



Estudos Relacionados aos Conceitos Fundamentais de Cálculo e Análise

¹Odirlei Silva Jesus

¹Universidade Federal do Rio Grande do Norte –
Brasil
odirlei@ccet.ufrn.br

Palavras-chave:

Ensino e aprendizagem. Cálculo e Análise. Conceitos limiares.

Keywords

Teaching and learning. Calculus and Analysis. Thresholds concepts.

RESUMO

O objetivo do presente artigo é apontar tendências nos estudos referentes às dificuldades no ensino e aprendizagem dos conceitos fundamentais das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, comum aos cursos de graduação na área de Ciências Exatas, e Análise Real, específica do curso de Matemática. A investigação refletida neste artigo é resultado de pesquisa bibliográfica, sendo parte de um projeto de pesquisa mais amplo.

ABSTRACT

The purpose of this article is to point out trends in the studies relating to the difficulties in teaching and learning the basic concepts of Calculus and Integral disciplines common to undergraduate courses in Exact Sciences, and Real Analysis, specific course of Mathematics. The research reflected in this article is the result of bibliographic research, part of a larger research project.

1. Introdução

São inquietantes para toda a comunidade acadêmica e sociedade em geral os altos índices de reprovação nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, comum a todos os cursos na área de Ciências Exatas. Mais especificamente, nos cursos de graduação em Matemática, sejam nos graus de bacharelado ou de licenciatura, as dificuldades de aprendizagem deste componente curricular e do componente Análise Real conduzem a uma realidade mais drástica que é a de alto índice de evasão destes cursos. Mais particular ainda, tratando-se dos cursos de formação de professores de Matemática, uma preocupação natural é quanto à qualidade da formação nestes importantes componentes curriculares e seu impacto na atuação dos egressos destes cursos como professores nas escolas de nível fundamental, médio e mesmo superior para aqueles que fizerem seus estudos de pós-graduação.

Concordamos com Lima e Silva (2012), que observa a tendência dos professores ensinarem tal como aprenderam nos bancos de seus cursos de formação e que é essencial que se faça uma reflexão aprofundada a respeito do componente curricular Cálculo Diferencial e Integral levando *“em consideração os aspectos que foram de fato fundamentais para a constituição e o desenvolvimento deste campo de conhecimento, os significados de seus principais conceitos e métodos e o verdadeiro papel do Cálculo na construção do conhecimento dos futuros matemáticos e professores de Matemática”*. (LIMA e SILVA, 2012, p. 4).

A pesquisa de que trata o presente artigo é parte de um projeto mais amplo cujo objetivo final é elaborar hipóteses sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem de conceitos essenciais dos componentes curriculares Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real e sugerir estratégias de ensino desses conceitos. A primeira etapa deste projeto consiste em pesquisa bibliográfica, tomando como referência os trabalhos publicados nos anais dos principais eventos de pesquisa da área. De acordo com Cervo, Bervian e da Silva (2007, p.61), a pesquisa bibliográfica *“constitui o procedimento básico para os estudos monográficos, pelos quais se busca o domínio do estado da arte sobre determinado tema”*.

Nesta fase, além da literatura nacional sobre o tema, percorreremos também os periódicos e eventos internacionais. Preliminarmente fizemos um levantamento dos artigos publicados nos anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), identificando trabalhos que tratam de algum modo do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real. Alguns desses trabalhos abordam desde aspectos históricos da constituição das mesmas como disciplinas nos cursos universitários no Brasil até

questões relativas ao ensino e aprendizagem de tópicos específicos das mesmas – dentre os quais podemos citar Baroni e Otero-Garcia (2012), Lima e Silva (2012), Nasser e Sousa (2012), Guimarães, Miranda e Laudares (2012), Beltrão e Iglioni (2012) e Alves (2012).

Outros eventos de pesquisa de interesse são o Congress of European Society Research in Mathematics Education (CERME) e o International Congress on Mathematical Education (ICME). Contaremos também com as observações de colegas professores que lecionam as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real em nossa instituição de ensino superior.

Neste artigo destacaremos alguns resultados sobre essa temática apresentados na oitava edição do CERME. O objetivo é ter algum subsídio para fazer uma reflexão sobre os aspectos que os pesquisadores têm considerado relevantes em suas pesquisas.

