

noteworthy that such discipline was introduced without reflection about its specific goals, the same being interpreted, the most time, as a preparatory for Analysis. Eventually, some consequences of this conception pre-analytical of Calculus of the taught lesson in the course and institution in question are presented. The purpose of making such considerations is to present some reflections, emphasizing the importance of specific discussions about the role and objectives of the discipline of Differential and Integral Calculus in Mathematics Graduation.

**Keywords: Higher Education, Calculus in Mathematics Graduation Course, Mathematical Analysis.**

## 1 Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral está presente não só nos cursos de Matemática, mas também em outras modalidades de graduação, tais como Engenharia, Física, Química, Administração, Arquitetura, Economia e até mesmo áreas não-relacionadas às Ciências Exatas, mas que necessitam de algumas ferramentas do Cálculo, como é o caso, por exemplo, da Biologia. Tal disciplina, quando ministrada nestas diferentes graduações que não a Matemática é usualmente conhecida como *curso de serviço* e faz parte da formação básica do estudante. Tem como objetivo fornecer a ele o ferramental matemático necessário para a resolução de problemas típicos de suas áreas de interesse. Nesse caso, a ênfase não costuma ser a sistematização simbólico-formal do Cálculo e sim a capacitação do estudante para que este aprenda a utilizar os conceitos e procedimentos deste campo de conhecimento, como, por exemplo, a idéia de derivada como taxa de variação, em situações das mais diferentes áreas.

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes nestes cursos básicos de Cálculo ocasionaram, principalmente a partir do início da década de 1980, a realização de um grande número de pesquisas visando compreender a natureza de tais dificuldades e buscar maneiras mais apropriadas de se trabalhar com este conteúdo nos diversos cursos nos quais ele está presente como uma disciplina de serviço. Foram criados, inclusive, eventos específicos visando discutir o ensino da Matemática em determinados cursos de graduação na área de Ciências Exatas, particularmente nas diversas modalidades de Engenharia.

No entanto, é preciso destacar que não é apenas nesses cursos superiores nos quais o Cálculo é uma disciplina de serviço que o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo é problemático. Os graduandos em Matemática, como atestam as pesquisas de Barufi (1999), Rezende (2003) e Olimpio Junior (2006) em geral, também apresentam desempenho bastante

abaixo do esperado nos cursos desta disciplina, em especial naquele primeiro que fazem ao ingressar no ensino superior. A este respeito, Olimpio Junior destaca que os:

Sintomas das dificuldades emergentes (...) materializam-se de maneira bastante preocupante, por exemplo, pelos elevados índices de reprovação e de desistência na disciplina, os quais, possivelmente, num efeito colateral perturbador, têm contribuído para a manutenção dos singulares índices de evasão dos cursos de Licenciatura/Bacharelado em Matemática no cenário brasileiro. (OLIMPIO JUNIOR, 2006, p. 1).

A situação do ensino do Cálculo na Matemática talvez seja ainda mais complicada que nos demais cursos superiores da área de Ciências Exatas, uma vez que, nestes últimos, há uma tendência em enfatizar as potencialidades dos métodos do Cálculo para a resolução de problemas de diversas áreas, enquanto que, de acordo com Rezende (2003, p.307) ainda não há no meio acadêmico um consenso a respeito de como deve ser uma disciplina introdutória deste conteúdo a ser ministrada aos futuros matemáticos ou aos futuros professores de Matemática. A orientação dada depende muito das concepções do docente que a está ministrando. A maioria dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de tal conteúdo na graduação em Matemática parece ainda não ter clareza a respeito de qual seria a maneira mais adequada de se responder questões como: Qual deve ser a ênfase dos cursos de Cálculo ministrados aos futuros matemáticos e futuros professores de Matemática? Eles devem ser conduzidos de maneira semelhante àqueles de serviço ou, na Matemática, o foco deve ser a sistematização e a justificação lógica do conteúdo de acordo com uma abordagem realizada com alto nível de rigor simbólico-formal? Será que, devido ao fato dos graduandos em Matemática cursarem também a disciplina de Análise, que engloba diversos conteúdos já vistos no Cálculo, pode-se pensar que a finalidade da disciplina em questão seja fornecer os pré-requisitos necessários para que os estudantes possam acompanhar, sem enfrentar tantas dificuldades, o curso de Análise que farão posteriormente? Se a resposta para a questão anterior for afirmativa, será que se pode pensar então que, na Matemática, o objetivo da disciplina de Cálculo é apresentar de maneira mais intuitiva aquilo que será tratado com alto nível de rigor na disciplina de Análise? E, finalmente, em quais aspectos o curso de Cálculo da Licenciatura deve ser diferente daquele oferecido no Bacharelado?

A realização de uma reflexão aprofundada a respeito da disciplina inicial de Cálculo que se ministra na graduação em Matemática, a nosso ver, é de suma importância, principalmente pelo fato da abordagem dada a este assunto nesse tipo de curso superior, em muitos casos, trazer consequências determinantes para a atuação profissional de seus egressos. Na prática, a maioria dos estudantes que passaram pelo Bacharelado em Matemática, em determinado momento de sua carreira profissional, acabam ministrando cursos de Cálculo, sejam eles de

serviço ou na própria Matemática. O mesmo acontece com parte dos licenciandos. Desta forma, e ainda mais levando em consideração que, conforme destacam Cunha (2004), Prandi (2009) e Labegalini (2009), há uma tendência de o professor ensinar da maneira como foi ensinado, uma abordagem de tal disciplina que não leve em consideração os aspectos que foram de fato fundamentais para a constituição e o desenvolvimento deste campo de conhecimento, os significados de seus principais conceitos e métodos e o verdadeiro papel do Cálculo na construção do conhecimento dos futuros matemáticos e professores de Matemática tem grandes chances de complicar ainda mais um cenário que, há tempos – no Brasil, especificamente, desde quando o primeiro curso superior de Matemática foi implantado - já é bastante preocupante.

