TEORIA DOS JOGOS PARA O ENSINO MÉDIO

Luiz Cláudio Alves de Carvalho[1]

GD 3 – Educação Matemática no Ensino Médio.

Resumo: Esse artigo escreve o início da proposta de um trabalho de mestrado a respeito da introdução da Teoria dos Jogos para alunos do Ensino Médio, tópico esse que não faz parte do currículo da Educação Básica. No primeiro momento da pesquisa o mestrando estudará o assunto de forma teórica, apresentada por diversos autores, mas com enfoque nas contribuições de Nash para a Teoria de Jogos. Em um segundo momento preparará um material que adapte a teoria estudada para a linguagem de alunos do Ensino Médio e seus conhecimentos prévios e construirá uma sequência didática e atividades para trabalhar tal conteúdo em sala de aula. A turma que fará parte dessa pesquisa cursa o segundo ano do ensino médio e o autor é seu professor de matemática. Ao apresentar o conteúdo da Teoria dos Jogos aos alunos envolvidos nessa pesquisa, estes já terão trabalhado ao longo do ano os conteúdos de probabilidade e matrizes e irão aplicar esse conhecimento; além de conhecer um novo ramo da matemática que contribui para desenvolver estratégias de tomadas de decisão em jogos ou organizações que envolvam dois ou mais participantes.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Equilíbrio de Nash. Estratégias. Ensino Médio.

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos nos oferece alguns modelos matemáticos que propiciam o conhecimento da lógica existente em algumas relações entre dois ou mais entes (pessoas, organizações, nações, etc) possibilitando a tomada de decisões de forma racional de modo a se obter maior ganho ou menor perda para um ou mais entes participantes desta relação.

Estas relações estão presentes na vida de qualquer pessoa, ou seja, cada pessoa em determinado instante de sua vida se vê diante de uma situação de competição ou de conflito em que será necessária a tomada de uma decisão. Diante deste fato, podemos considerar a importância de se estar mais preparado para fazer as escolhas mais adequadas a cada situação que se apresente.

Seguindo este raciocínio, trazemos aqui a proposta de uma experiência a se desenvolver com os alunos do segundo ano do ensino médio, apresentando-lhes a Teoria dos Jogos, com um enfoque no Equilíbrio de Nash, em uma linguagem e abordagem adequadas à faixa etária em foco. A escolha da aplicação desta experiência a alunos do segundo ano do ensino médio se deve ao fato de haverem estudado conteúdos da matemática que os

[1] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG; PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional; lcacarv@gmail.com; orientadora: Valéria Guimarães Moreira.

permitem ter uma maior compreensão da Teoria dos Jogos, sendo estes, probabilidade e matrizes.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Breve História da Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos apresentou pouca relevância no início de seu desenvolvimento, apesar de lidar com o pensamento estratégico que é de grande importância em situações de conflito ou mesmo em relações estratégicas cooperativas, não necessariamente conflituosas. Podemos exemplificar estas relações citando as situações: uma guerra, uma concorrência empresarial ou política, e podemos ainda estender para questões do dia a dia, como nos relacioментos pessoais: na relação de um casal, na relação entre professor e alunos ou na relação entre patrão e funcionário, entre outras.

Podemos citar alguns nomes, como Nicolas Bernoulli, James Waldegrave, Augustin Cournot, Ernest Zermelo e Emile Boret, de matemáticos que trouxeram contribuições para o desenvolvimento da Teoria dos Jogos.

Figura 1: Jonh von Neumann (1903-1957)

Fonte: Disponível em: https://en.m.wikiquote.org/wiki/File:HD.3F.191_(11239892036).jpg. Acesso em: 15 ago 2019.

O trabalho do húngaro John von Neumann (1903 - 1957) dentro da Teoria dos Jogos, deu à mesma uma maior importância. O matemático, Neumann, tinha um interesse especial pela área da economia e este interesse e seus estudos sobre decisões estratégicas, o levaram a publicar, em parceria com o economista, Oskar Morgenstern (1902 – 1977), o clássico da economia "The Theory of Games and Economic Behaviour". À partir de então, a Teoria dos Jogos ganhou maior relevância entre os economistas e entre os matemáticos.

Outro grande matemático e que trouxe importantes descobertas em Teoria dos Jogos foi John Forbes Nash Junior (1928 – 2015). Este matemático, por sua genialidade e por sua luta pessoal, teve sua vida registrada por Sylvia Nasar em uma bibliografia, Uma Mente Brilhante, que por sua vez foi adaptado de forma romanceada para as telas. Em seus estudos de mestrado, Nash desenvolveu o tema do equilíbrio na Teoria dos Jogos, tema abordado anteriormente por Cournot. A contribuição de Nash em Teoria dos Jogos e sua aplicabilidade em economia foram reconhecidos e o deram o Prêmio Nobel de Economia em 1944, junto com Reinhard Selten.

Figura 2: John Forbes Nash Junior (1928 – 2015)

Fonte: Disponível em: https://www.nature.com/articles/522420a. Acesso em: 15 ago 2019.

Atualmente a Teoria dos Jogos ainda se atém aos matemáticos, enquanto teoria pura, mas já encontra visibilidade em economia, relações internacionais, ciências sociais e biologia.

A Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos apresenta um modelo matemático que trata de escolhas ótimas de estratégias em situações em que haja duas ou mais pessoas e/ou instituições em uma situação de disputa ou conflito.