O leitor encontrará este artigo dividido em três partes. A primeira parte versará sobre a constituição e estrutura do CERME. A segunda parte trata das tendências das publicações dos anais do CERME, na qual apresentamos uma breve descrição, no que tange os referenciais teóricos e metodológicos, das pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior apresentadas no evento. Finalizamos com uma breve reflexão a respeito destes estudos.

2. Sobre os CERMES

O *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* – CERME (Congresso da Sociedade Europeia para Pesquisa em Educação Matemática) realizou-se pela primeira vez em 1998 em Osnabruek, Alemanha, como um esforço dos pesquisadores desta área para promover maior comunicação, cooperação e colaboração, com relação às pesquisas, a fim de fortalecer os projetos existentes nas instituições europeias de ensino superior. O evento também tem por objetivo promover a inclusão de novos pesquisadores na comunidade científica. A segunda edição do evento ocorreu em 2001 na República Tcheca e a partir de então é realizado a cada dois anos.

O CERME 9, a edição mais recente, ocorreu neste ano de 2015 em Praga, República Tcheca. As edições anteriores foram: CERME 8, em Ankara, Turquia (2013), CERME 7, em Rzeszow, Polônia (2011), CERME 6, em Lyon, França (2009), CERME 5, em Larnaca, Chipre (2007), CERME 4, em Sant Feliu de Guixols, Espanha (2005), CERME 3, em Bellaria, Itália (2003) e CERME 2, em Marianske Lazne, República Tcheca (2001). A próxima edição, o CERME 10, ocorrerá em Dublin, Irlanda, de 1 a 5 de fevereiro de 2017.

De modo similar ao SIPEM brasileiro, o CERME é organizado de modo a priorizar o trabalho em linhas temáticas. Sendo assim, o CERME 8, cujos anais constituem o referencial teórico deste artigo, contou com 17 Grupos de Trabalho, a saber:

WG1: Argumentation and proof;

WG2: Arithmetic and number systems;

WG3: Algebraic thinking;

WG4: Geometrical thinking;

WG5: Stochastic thinking;

WG6: Applications and modelling;

WG7: Mathematical potential, creativity and talent,

WG8: Affect and mathematical thinking;

WG9: Mathematics and language;

WG10: Cultural diversity and Mathematics Education;

WG11: Comparative studies in Mathematics Education;

WG12: History in Mathematics Education;

WG13: Early Years Mathematics;

WG14: University mathematics education;

WG15: Technologies and resources in mathematics education;

WG16: Different theoretical perspectives / approaches in research in mathematics education e

WG17: From a study of teaching practices to issues in teacher education.

Evidentemente, o WG de interesse nesta pesquisa é o *WG14 University mathematics education*. O grupo foi criado no CERME 7, realizado em Rzeszow, Polônia, em 2011. O número de pesquisadores nesta área tem crescido nos últimos anos segundo os relatórios do WG14 das edições de 2011 e 2013, sendo que em 2013 foram selecionados 21 trabalhos para serem publicados nos anais.

A chamada para esta edição foi para trabalhos com contribuições nas seguintes temáticas: o raciocínio matemático e prova na matemática universitária; desafios para o ensino de matemática a nível universitário (incluindo as perspectivas dos professores universitários); o

papel das ferramentas de TIC (por exemplo, CAS) no ensino e aprendizagem da matemática universitária; questões de transição, para o nível universitário, relacionadas ao ensino de matemática, ou fora dela; novas abordagens para o ensino de Cálculo e Álgebra Linear; o ensino e a aprendizagem de tópicos avançados de matemática da universidade (além Cálculo e Álgebra Linear); desafios do ensino de matemática para estudantes em outros graus que não matemática; avaliação da aprendizagem e do ensino de matemática em nível universitário; e, abordagens teóricas para o estudo do ensino e da aprendizagem matemática universitária.

3. Tendências das Publicações dos Anais do CERME 8

Nardi, Biza, González-Martin, Gueudet e Winsløw (2013) relatam os trabalhos do WG 14 categorizando-os em quatro temas gerais: *Transições*; *Afeto*; *Práticas dos professores* e *Tópicos matemáticos*.