Neste trabalho, por meio de dados obtidos em Lima (2012), daremos alguns indícios a respeito de como parte dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem da disciplina na graduação em Matemática da Universidade de São Paulo, mesmo que indiretamente, têm se posicionado em relação à alguns daqueles questionamentos apresentados anteriormente. Convém destacar que tal instituição e tal curso, durante muito tempo serviram de modelo para outros existentes no país e, portanto, diversos aspectos nela observados também estão presentes no desenvolvimento da disciplina de Cálculo ministrada aos graduandos em Matemática de outras universidades brasileiras criadas posteriormente. Investigamos como se deu a implantação e o desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral ministrada no curso de graduação em Matemática da Universidade de São Paulo, desde a fundação desta instituição, em 1934, até 1994, quando, oficialmente, a disciplina de Cálculo I oferecida aos licenciandos se tornou diferente daquela oferecida aos bacharelados. Tal investigação foi organizada em dois eixos de análise, a saber: (i) como se deu o processo de transição de uma disciplina que, quando implantada, era de Análise Matemática, para outra efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral e (ii) quais foram os níveis de rigor e as preocupações didáticas presentes nos cursos analisados e nos manuais que lhes serviram de referência. Recorremos a considerações teóricas específicas a respeito dos eixos de análise citados como, por exemplo, discussões a respeito da constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento e como disciplinas acadêmicas universitárias, as diferentes concepções de rigor e suas relações com a intuição e o surgimento de preocupações didáticas na universidade, em especial no ensino da Matemática.

Do ponto de vista metodológico, realizamos entrevistas com pessoas que em determinado momento estiveram envolvidas no processo de ensino de aprendizagem do Cálculo na graduação em Matemática da instituição de interesse na pesquisa, sejam como

estudantes ou como professores. Tais entrevistas foram planejadas e realizadas segundo os princípios da História Oral Temática que, no caso de trabalhos na área da Educação Matemática, tem como principal referência estudos de GARNICA (2003, 2004a, 2004b, 2007). Analisamos também alguns livros-texto de Cálculo que nossos depoentes disseram ter utilizado quando eram alunos ou professores de tal disciplina, além de documentos oficiais e pesquisas anteriores. Para as análises dos dados, utilizamos como referência aquilo que Bolívar (2002) denomina de Análise Paradigmática, que, segundo o autor, é bastante semelhante à Análise de Conteúdo estabelecida, dentre outros autores, por Bardin (2006).

Ressaltamos que, neste artigo, não temos a intenção de dar respostas definitivas a respeito de como o Cálculo deve ser trabalhado na Matemática, nem sequer responder e/ou discutir todos os questionamentos apresentados no início do texto. Nosso objetivo é, com o auxílio das informações referentes ao processo de constituição da disciplina de Cálculo I ministrada na USP aos graduandos em Matemática, analisar que tipos de reflexões foram e estão sendo feitas relativamente ao ensino deste conteúdo especificamente nos cursos que formam matemáticos e professores de Matemática.

## **2 A implantação da disciplina de Análise e a posterior criação de uma disciplina inicial de Cálculo**

Antes da fundação da USP, a disciplina de Cálculo estava presente no currículo das escolas militares e politécnicas do Brasil. Nestas, o curso tinha um caráter prático, cuja característica principal era a ênfase nos procedimentos algorítmicos, em exercícios de cálculos de limites, derivadas e integrais, visando fornecer subsídios aos futuros militares e engenheiros para que estes pudessem utilizar os elementos do Cálculo como ferramentas em suas carreiras profissionais. Só eram apresentadas aquelas definições e deduções que fossem realmente essenciais para o desenvolvimento da disciplina. Já no primeiro curso superior de Matemática do país, que entrou em funcionamento com a criação da USP em 1934, houve um redirecionamento no ensino de tal conteúdo. Este esteve diretamente relacionado ao desejo de se implantar no Brasil uma instituição seguindo os mesmos moldes das conceituadas universidades europeias. Para isto, era fundamental que os docentes contratados fossem, de fato, pesquisadores, na verdadeira acepção do termo, já que, um dos objetivos da universidade, além de preparar profissionais para o mercado de trabalho, deveria ser formar pessoas capazes de realizar pesquisa científica de ponta.

Como não havia no país um número suficiente de profissionais com esse perfil, diversos pesquisadores europeus foram contratados, dentre os quais Luigi Fantappiè, destacado

analista italiano que trouxe para o Brasil o modelo de ensino presente nos cursos de Matemática da Itália e de diversos outros países europeus, no qual não havia no currículo uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral. Os estudantes trabalhavam com os conceitos fundamentais deste ramo em uma disciplina chamada Análise Matemática, ministrada, desde o primeiro ano do ensino superior, com ênfase na formalização do conteúdo trabalhado, apresentado sempre com um elevado nível de rigor, e acompanhado das demonstrações de todos os resultados enunciados. Em comparação àqueles cursos destinados aos engenheiros e militares, as técnicas de cálculo perderam quase que completamente seu espaço. O objetivo da disciplina era fornecer aos estudantes uma sólida conceitualização dos elementos matemáticos estudados, já que, de acordo com este modelo europeu, em um curso destinado à formação de matemáticos e de professores de Matemática, somente o domínio das técnicas, da Matemática pensada como ferramenta, não bastava para o exercício profissional de seus egressos.

