

Introdução

Os conceitos de função inversa e função composta podem ser trabalhados em conjunto, numa abordagem que apresente as relações existentes entre esses dois tipos de função. Esses objetos matemáticos são abordados no 1º ano do Ensino Médio, e voltam a ser tratados no 3º ano e em alguns cursos do Ensino Superior. A relação entre esses dois tipos de função é condição necessária para determinar se uma função é inversível ou não. Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a função g será inversa de f se, e somente se, $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$. Analisando o aspecto gráfico, se a função f é inversível, então o gráfico de sua inversa g deve ser simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Dada a intenção de verificar como esses objetos matemáticos são abordados no primeiro ano do Ensino Médio, e se tal abordagem é utilizada, buscou-se analisar o tipo de abordagem presente nos livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático de 2015 – PNLD 2015 Ensino Médio.

O livro didático é um importante instrumento de trabalho para o professor e de estudo para o aluno. Documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), expõem a importância deles em sala de aula e para o processo de ensino, enfatizando a necessidade de prudência ao utilizá-los. Levando isso em consideração, foi implantado o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, que avalia os livros didáticos distribuídos pelo Ministério da Educação para as escolas públicas. Nessas condições, o Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015 Ensino Médio destaca a importância da escolha do livro didático pelo professor, de forma que esteja de acordo com o projeto político-pedagógico da escola.

Além dos documentos oficiais, há pesquisas que discutem o uso do livro didático para o ensino. Dentre elas, destacamos Trentin (2006), para quem o livro didático “... ocupa uma posição de destaque na prática social de um professor de Matemática.” (TRENTIN, 2006, p. 150). Por apresentarmos uma visão combinada com esse pesquisador em relação aos livros didáticos, neste artigo temos por objetivo analisar como as seis obras aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático de 2015 – PNLD 2015 Ensino Médio – tratam de função inversa e função composta, levantando os principais registros de representações semióticas presentes nos exercícios resolvidos e propostos, de acordo com a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1995, 2006, 2011). Será analisado, também, se as coleções sugerem o uso de recursos tecnológicos no ensino desses objetos matemáticos.

Fundamentação Teórica

O presente estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2006, 2011). Este pesquisador expõe que, dado o caráter abstrato da Matemática, para o estudante apreender um objeto matemático, é imprescindível que sua exibição aconteça por meio de várias representações semióticas, por exemplo, as representações gráfica, algébrica, figural e da língua natural.

Duval (2006) apresenta um modelo cognitivo que define registro de representação semiótica como um sistema semiótico que deve permitir três atividades cognitivas associadas às representações: formação, tratamento e conversão.

A *formação* de uma representação está associada às regras próprias do registro semiótico no qual a representação é produzida. O *tratamento* é a transformação de uma representação em outra no interior do mesmo registro semiótico. Por exemplo, considerando uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 3$, para determinar a função inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, são realizados vários tratamentos no registro algébrico, conforme exemplificado a seguir:

$$f(g(x)) = x \Rightarrow 2g(x) - 3 = x \Rightarrow 2g(x) = x + 3 \Rightarrow g(x) = \frac{x+3}{2}$$

A *conversão* é a transformação de uma representação em outra que pertence a um registro distinto do de partida. A determinação da representação gráfica de uma função partindo de sua representação algébrica é um exemplo de conversão.

Duval (2011) classifica os registros em quatro grupos segundo sua funcionalidade e discursividade. Os registros que admitem tratamentos algoritmizáveis são classificados como monofuncionais e são próprios da Matemática; os registros que não admitem esse tipo de tratamento são classificados como multifuncionais. Se os registros permitem discurso, eles são classificados como discursivos; os que não permitem o discurso são classificados como não discursivos. De acordo com essa classificação, o registro algébrico é monofuncional discursivo, o gráfico é monofuncional não discursivo, a língua natural, multifuncional discursivo e o figural multifuncional não discursivo.

Duval (2011) destaca que o uso de ferramentas computacionais no ensino de Matemática colabora para o desenvolvimento do pensamento matemático, especialmente pelo poder de visualização que elas oferecem, pela rapidez nos tratamentos e pela possibilidade de manipulação das representações.

Procedimentos Metodológicos

Nesta pesquisa, de caráter documental, analisamos as seis coleções de livros didáticos de Matemática aprovados no último PNLD do Ensino Médio (PNLD 2015) e apresentados no Guia de Livros Didáticos PNLD 2015 Ensino Médio – Matemática. Escolhemos esses livros por fazerem parte de um programa nacional que visa à distribuição de livros para alunos de escolas públicas de todo país. Em cada coleção, foi analisado o volume referente ao 1º ano do Ensino Médio, pois é nele que funções inversa e composta são apresentadas ao aluno pela primeira vez em sua escolaridade.