O tema *Transições* foi contemplado com três artigos, sendo que dois deles trataram da transição do ensino no nível secundário para o nível superior e propuseram abordagens que podem melhorar as experiências de aprendizagem dos alunos em seus primeiros semestres na universidade. O terceiro artigo discutiu a transição da experiência como estudante de matemática na universidade para a sua atuação como professor no ensino secundário, e analisou a natureza dos conhecimentos matemáticos nestas duas instituições. Visto que Cálculo Diferencial e Integral é um componente dos semestres iniciais de nossos cursos de Bacharelado em Matemática e de formação de professores apresentamos a seguir uma breve descrição destes trabalhos segundo o já mencionado relatório:

Hoffkamp, Schnieder e Paravicini (2013) destacaram a importância da enculturação dos alunos nos fundamentos da matemática e propuseram uma abordagem de ensino que se baseia nos aspectos filosóficos da epistemologia da matemática e introduz no primeiro ano dos estudantes universitários o raciocínio matemático, a argumentação e a prova.

Breen, O'Shea e Pfeiffer (2013) relataram um projeto em que aplicaram tarefas que eram desconhecidas para os estudantes com o objetivo de promover o entendimento conceitual e o desenvolvimento de habilidades de pensamento matemático. Os autores destacam que as tarefas foram benéficas no desenvolvimento da compreensão conceitual dos alunos e sugerem que as tarefas não familiares são úteis no processo de transição da matemática na escola para a matemática na universidade.

Finalmente, Winsløw (2013) centra-se na transição dos alunos da universidade (como

estudantes de matemática) para o ensino secundário (como professores de matemática). O artigo propõe um modelo teórico para a análise desta transição com base na Teoria Antropológica do Didático e analisa as mudanças do conhecimento matemático de uma pessoa em relação à posição que ocupa (aluno ou professor) dentro de uma instituição. O modelo é exemplificado no contexto institucional de um curso avançado no caso das potências e funções exponenciais.

Conjecturamos que uma reflexão neste sentido pode gerar conexões que contribua com a discussão sobre a definição de objetivos mais claros para o componente Análise Matemática nos cursos de formação de professores de Matemática tendo em vista o exposto em Baroni e Otero-Garcia (2012).

O tema *Afeto* foi contemplado com a contribuição de cinco trabalhos, que focaram nas seguintes questões sócio afetivas: percepções dos estudantes quanto a suas expectativas em relação aos estudos de matemática, seus interesses em estudos de matemática universitária, suas preferências quanto a formas de estudar e aprender matemática, as diferenças entre alunos iniciantes e experientes quanto a suas abordagens para o aprendizado de matemática e as percepções dos alunos sobre si mesmos como aprendizes capazes de matemática.

Cinco trabalhos do WG14 trataram da temática *Prática dos professores*, que, segundo os autores do relatório, tem crescido em quantidade de pesquisas. Os trabalhos desta categoria tratam das práticas e da formação dos professores de nível universitário. Foram agrupados nesta categoria Biza (2013), Nardi (2013), Jaworski (2013), Gueudet (2013) e Pinto (2013). Como nenhum desses trabalhos apresentou resultados que incidisse diretamente sobre o ensino e aprendizagem de conceitos de Cálculo ou Análise omitimos neste trabalho um comentário mais detalhado sobre os mesmos.

A temática de maior interesse segundo nossos objetivos é a de *Tópicos matemáticos*, pois seus trabalhos trataram em sua maioria de questões diretamente ligadas às questões orientadoras desta pesquisa, que inferem sobre ensino/aprendizagem dos conceitos abordados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Destacamos os trabalhos que apresentaram referenciais teóricos que potencialmente podem servir para formular proposições para superar as dificuldades com o ensino desses conceitos.

A teoria Antropológica na perspectiva de Chevallard e o conceito de contrato didático (a partir da teoria das situações didáticas de Brousseau) são articulados por González-

Martín (2013) para dar forma a suas regras para o ensino de séries infinitas. Schlarmann (2013) tratou sobre a compreensão conceitual em Álgebra Linear, especificamente sobre a reconstrução das estruturas mentais do conceito de base. Baseado no trabalho de Skemp, os pesquisadores Berman, Koichu e Shvartsman (2013) desenvolveram uma análise epistemológica relativa ao conceito de equivalência de matrizes. No artigo, os autores discutem o que significa "compreender" o conceito de relação de equivalência entre matrizes.