Por meio das notas de aula do curso de Análise Matemática ministrado por Fantappiè na época em que a USP foi fundada, percebemos que não era usual os docentes conceberem a existência daquilo que Grattan-Guinness (1997) denomina de diferentes níveis de rigor e nem, portanto, a necessidade do professor de qualquer disciplina do ensino superior buscar aquele nível que fosse mais adequado ao contexto em que está trabalhando e à maturidade matemática de seus alunos. Da mesma forma, ao menos explicitamente, o matemático italiano parecia não procurar um diálogo entre intuição e rigor; tudo já era trabalhado diretamente de maneira sistematizada e rigorosa. Sua principal preocupação foi introduzir, no país, o rigor simbólico-formal no ensino da Análise, propor uma abordagem baseada na organização weierstrassiana do conteúdo em questão. Isto, sem dúvida, foi um cuidado de sua parte, já que, na época, esse era o tratamento considerado como sendo o mais adequado para se trabalhar com este assunto em um curso de graduação em Matemática.

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao cursarem, imediatamente após ingressar no ensino superior, uma disciplina conduzida com tanto formalismo e com um nível tão elevado de rigor, fizeram com que alguns professores, dentre os quais Elza Furtado Gomide, que tomou por base, principalmente sua própria experiência como aluna da graduação em Matemática da FFCL da USP, passassem a defender que era necessário haver uma adequação no nível de rigor e formalismo com que os conceitos de função, limite, derivada e integral eram trabalhados em um curso inicial. Era preciso que se levasse em conta a maturidade matemática dos estudantes que estavam cursando a disciplina. Gomide propôs então que, inicialmente, os alunos estudassem os conteúdos de maneira menos crítica e mais

manipulativa (constituindo uma disciplina que posteriormente foi chamada de Cálculo) para, em um segundo momento, já com maior maturidade matemática, rever tais conteúdos com níveis mais elevados de rigor e formalismo, por meio de uma abordagem mais crítica, em um curso de Análise Matemática.

É importante percebermos, no entanto, que, de forma alguma, Gomide propôs a substituição de um modelo teoricista por outro tecnicista (SALINAS & ALANÍS, 2009), isto é, de uma disciplina na qual a ênfase estava na apresentação detalhada da teoria e de suas justificativas, para outra em que o foco estivesse nos procedimentos algorítmicos. O que a docente postulava é que, em um primeiro contato dos estudantes com os conteúdos do Cálculo, não se devia ir tão fundo na sistematização e na formalização dos conceitos. Este trabalho deveria ser feito posteriormente. Inicialmente o que se deveria buscar - de uma maneira que fosse acessível para aqueles alunos que estavam ingressando na universidade, mas nem por isso não rigorosa - é que estes pudessem compreender os significados dos conceitos fundamentais deste ramo do conhecimento, as ideias que estiveram em sua gênese, e que soubessem utilizar aquilo que haviam estudado, por meio de técnicas operatórias, como ferramentas para a resolução de problemas. Neste sentido, as técnicas de cálculo de limites, derivadas e integrais, que até então praticamente não tinham espaço na disciplina, embora não devessem ser o foco do curso, deveriam sim fazer parte deste estudo introdutório.

A partir destas reflexões de Gomide, começou a haver um redirecionamento na forma como a disciplina inicial de Análise era trabalhada. Os professores passaram a buscar uma abordagem que estivesse mais próxima do Cálculo do que da Análise e que adotasse um nível de rigor mais moderado. Com o passar do tempo, as alterações começam a se tornar mais explícitas. As apostilas escritas pelo professor Omar Catunda - que era o responsável pela cátedra de Análise no momento em que Gomide começou a propor essas modificações e que se mostrou favorável às mesmas - a partir do início da década de 1950 e o livro *Um Curso de Análise* que o mesmo autor lançou em 1962, trazem diversas preocupações didáticas, sempre relacionadas ao rigor, que dão indícios de que, realmente, estavam ocorrendo mudanças na maneira como o curso do primeiro ano era conduzido. Começa a haver uma valorização da intuição no ensino, principalmente a intuição geométrica, e a busca por uma abordagem menos abstrata, porém nem por isso não rigorosa, daquilo que estava sendo trabalhado. Passou-se a procurar o nível de rigor que fosse mais adequado ao público-alvo daquela disciplina. Além disso, exercícios de cálculos de limites, derivadas, pontos de máximos e mínimos, esboço de gráficos, integrais, áreas, volumes e comprimentos de arco também passaram a figurar explicitamente nos materiais redigidos por Catunda e, durante as aulas que

este ministrava na FFCL.