Para a análise dos livros didáticos, elencamos alguns critérios que nos nortearão. Pretendemos verificar no Sumário de cada coleção se há referência a funções inversa e composta; verificar se a coleção apresenta definição para essas funções e como elas são apresentadas; se há relação entre funções inversa e composta; se há sugestão para uso de algum recurso computacional para discussão de conteúdos de função em geral, ou para funções inversa e composta em particular; os tipos de registros usados nos exercícios resolvidos e propostos e se são feitos tratamentos e conversões desses registros.

Realizamos a análise dos seis livros de primeiro ano, e percebemos que dois deles não tratam de função composta e usam apenas um método algébrico para determinar uma função inversa; um deles apresenta a relação entre as funções composta e inversa; e três livros tratam de ambos os tipos de função, porém não as relacionam. Dessa forma, para este artigo, escolhemos um livro de cada um desses grupos para apresentação.

No Quadro 1 apresentamos os livros didáticos analisados neste artigo.

Designação	Coleção
Livro-1	DANTE, L. R. <i>MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES</i> , 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.
Livro-2	PAIVA, M. R. <i>MATEMÁTICA – PAIVA</i> , 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.
Livro-3	SMOLE, K. C. S.; DINIZ M. I. S. V. <i>MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO</i> , 8 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

Quadro 1: Livros do Programa Nacional do Livro Didático de 2015 analisados

Análise dos Livros Didáticos

As coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático de 2015 apresentam conteúdos relativos a Funções, que são dispostos em capítulos ou unidades.

No Livro-1, o conceito de Função é introduzido no segundo capítulo do livro. A função

composta não é apresentada no sumário e não é tratada como um conteúdo. A função inversa é apresentada em uma divisão de um subcapítulo.

Antes de apresentar função logarítmica, há um exemplo em que se associa a medida do perímetro de um quadrado à medida de seu lado, e conclui-se que uma função é a inversa da outra. Em seguida, é apresentada uma definição de função inversa: "Dada uma função $f: A \rightarrow B$, bijetiva, denomina-se **função inversa** de f a função $g: B \rightarrow A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $x \in A$ e $y \in B$." (DANTE, 2013, p.187). Em seguida, apresenta-se outra definição de função inversa, agora relacionada à composição de funções "A função $g: B \rightarrow A$ é a inversa da função $f: A \rightarrow B$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$." (DANTE, 2013, p.187) como na Figura 1. Apesar de utilizar as representações $g(f(x))$ e $f(g(y))$, em nenhum momento se apresenta o conceito de função composta. Sendo assim, entendemos que a compreensão de função inversa fica comprometida.

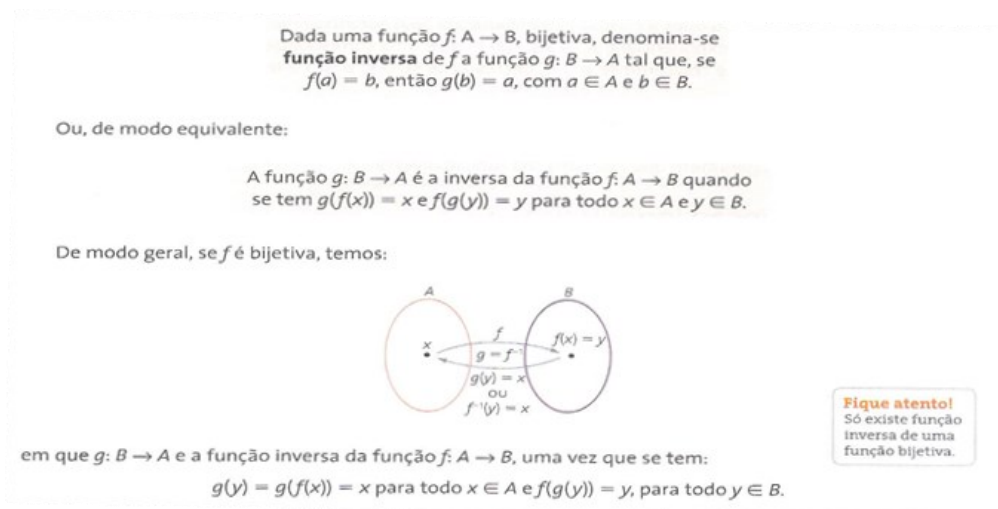


Figura 1: Uso da representação de função composta
Fonte: DANTE, 2013, p. 187

É apresentado em seguida um exemplo de uma função e sua inversa, envolvendo o conceito de função composta, por meio de tratamentos no registro algébrico, considerando que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tem como função inversa a função $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(y) = \sqrt{y}$. As representações dessas funções só são apresentadas nos registros numérico tabular e gráfico, ambas no mesmo plano cartesiano, conforme se pode observar na Figura 2.