A aprendizagem do conceito de homomorfismo, por Hausberger (2013), que requer uma visão clara sobre o que é uma estrutura segundo a análise epistemológica realizada na pesquisa. Neste artigo o autor investiga as dificuldades envolvidas na compreensão do conceito homomorfismo e levanta a questão do desenvolvimento de estratégias de ensino com o objetivo de obter acesso ao pensamento estruturalista. A ênfase é colocada na análise epistemológica e na sua interação com a didática em uma tentativa de fazer a Álgebra abstrata mais acessível.

Alvarado Monroy e González Astudillo (2013) estudaram os processos de construção e reconstrução de definições precisas em Cálculo e importância deste aspecto na produção de provas. A pesquisa apresenta uma boa fundamentação teórica que infere sobre os processos de pensamento envolvidos nessas construções. Os resultados desse trabalho podem ter conexões com o trabalho de Lima e Silva (2012) que trata da trajetória da disciplina na Universidade de São Paulo quanto aos níveis de rigor e discute a abordagem que se deve dar a este componente.

Um tema abordado em três trabalhos desta categoria é a noção de *Conceito limiar* ("Threshold concept"), que inicialmente é problemático, requerendo uma compreensão informal e intuitiva, mas, cresce em abstração e generalidade com o tempo e tem o potencial de que com a sua compreensão o estudante venha a compreender toda a área em que o conceito insere-se. Sobre *threshold concept* uma das referências citadas foi o trabalho de Meyer e Land (2005).

Os trabalhos de Pettersson, Stadler e Tambour (2013) e de Viirman (2013) analisaram o desenvolvimento do conceito limiar de função no ensino superior. O referencial para a análise destes dois trabalhos foi a Teoria Comognitiva de Sfard, cuja ideia central é a de que a matemática é uma atividade discursiva ou que seus objetos são constituídos discursivamente, sendo o aprendizado relacionado à mudança no discurso individualizado. Pettersson, Stadler e Tambour (2013) analisaram as mudanças ocorridas nos discursos de alunos de um curso de graduação em Matemática a respeito do conceito limiar de funções no

decorrer de um período de dezoito meses. Viirman (2013) analisou três lições de cálculo em duas universidades diferentes, com foco nas oportunidades de aprendizagem a respeito do conceito de função oferecida pelas práticas discursivas dos professores.

O trabalho de Hyvärinen, Hästö e Vedenjuoku (2013) também trata do conceito de função, mais especificamente sobre a evolução do conceito de funções dos alunos e sua consciência dessa evolução. O artigo apresenta os resultados de um estudo longitudinal sobre o desenvolvimento do conceito de função de estudantes universitários do primeiro ano e de sua consciência deste desenvolvimento.

4. Considerações Finais

O objetivo deste trabalho é apontar tendências nos estudos referentes às dificuldades no ensino e aprendizagem dos conceitos fundamentais das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, comum aos cursos de graduação na área de Ciências Exatas, e Análise Real, específica do curso de Matemática. Encontramos alguns trabalhos relacionados a esta temática, particularmente, referindo-se ao conceito limiar de funções: Pettersson, Stadler e Tambour (2013), Viirman (2013) e Hyvärinen, Hästö e Vedenjuoku (2013). Destacamos a teoria Comognitiva de Sfard usada como referencial nos dois primeiros destes trabalhos.

O trabalho de Alvarado Monroy e González Astudillo (2013) sobre reconstrução de definições e suas referências pode ser estudado em conexão com a discussão de Lima e Silva (2012) a respeito do rigor que se deve empregar à disciplina inicial de Cálculo. A discussão sobre o papel da disciplina de Análise Real discutida em Baroni e Otero-Garcia (2012) também pode ser enriquecida se for levada em consideração a discussão sobre transição do egresso do curso de licenciatura em matemática para sua atuação como professor das escolas de nível fundamental e médio abordada por Winsløw (2013).