O primeiro fruto oficial desse redirecionamento foi a mudança de nome da cadeira de Análise Matemática que, em 1964, juntamente com as disciplinas que estavam sob a responsabilidade da mesma, passou a se chamar Cálculo Infinitesimal. É, portanto, a partir deste ano que, verdadeiramente, podemos falar na existência de um curso de Cálculo na graduação em Matemática da USP. Esta mudança, além de ter sido consequência daquelas reflexões iniciadas por Gomide e Catunda na década anterior, reflete um crescimento, no país, principalmente por meio de livros didáticos, da influência do modelo norte-americano de ensino universitário de Matemática. Nos Estados Unidos, os estudantes, ao ingressarem na universidade, cursavam primeiramente uma disciplina de Cálculo, trabalhada de acordo com uma orientação que ia ao encontro daquelas ideias defendidas por Gomide, para, posteriormente, em um curso de Análise ou, conforme nomenclatura também bastante utilizada na época, de Cálculo Avançado, rever tais conteúdos de acordo com uma orientação mais crítica e mais voltada aos fundamentos do que à manipulação. É preciso destacar, no entanto, que o fato da disciplina ministrada ao aluno ingressante ter passado a se chamar Cálculo e não mais Análise não colocou fim ao processo lento e gradual de transformações sofridas por ela e que, desaguou em um curso com o formato que conhecemos atualmente. Podemos dizer que, a partir das reflexões daqueles professores que eram favoráveis a um redirecionamento da disciplina, iniciadas na década de 1950, houve um longo período que, de acordo com Chervel (1990), especialista em História das Disciplinas, pode ser classificado como de *perturbação* (ou de *transição*), no qual se observou a existência simultânea de dois modelos, o antigo – ensinar diretamente Análise – que ainda não havia caído totalmente por terra e o novo – ensinar inicialmente Cálculo – que começava a se instaurar.

### **3 O papel específico do Cálculo no curso de Matemática e a visão desta disciplina como pré-Análise**

Se refletirmos a respeito do processo histórico de desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática como campos de conhecimento, provavelmente concluiremos que aquela proposta feita por Gomide no início da década de 1950 realmente parece ser mais significativa para o ingressante na universidade do que aquela em vigor até então. Isso porque, historicamente, o que ocorreu foi que, na tentativa de justificar de maneira rigorosa os elementos envolvidos nas ideias fundamentais daquilo que hoje chamamos de Cálculo, estabeleceu-se a Análise, ilustrando que, de fato, se quisermos pensar em uma relação de ordem entre as disciplinas tratando destes conteúdos, o mais



apropriado seria realmente começar com o Cálculo, apresentando, com um nível menos elevado de rigor as ideias básicas deste ramo da Matemática e seus significados, ao invés de ensinar diretamente Análise, como estipulava o modelo europeu trazido para a USP por Fantappiè. Tal modelo, como se pode perceber, seguia na contramão em relação à origem histórica desses dois ramos de conhecimento e, neste sentido, a orientação proposta por Gomide trazia uma adequação do ensino à História: primeiramente os alunos deveriam se familiarizar com os conceitos com os quais trabalhariam, seus significados e suas técnicas operatórias para, em um segundo momento, analisá-los, criticá-los. Afinal, conforme destacou Gomide (2008, sem numeração de páginas) “como os alunos poderiam compreender diretamente a crítica de algo que ainda nem conheciam?”.

Esta ideia, no entanto, parece não ter sido bem compreendida por parte dos docentes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e, mesmo que indiretamente, acabou dando origem a duas visões equivocadas, que, em geral, se manifestam conjuntamente, e que perduraram – e, em alguns casos, permanecem até hoje – ao longo de toda a trajetória do ensino desta disciplina na Matemática da USP e, muito provavelmente, em outras instituições que a tomavam como modelo.

A questão de primeiro conhecer para, posteriormente, criticar, acabou sendo interpretada por muitos como uma necessidade de, no Cálculo, se fornecer aos estudantes os pré-requisitos necessários para que estes pudessem compreender aquilo que, em um segundo momento, seria trabalhado na Análise. Nesta interpretação, a disciplina de Cálculo parece não ter objetivos próprios na formação do matemático ou do futuro professor de Matemática e, portanto, não há preocupação em refletir a respeito do Cálculo pelo próprio Cálculo, seus conceitos fundamentais, suas especificidades e potencialidades em um curso de graduação destinado à formação destes profissionais. Aqueles que compartilham desta ideia, de acordo com Reis (2001), tendem a contrapor rigor e intuição, concebendo o Cálculo como uma disciplina na qual determinados conceitos serão apresentados aos estudantes de maneira intuitiva para, posteriormente, na Análise, serem rigorosamente formalizados, quando, na verdade, em ambas as disciplinas níveis adequados de rigor e intuição devem estar presentes em relação dialética.

Com base nos dados obtidos em Lima (2012), parece que a proposta de, no curso inicial de Cálculo, a abordagem ser mais manipulativa também não foi totalmente compreendida por alguns dos envolvidos no processo de ensino de tal disciplina. Embora, conforme destacamos, Gomide, ao introduzir esta ideia, não estivesse defendendo um curso que enfatizasse os procedimentos algorítmicos ao invés dos conceitos, e sim que, em uma primeira abordagem,

os estudantes pudessem entrar em contato com os problemas geradores do Cálculo como campo de conhecimento, seus conceitos fundamentais (a diferenciação, a integração e a relação estabelecida entre essas duas operações por meio do Teorema Fundamental do Cálculo) e os tipos de problemas – matemáticos ou não – usualmente solucionados com base em suas ideias e ferramentas, alguns interpretaram de outra forma este redirecionamento proposto por ela. Entenderam que no Cálculo, os estudantes deveriam aprender as técnicas e, efetivamente, fazer contas, enquanto que, na Análise, deveriam aprender os fundamentos, os teoremas e suas demonstrações. Não perceberam que a questão fundamental não é apresentar ou não teoremas, fazer ou não demonstrações e sim de que maneira e em que momento do curso inicial de Cálculo estes elementos devem ser trabalhados para que sejam significativos para o aluno.