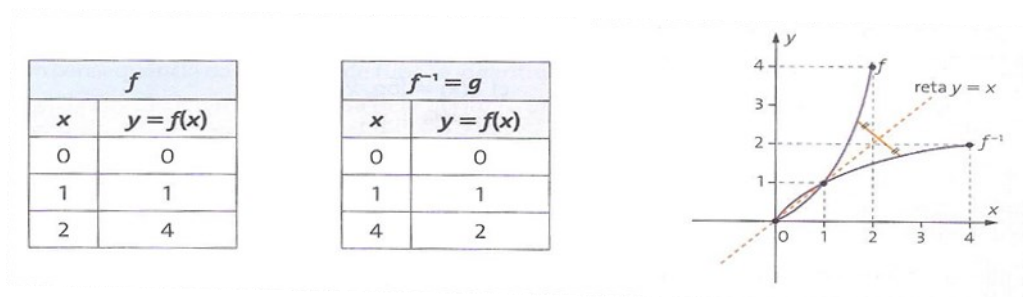


Figura 2: Representação numérico tabular e gráfica de uma função inversa
Fonte: DANTE, 2013, p. 187

Nesse exemplo, informa-se que os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, e que é possível demonstrar essa afirmação. Apesar disso, ele não apresenta essa prova, apenas afirma no box *Fique Atento!* que “ (a,b) e (b,a) são pontos simétricos em relação à reta $y = x$.” (DANTE, 2013, p.187).

No Livro-1 não há exercícios resolvidos ou propostos tratando exclusivamente de funções inversas. São apresentados dois exemplos no registro gráfico abordando a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, ressaltando que as representações gráficas são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Em seguida, são expostos dois exercícios propostos; no primeiro apresentam-se no registro algébrico as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$, e solicita-se convertê-las para o registro gráfico no mesmo plano cartesiano, mas sem requerer uma análise neste último registro. No segundo exercício, oferecem-se no registro algébrico as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, e solicita-se mostrar que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$, ambos envolvendo um tratamento no registro algébrico. A resolução desse exercício pelo aluno pode ficar comprometida, dado que a função composta não é discutida no Livro-1.

Com relação ao uso de recursos computacionais, no Livro-1 sugere-se, na seção *Matemática e tecnologia*, a utilização do software *Geogebra* para conferir as relações existentes entre as coordenadas dos gráficos das funções logarítmica e exponencial num mesmo plano cartesiano. Essa verificação é feita com a construção dos gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$ e, em seguida, é notado que os pontos de coordenadas (a,b) em uma função têm coordenadas (b,a) na outra.

Considerando esta análise, no Livro-1 nota-se uma abordagem precária das funções inversa e composta. A função composta surge apenas como amparo para a definição da função inversa, e esta é tratada somente como relação entre as funções logarítmica e exponencial. O software *Geogebra* é utilizado somente para visualização.

No Livro-2, inicia-se o estudo das funções inversas apresentando um exemplo de uma função discreta, dado na língua natural, e envolvendo uma conversão para o registro gráfico. É feita uma análise de valores do domínio e da imagem, e conclui-se que uma função é inversa da outra. Em seguida, apresentam-se dois diagramas relacionados ao exemplo inicial, conforme é possível observar na Figura 3.

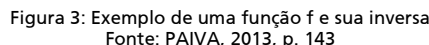


Figura 4: Diagrama de definição da função inversa
Fonte: PAIVA, 2013, p. 144

Para obter a inversa de uma função, no Livro-2 discute-se um exemplo em que se expressa o gasto em um curso em função da quantidade de meses (Figura 5).

Obtendo a inversa de uma função

No exemplo introdutório da página 143, o estudante pagou R\$ 100,00 de matrícula mais R\$ 200,00 de mensalidade. Indicando por V o valor acumulado em real pago no curso e por t o tempo em mês, temos:

$$V = 100 + 200 \cdot t$$

Essa equação expressa V em função de t e, portanto, corresponde ao gráfico 1 do exemplo introdutório. Se quisermos a equação da função inversa, representada pelo gráfico 2, que expressa o tempo t em função do valor V , bastará isolar a variável t na equação $V = 100 + 200 \cdot t$. Assim:

$$t = \frac{V - 100}{200}$$

Figura 5: Algoritmo para obter uma função inversa
Fonte: PAIVA, 2013, p. 144

Um importante fator a ser considerado ao trabalhar com funções inversas é a necessidade de se analisar domínio e imagem da função dada para verificar possíveis restrições no domínio da função inversa. Ao substituir uma variável pela outra, essa análise pode não ser levada em consideração, e a função

A próxima subdivisão do Livro-3 trata de função inversa, e apresenta na introdução um esquema referente a esse tipo de função (Figura 7).