Referências

ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de licenciatura em Matemática. In: V SIPEM, 2012, Rio de Janeiro, Brasil. Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

BARONI, R.L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. Dois vieses para a disciplina de Análise em cursos de licenciatura em Matemática. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Rio de Janeiro. Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro: SBEM, 2012.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. O uso da modelagem e aplicações da matemática ensino de Cálculo em um curso superior de tecnologia. In: V SIPEM, 2012, Rio de Janeiro, Brasil. Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

BERMAN, A.; KOICHU, B.; SHVARTSMAN, L. The Understanding Understanding Equivalence of Matrices. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2396-2405). Ankara, Turquia, 2013.

BIZA, I. Teaching Statistics to Engineering Students: The Experience of a Newly Appointed Lecturer. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2306-2315). Ankara, Turquia, 2013.

BREEN, S.; O'SHEA, A.; PFEIFFER, K. The Use of Unfamiliar Tasks in First Year Calculus Courses to Aid the Transition from School to University Mathematics. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2316-2325). Ankara, Turquia, 2013.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; DA SILVA, R. **Metodologia Científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GONZÁLEZ-MARTIN, A. S. Students' Personal Relationship with Series of Real Numbers as a Consequence of Teaching Practices. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2326-2335). Ankara, Turquia, 2013.

GUEUDET, G. Digital Resources and Mathematics Teachers Professional Development at University. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2336-2345). Ankara, Turquia, 2013.

GUIMARAIS, Y. P. B. Q.; MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B. Utilização de sequência investigativa no ensino-aprendizagem de taxas de variação. In: V SIPEM, 2012, Rio de Janeiro,

Brasil. Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Rio de Janeiro, Brasil.

HYVÄRINEN, O.; HÄSTÖ, P.; VEDENJUOKSU, T. **Development and Awareness of Function Understanding in First Year University Students.** In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2366-2375). Ankara, Turquia, 2013.

HAUSBERGER, T. **On the Concept of (Homo)Morphism: A Key Notion in the learning of Abstract Algebra.** In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2346-2355). Ankara, Turquia, 2013.

HOFFKAMP, A.; SCHNIEDER, J.; PARAVICINI, W. **Mathematical Enculturation – Argumentation and Proof at the Transition from School to University.** In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2356-2365). Ankara, Turquia, 2013.

JAWORSKI, B. **Mathematical Meaning-Making and Its Relation to Design of Teaching.** In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2376-2385). Ankara, Turquia, 2013.

LIMA, G. L.; SILVA, B. A. **O ensino de Cálculo na graduação em Matemática: considerações baseadas no caso da USP.** In: V SIPEM , 2012, Rio de Janeiro, Brasil. Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

MEYER, J. H. F.; LAND, R. **Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning.** *Higher Education*, 49, 373-388, 2005.

MONROY, A. A.; ASTUDILLO, M. T. G. **Interactive Construction of a Definition.** In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2276-2285). Ankara, Turquia, 2013.

NASSER, L.; SOUSA, G. A. **Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?** In: V SIPEM , 2012, Rio de Janeiro, Brasil. Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

NARDI, E. **Shifts in Language, Culture and Paradigm: The Supervision and Teaching of Graduate Students in Mathematics Education.** In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2306-2315). Ankara, Turquia, 2013.

NARDI, E., BIZA, I., GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S., GUEUDET, G., WINSLØW, C. (2013). **WG14: University Mathematics Education**. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2270-2275). Ankara, Turquia, 2013.

PETTERSSON, K.; STADLER, E.; TAMBOUR, T. **Transformation of Students' Discourse on the Threshold Concept of Function**. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2316-2325). Ankara, Turquia, 2013.

PINTO, A. **Variability in University Mathematics Teaching: A Tale of Two Instructors**. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2316-2325). Ankara, Turquia, 2013.

SCHLARMANN, K. **Conceptual Understanding in Linear Algebra -Analysis of Mathematics Students' Mental Structures of the Concept 'Basis'-**. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2326-2335). Ankara, Turquia, 2013.

VIIRMAN, O., **What We Talk about When We Talk about Functions - Characteristics of the Function Concept in the Discursive Practices of Three University Teachers**. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2466-2475). Ankara, Turquia, 2013.

WINSLØW, C. **The Transition from University to High School and the Case of Exponential Functions**. In CERME 8, 2013, *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME8)*. (pp. 2376-2385). Ankara, Turquia, 2013.