O principal problema trazido por esta incompreensão, por parte de alguns docentes, em relação aos objetivos de se acrescentar no currículo, em 1964, uma disciplina inicial de Cálculo precedendo a de Análise foi a subordinação que se estabeleceu entre tais disciplinas a partir de então. Pelo estudo de Lima (2012), percebemos que a partir do momento que o curso de Cálculo foi oficialmente introduzido na graduação em Matemática da USP, parece que em momento algum ele esteve voltado para si mesmo e sim invariavelmente subordinado à Análise. Na investigação realizada, não observamos discussões referentes ao curso inicial de Cálculo levando em conta apenas os problemas que deram origem a este campo de conhecimento, suas ideias e conceitos fundamentais. As reflexões foram sempre feitas em termos dos conteúdos que normalmente são trabalhados tanto no Cálculo quanto na Análise e não em termos das especificidades do Cálculo, visto como uma preparação para que os estudantes pudessem de fato compreender o que iriam estudar com mais detalhes posteriormente.

#### **4 A concepção do Cálculo como pré-Análise e seus reflexos nas aulas ministradas no curso de Matemática da USP**

Conforme atestam os dados presentes em Lima, embora a partir de 1964 os estudantes tenham passado a cursar, inicialmente, uma disciplina de Cálculo, os docentes, na maioria das vezes, continuavam a ministrar cursos de Análise, que, de acordo com caracterização feita por um deles, diferiam dos anteriores por apresentarem níveis mais moderados de rigor, já que se tratava de uma introdução, de uma preparação para um estudo mais aprofundado que seria feito posteriormente. Um forte indício detectado dessa constante subordinação do Cálculo à Análise foi o fato de grande parte dos professores responsáveis por ministrar a disciplina

adotar em suas aulas manuais que apresentam os conteúdos de acordo com a sequência de Cauchy-Weierstrass, na qual a noção formal de limite embasa as ideias de derivada e integral. Ao longo do período investigado, que englobou sessenta anos, houve apenas uma experiência, na década de 1970, adotando um texto não organizado de acordo com esta sequência, a saber, *Cálculo: um curso universitário*, de autoria de Edwin Moise, que propunha uma abordagem em espiral para o conteúdo.

Segundo Barufi (1999), a sequência de Cauchy-Weierstrass é mais adequada para a Análise do que para o Cálculo e, de acordo com Rezende (2003), ela não é apropriada para cursos mais preocupados com os significados dos resultados do que com sua sintaxe lógica. É justamente neste ponto que reside uma questão bastante importante percebida por Lima em sua investigação: ao longo da trajetória da disciplina de Cálculo I na graduação em Matemática da USP, os momentos nos quais a ênfase esteve em fornecer subsídios aos estudantes para que estes pudessem realmente se apropriar dos significados das ideias e conceitos fundamentais desse campo de conhecimento foram bastante raros se comparados com aqueles nos quais a grande preocupação foi apresentar aos alunos o conteúdo programado e as demonstrações de todos os resultados enunciados, recorrendo para isto a um alto nível de rigor simbólico-formal, ainda que menos elevado do que aquele com o qual os conceitos seriam revistos na Análise. Mesmo os procedimentos algorítmicos que, atualmente, tem caracterizado muitos dos cursos de Cálculo ministrados no país, estiveram em foco apenas em raríssimas ocasiões, sendo que, nestas, percebe-se claramente que era uma opção do professor que estava ministrando a disciplina naquele momento e não uma concepção da maioria do corpo docente do Instituto de Matemática.

Lima constata que grande parte das preocupações de caráter didático manifestadas pelos professores da disciplina investigada, bem como pelos manuais adotados como referências ao longo da trajetória da mesma, estiveram diretamente relacionadas ao rigor. Mais especificamente à necessidade de se fornecer, no Cálculo, subsídios para que os estudantes pudessem, quando realmente cursassem Análise, compreender abordagens ainda mais rigorosas e formais daquilo que estava sendo trabalhado. Ao longo do período analisado, foram detectadas três breves tentativas de abordagens diferenciadas no curso inicial de Cálculo, sendo que duas delas foram realizadas na década de 1970, a saber, a já citada utilização do texto de Moise e a implantação de uma metodologia de ensino baseada em discussões em grupo mediadas por roteiros de estudo, e uma delas colocada em prática no final da década de 1980: a utilização, como referência para a disciplina, do manual *Calculus* de Michael Spivak. Essas inovações didáticas, de acordo com aqueles que nela estiveram

envolvidas, não foram planejadas visando tornar a disciplina mais “fácil” para os estudantes, mais próxima de um curso atual de Cálculo do que de um curso de Análise. Não foram, de maneira alguma, tentativas de adequar o nível de rigor com o qual os conteúdos eram trabalhados à maturidade matemática daqueles estudantes que estavam ingressando no ensino superior ou de voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo e para as especificidades desta área de conhecimento. De acordo com os entrevistados, o objetivo daqueles que as colocaram em prática era tentar possibilitar aos alunos que eles realmente interiorizassem aquele tratamento rigoroso e formal que estava sendo dado ao conteúdo e não apenas o memorizassem e tentassem conseguir bons resultados nas avaliações.