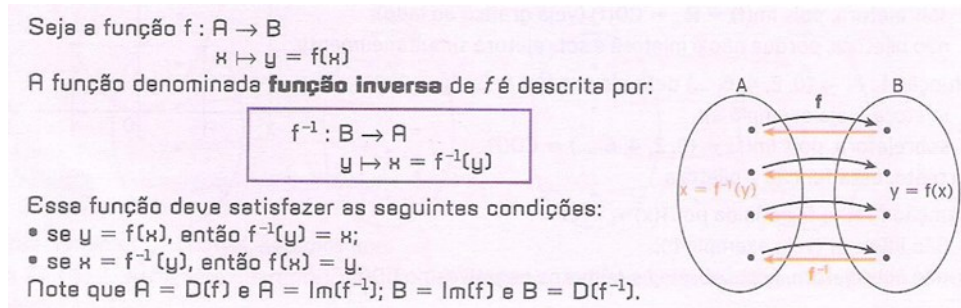


Figura 7: Definição de função inversa
 Fonte: SMOLE e DINIZ, 2013, p. 212

É apresentado a seguir um exemplo que envolve duas funções no registro algébrico e seus respectivos diagramas, nos quais existe uma relação entre as duas funções, sendo uma inversa da outra. Destaca-se ainda que toda função deve ser bijetora para possuir uma inversa.

No primeiro exercício resolvido há um algoritmo para determinar a inversa de uma função apresentada nos registros algébrico e gráfico, e apresenta as relações existentes das funções no registro gráfico em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, como apresentamos na Figura 8.

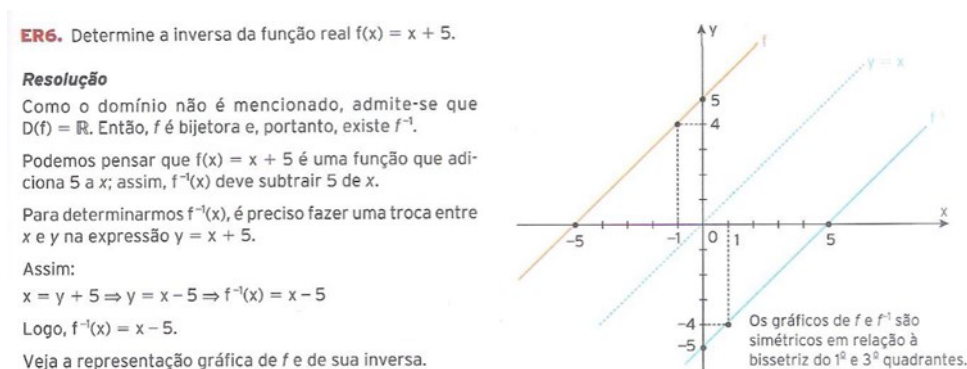


Figura 8: Algoritmo para determinar uma função inversa e sua representação no registro gráfico
 Fonte: SMOLE e DINIZ, 2013, p. 212

O segundo exercício resolvido apresenta tratamento no registro algébrico, enquanto no terceiro pede-se uma conversão entre os registros algébrico e gráfico de sua inversa, e o ponto de intersecção entre as duas funções.

Dos cinco exercícios propostos, todos apresentam o registro algébrico no enunciado, e um também é dado na língua natural. Deles, dois solicitam conversão do registro algébrico para o gráfico, e os demais envolvem tratamentos. Dessa forma, percebe-se que não há riqueza em tratamentos e conversões. Os tratamentos são muito evidenciados, porém somente

algébrico (que foi inserido no software utilizado) e gráfico. Os livros analisados não apresentam atividades que necessitem de uma análise das transformações de tratamento e de conversão com o emprego de recursos computacionais envolvendo as funções inversa e composta, o que, segundo Duval (2011), poderia potencializar a apreensão desses objetos matemáticos pelo aluno.

Conjecturamos que a apresentação da função inversa por meio da relação entre ela e a composta, envolvendo as transformações de tratamento e conversão entre diferentes registros possa contribuir para a apreensão pelos alunos desses objetos matemáticos, o que é o foco de nossos encaminhamentos de pesquisa.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: Matemática** / Brasília, 2014. 108p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p.

DANTE, L. R. **MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES**, 2 ed. Volume 1. São Paulo: Ática, 2013.

DUVAL, R. A cognitive analysys of problems of comprehension in a learnig of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, n. 61, p. 103-131, 2006.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas**. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

PAIVA, M. R. **MATEMÁTICA – PAIVA**, 2 ed. Volume 1. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ M. I. S. V. **MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO**, 8 ed. Volume 1. São Paulo: Saraiva, 2013.

TRENTIN, P. H. **O Livro Didático na Constituição da Prática Social do Professor de Matemática**. São Paulo, 2006, 174f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto-Sensu em Educação, Linha de Pesquisa: Matemática, Cultura e Práticas Pedagógicas, Universidade São Francisco – USF, Itatiba – São Paulo, 2006.