Com relação especificamente àquela metodologia de aulas baseadas em discussões em grupo mediadas por roteiros, embora ela tenha sido bastante importante e inovadora por, pela primeira vez na trajetória do ensino do Cálculo na graduação em Matemática da USP, ter valorizado a construção do conhecimento pelo próprio estudante e rompido com o *modelo popular de ensino* (THURSTON, 1994) - no qual a tarefa do docente é apresentar o conteúdo já institucionalizado e organizado de acordo com a sequência definição – explicação - teorema – demonstração, enquanto que o papel do aluno é tomar nota daquilo que é “transmitido” pelo professor, estudar aquele conteúdo e se apropriar do mesmo de tal forma que seja capaz de resolver as questões que lhe serão propostas nas listas de exercícios e nas avaliações – o fato da preocupação central dos professores estar voltada a uma apresentação bastante rigorosa do conteúdo manifestava-se de maneira bastante explícita nos roteiros. As atividades propostas, embora abrissem algum tipo de espaço para a intuição dos alunos, em geral privilegiavam aspectos relativos à formalização dos conceitos abordados e não os aspectos epistemológicos e cognitivos de seus entes fundamentais. Além disso, as questões trabalhadas nem sempre permitiam que o estudante percebesse em quais contextos – matemáticos ou não – aquilo que estava sendo estudado poderia ser aplicado ou utilizado, o que também é fundamental em um curso inicial da disciplina.

De qualquer forma, apesar de na implantação das mesmas não ter havido uma preocupação em desvincular o Cálculo da Análise e voltá-lo a si mesmo e a seus objetivos específicos, essas experiências didáticas postas em prática com o auxílio dos roteiros ou do texto de Moise, demonstram a preocupação do corpo docente em, a partir da década de 1970, buscar maneiras de se trabalhar com o Cálculo de uma maneira que fosse rigorosa – ainda que em demasia para o contexto de um curso inicial - sem, no entanto, ser excessivamente formalista, e que valorizasse a construção do conhecimento por parte do próprio estudante. Foram tentativas de inovações didáticas para tornar a disciplina significativa para o aluno ao

mesmo tempo em que fosse mantido o nível de rigor considerado, naquela época, como sendo o mais adequado para um curso inicial destinado a graduandos em Matemática.

Dentre as experiências destacadas por Lima, aquela que mais trouxe arraigada a ideia do Cálculo como pré-Análise ou como Análise adotando um nível de rigor mais moderado foi a decisão tomada por um grupo de professores em meados da década de 1980 de adotar como referência, no curso inicial de Cálculo, o texto de Spivak. Para estes docentes, aquelas reformulações visando encontrar o nível de rigor que fosse mais adequado para o contexto de uma disciplina ministrada logo no ingresso do estudante ao ensino superior e que vinham sendo feitas desde o início da década de 1950, quando Gomide começou a defender a existência de uma disciplina de Cálculo precedendo a de Análise, havia, pouco a pouco, retirado do curso aquilo que era de fato fundamental para o mesmo, a saber, o rigor que o havia caracterizado até então. Na tentativa de recuperar aquilo que havia se perdido, optaram então por utilizar o manual citado; tal experiência durou apenas dois anos e não foi muito bem recebida pelos estudantes, que achavam o curso muito difícil.

O principal problema desta decisão, a nosso ver, não foi a utilização de um livro que, atualmente é considerado pelo próprio autor como mais adequado para uma disciplina de Análise do que para um curso inicial de Cálculo. Apesar desta orientação predominantemente voltada para a sistematização teórico-formal daquilo que é trabalhado, que nos parece bastante complexa para alunos ingressantes na universidade, o manual traz preocupações didáticas relevantes e com potencial para contribuir significativamente para o aprendizado dos estudantes. A questão é a maneira como o livro foi utilizado. O ideal seria o professor se inspirar nos elementos trazidos por Spivak e os adequar para aqueles estudantes que ainda não possuíam qualquer conhecimento a respeito do Cálculo ou da Análise e nem mesmo a maturidade matemática necessária para compreender discussões teóricas tão aprofundadas. No entanto, como para alguns dos docentes envolvidos em tal experiência, aparentemente, a importância de se fazer uma abordagem com alto nível de rigor e de formalismo suplantava a da aquisição dos significados, por parte dos alunos, daquilo que estava sendo trabalhado, notamos que, além de, em diversos casos, o livro ser praticamente reproduzido em sala de aula, havia aspectos importantes do ponto de vista didático, como, por exemplo, o apelo à visualização gráfica e a discussão dos significados das notações empregadas, que estavam presentes no manual e que não eram levados para a sala de aula. Nota-se, portanto, que nesta busca por um tratamento extremamente formal e rigoroso do conteúdo, os significados dos principais elementos do Cálculo e as finalidades específicas dos mesmos na formação dos futuros matemáticos e futuros professores de Matemática foram deixados de lado.

## 5 Considerações finais

De acordo com os dados apresentados, podemos afirmar que o curso inicial de Cálculo foi introduzido na Matemática, mas não houve, nesta implantação, a preocupação em discutir quais deveriam ser os objetivos específicos de tal disciplina e qual era o seu papel dentro do currículo de tal graduação— que, em nossa opinião, é muito mais abrangente do que apenas preparar o estudante para a Análise. Neste sentido, Rezende (2003, p. 306) destaca que uma das causas para os diversos problemas presentes no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo reside no fato de muitos dos professores nele envolvidos insistirem na concepção de que a diferença entre o Cálculo e a Análise está “apenas” no modo de apresentação dos conteúdos e na dosagem do rigor empregado em cada uma destas disciplinas.

Para alguns, apenas em um curso de Análise os resultados devem ser demonstrados; no Cálculo deve-se fazer apenas “contas” e aplicações dos conceitos. Para outros, mesmo no Cálculo o foco deve ser a sistematização dos resultados de acordo o rigor simbólico-formal, mas em um nível mais moderado do que aquele que será adotado na Análise. Rezende então faz os seguintes questionamentos: mas quais resultados? Quem os determina? O Cálculo ou a Análise? E conclui que, da maneira como tais disciplinas estão estruturadas no ensino superior, é a Análise quem traça as diretrizes para o ensino do Cálculo, ocorrendo uma contradição em relação à origem histórica destes dois campos de conhecimento. Com isso, o ensino do Cálculo é o grande prejudicado, já que não consegue ter outro ponto de referência que não seja esta visão pré-analítica de tal disciplina.

Os dados trazidos por Lima nos permitem perceber que, na USP, instituição que sempre foi – e, em muitas ocasiões, continua sendo - modelo para outras do país, esta concepção equivocada a respeito das diferenças entre Cálculo e Análise esteve presente desde o momento em que estas duas disciplinas passaram a coexistir na grade curricular da graduação em Matemática. Além disso, concluimos que, conforme salienta Rezende, de fato a disciplina inicial de Cálculo do curso de Matemática enfrenta uma crise de identidade causada principalmente pela subordinação desta à Análise, levando, na maioria dos casos, a uma abordagem excessivamente rigorosa e formal do Cálculo que dificulta a compreensão, por parte dos alunos, de suas ideias básicas e seus respectivos significados. Mais do que reconstatar tal crise, os dados nos possibilitam afirmar que ela não é recente, uma vez que a gênese desta visão pré-analítica do Cálculo se confunde com o próprio nascimento de tal disciplina no primeiro curso superior de Matemática do Brasil. Ela não existia originalmente e, já sem identidade própria, foi criada para tentar amenizar as dificuldades dos ingressantes

perante a uma abordagem tão rigorosa e formal dos conceitos fundamentais da Análise. Já nos objetivos de sua criação, portanto, estava embutida essa ideia de que era necessário haver um curso inicial que fornecesse os pré-requisitos necessários para que os alunos pudessem acompanhar, com maior facilidade, aquilo que estudariam posteriormente na Análise.

Concordamos com Rezende que, para superar tal crise, é necessário voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, seus problemas construtores, suas potencialidades e seus significados, procurando nele mesmo o nível de rigor possível e as metas de seu ensino, rompendo o cordão que submete, no curso de Matemática, o ensino deste conteúdo ao da Análise. Conforme destaca Reis (2001), é preciso que os professores tenham consciência das diferenças existentes entre as disciplinas de Cálculo e de Análise e do papel desempenhado por cada uma delas nos currículos dos cursos superiores de Matemática. De acordo com as entrevistas realizadas por Lima, embora discussões explícitas neste sentido ainda não sejam tão usuais, foi a partir das primeiras reflexões a respeito de uma possível diferenciação entre as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado que começou a haver um avanço neste quesito, ao menos no que diz respeito ao curso inicial ministrado aos futuros professores. Conforme atestam os dados, alguns docentes passaram a se preocupar, especialmente, com as características daquela primeira disciplina de Cálculo a ser cursada pelos licenciandos, tentando perceber quais os conteúdos essenciais a serem trabalhados nesta modalidade, de que maneira este trabalho poderia ser feito para se tornar mais significativo para o estudante e em quais aspectos este curso deveria ser diferente daquele ministrado aos futuros bacharéis. Foram estas preocupações, além do fato de os ingressantes na Licenciatura, em geral, chegarem à universidade com uma formação matemática mais deficiente, que culminaram, em 1994, na distinção oficial entre a disciplina de Cálculo I oferecida aos futuros professores de Matemática e aquela destinada aos futuros matemáticos. Com relação especificamente ao Cálculo ministrado na Licenciatura, a professora Hellmeister resume da seguinte forma as mudanças ocorridas a partir de 1994:

Mudou no seguinte sentido: você acolhe mais os alunos. Na Licenciatura temos muitos alunos que vêm (...) mal formados e, então, se percebeu que eles acabavam não aprendendo quase nada daquele Cálculo formal. Decidiu-se então ir menos longe nos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, não fazer os teoremas de Gauss, Green e Stokes, fazer pouca coisa de integral de superfície... Enfim, optou-se por avançar menos e ficar mais no começo; tentamos cobrir um pouco essa parte do conteúdo do ensino médio que o aluno não tem. (...) Nós retomamos alguns conteúdos do ensino médio, mas com outra abordagem; trabalhamos um pouco mais funções, funções exponenciais, logarítmicas, (...) as funções trigonométricas, as inversas... Dedicamos mais tempo a isto. E tem também algumas atividades que preparamos para introduzir certos conceitos e que os alunos desenvolvem em grupo. Então, o que se estabeleceu foi essencialmente o seguinte: ir um pouco menos longe e acolher melhor o aluno, (...) fazer testes para diagnosticar as falhas deles e tentar cobrir. (HELLMEISTER, entrevista, 2009).

Se na Licenciatura percebemos indícios de um progresso em relação a reflexões a respeito do papel específico do Cálculo na formação do estudante, no Bacharelado, este tipo de preocupação parece ainda não ter entrado em pauta. A reformulação de 1994 só teve consequências na Licenciatura e para os futuros matemáticos a disciplina continuou a ser ministrada exatamente da mesma forma que era feita antes, sendo que esta também não difere muito daqueles primeiros cursos oferecidos logo que tal disciplina foi criada, em 1964. Uma tendência atual apontada pelos depoentes ouvidos por Lima é a de, durante as aulas do curso inicial de Cálculo, continuar apresentando o conteúdo de acordo com um nível bastante elevado de rigor simbólico-formal, mas, nas listas de exercícios e nas avaliações, não enfatizar estes aspectos, deixando o foco voltado para as questões envolvendo o cálculo de limites, derivadas e integrais e acentuando aquilo que Rezende denomina de *conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede*. Este procedimento, é normalmente praticado por aqueles docentes que, tendo consciência das dificuldades trazidas por um tratamento excessivamente rigoroso e formal dado ao Cálculo, procuram avaliar os estudantes com base naquilo em que os mesmos tendem a apresentar melhores resultados, a saber, os exercícios algorítmicos. Tal postura, de acordo com Artigue (1995), faz com que o aluno não valorize o conceito e seus significados, mas sim os procedimentos operatórios associados a ele, já que estes últimos é que são cobrados e, para muitos, é por meio daquilo que figura nas avaliações que se percebe o que, de fato, é fundamental de ser aprendido em determinada disciplina.

Salientamos, finalmente, a importância de se investigar as concepções dos professores universitários a respeito destes aspectos e, com base em tais investigações, refletir como poderia ser formatado um curso de Cálculo específico para a graduação em Matemática que fosse voltado para si mesmo e, na medida do possível, desvinculado da disciplina de Análise, tentando perceber quais deveriam ser os objetivos de tal curso, que conteúdos ou situações deveriam ser enfatizados e quais as metodologias mais indicadas para se trabalhar com esta disciplina de acordo com essa nova orientação. Este trabalho, longe de ter a pretensão de dar respostas a todos os questionamentos colocados, é um convite para novas reflexões – tanto de nossa parte quanto de outros pesquisadores - referentes aos aspectos nele abordados e outros a eles relacionados.

## Referências

ARTIGUE, Michele. La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. & GÓMEZ, P.



(Eds.). **Ingeniería didáctica em educación matemática**, pp. 97 – 140. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa, 2006.

BOLÍVAR, Antonio. “De nobis ipsis silemus?”: Epistemologia de al investigación biográfico-narrativa em educación. **Revista Electrónica de Investigación Educativa**, 4(1). Disponível em <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-bolivar.html>. Último acesso em 16/11/2011.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, Porto Alegre: Palmarinca, 1990.

CUNHA, Maria Isabel. Diferentes Olhares sobre as Práticas Pedagógicas no Ensino Superior: a docência e sua formação. In: **Educação**, Porto Alegre, ano XXVII, n.3 (54), p. 525 – 536, Set./Dez. 2004.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação. In: **Zetetiké**, vol. 11, n. 19, pp. 9-55, Jan./Jun. 2003 – CEMPEM/FE/UNICAMP – Campinas – SP.

\_\_\_\_\_. (Re)Traçando Trajetórias. (Re)Coletando Influências e Perspectivas: Uma Proposta em História Oral e Educação Matemática. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. In: (Org.) BICUDO, M. A. ; BORBA, M. C.; São Paulo: Cortez Editora, 151-163, 2004a.

\_\_\_\_\_. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L.; FIORENTINI, D.; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004b. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 9).

\_\_\_\_\_. **História oral em educação matemática**: outros usos, outros abusos. Guarapuava: SBHMat, 2007. 84 p. – (Coleção História da Matemática para Professores).

GRATTAN-GUINNES, Ivor. O que foi e o que deveria ser o Cálculo? In: **Zetetiké**, vol. 5, n. 7, pp. 69-94, Jan./Jun. 1997 – CEMPEM/FE/UNICAMP – Campinas – SP

HELLMEISTER, Ana Catarina Pontone. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima.

São Paulo, 10 de fevereiro de 2009.

LABEGALINI, Andréia Cristina Fregate Baraldi. A didática no ensino superior: saberes e competências da nossa época. In: LABEGALINI, A. C. F. B. & MARÇOLLA, R. (Org.). **Comunicação e Educação: a didática a serviço do ensino superior**. Marília: Arte & Ciência Editora, p. 11 – 18, 2009.

LIMA, Gabriel Loureiro de. **A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

OLIMPIO JUNIOR, Antonio. **Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática – Uma Abordagem Integrando Oralidade, Escrita e Informática**. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

PRANDI, Luiz Roberto. Tendências do Processo Didático-Pedagógico no Ensino Superior na Contemporaneidade. In: **Akrópolis**, Umuarama, v.17, n. 3, p. 137 – 142, jul./set. 2009.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SALINAS, Patrícia & ALANÍS, Juan Antonio. Hacia un Nuevo Paradigma en La Enseñanza del Cálculo dentro de una Institución Educativa. In: **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, vol. 12, n. 3, p. 355 – 382, novembro de 2009.

THURSTON, William. P. On proof and progress in mathematics. In: **Bulletin of the American Mathematical Society**, 30/2, p. 161-177, 1994.