Exemplos de situações em que a Teoria dos Jogos está presente são: empresas concorrentes que oferecem o mesmo tipo de produto ou serviço, planejamento de estratégias de guerra entre exércitos inimigos, entre outras.

A situação de disputa ou conflito em questão é o que definiremos como jogo e os jogadores são as entidades (pessoas, instituições, exércitos, ...) que se encontram na mesma.

Os elementos de um jogo são:

- os jogadores,
- um conjunto de estratégias para cada jogador,
- as recompensas de cada jogador, chamadas payoffs.

Chamemos o conjunto finito dos jogadores, J = $\{j_1, j_2, ..., j_n\}$, em que cada um de seus n elementos é um jogador: $j_1, j_2, ..., j_n$.

Cada jogador j_i, $1 \leq i \leq n$, do conjunto de jogadores, J, possui um conjunto finito de estratégias puras, $E_i = \{ e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$, em que e_{ik} é a k-ésima estratégia pura do i-ésimo jogador, com $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq i \leq n$.

O produto cartesiano entre todos os conjuntos E_i, $1 \leq i \leq n$, é denominado espaço de estratégia pura do jogo, E, ou seja, $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Cada elemento, v, de E é um vetor da forma $v = (e_{1k1}, e_{2k2}, ..., e_{nkn})$, em que e_{tkt} representa uma das estratégias em que o jogador t pode escolher.

Cada vetor v de E está associado a um ganho ou uma perda para cada um dos jogadores. Este ganho ou esta perda é denominado de payoff e a relação entre v e o payoff é chamada função utilidade.

Exemplos de situações-problema clássicos da Teoria dos Jogos

Exemplo 1: O Dilema do Prisioneiro.

Talvez este seja o exemplo mais conhecido da teria dos jogos e é encontrado em muitas das referências sobre o assunto.

Este problema foi elaborado por Albert W. Tucker, para mostrar a dificuldade de tomar decisões em alguns tipos de relação. Ele apresentou este problema em um seminário para psicólogos em 1950, na Universidade de Standford. (SARTINI; GARBUGIO; BORTOLOSSI; SANTOS; BARRETO, 2004)

O dilema do prisioneiro, baseado em SARTINI; GARBUGIO; BORTOLOSSI; SANTOS e BARRETO:

Duas pessoas, P e Q, são detidas, acusadas de cometerem um mesmo crime. Os acusados são mantidos em locais separados, sem que possam manter algum tipo de comunicação.

O delegado responsável pela investigação do crime faz, separadamente, para cada um dos acusados a seguinte proposta:

Se você confessar e a outra pessoa confessar, vocês ficam detidos por 6 anos cada um.

Se você confessar e a outra pessoa negar, você fica livre e a outra pessoa fica detida por 15 anos.

Se você negar e a outra pessoa confessar, você fica detido por 15 anos e ela fica livre.

Se você negar e a outra pessoa negar, vocês ficam detidos por 2 anos cada um.

Para este contexto, teremos:

J = {P, Q}; j_1 = P, j_2 = Q.

E_1 = {confessar, negar}; e_{11} = confessar, e_{12} = negar.

E_2 = {confessar, negar}; e_{21} = confessar, e_{22} = negar.

E = {(confessar, confessar), (confessar, negar), (negar, confessar), (negar, negar)}

O conjunto E é denominado espaço de estratégia e cada um de seus elementos é um vetor v = (e_{1k1}, e_{2k2}), em que e_{1k1} é um elemento de E_1 e e_{2k2} é um elemento de E_2.

Cada vetor v de E está associado a um ganho ou uma perda para cada um dos jogadores.

- Payoff´s para o jogador P:

u_P (confessar, confessar) = - 6

u_P (confessar, negar) = 0

u_P (negar, confessar) = - 15

u_P (negar, negar) = - 2

- Payoff´s para o jogador Q:

u_Q (confessar, confessar) = - 6

u_Q (confessar, negar) = - 15

u_Q (negar, confessar) = 0

u_Q (negar, negar) = - 2

Para deixar mais claro, podemos colocar os dados em uma matriz de payoff's:

		Q	
		Confessar	Negar
P	Confessar	(-6, -6)	(0, -15)
	Negar	(-15, 0)	(-2, -2)

Podemos ter a matriz de payoff's de P:

		Q	
		Confessar	Negar
P	Confessar	-6	0
	Negar	-15	-2

Podemos ter a matriz de payoff's de Q:

		Q	
		Confessar	Negar
P	Confessar	-6	-15
	Negar	0	-2

A função utilidade do vetor (confessar, negar), pode ser representada por:

u_P(confessar, negar) = 0

u_Q(confessar, negar) = -15

Observando a tabela de payoff's de P, percebemos que, independentemente da escolha de Q, ele fica menos tempo preso se confessar. Dizemos que confessar é uma estratégia dominante para P.

O mesmo acontece na tabela de payoff's de Q.

Logo, acontece um ponto de equilíbrio quando ambos confessam.

Exemplo 2: Quando os fracos têm vez. (CASTRO; MENDES; SILEIRA, 2011)

Este problema envolve um truelo e apareceu na edição 11 da revista Cálculo. Desde 1944 a Teoria dos Jogos em Truelos é estudada, ou seja, uma disputa entre três pessoas.

O problema considera um truelo em que os envolvidos apresentam níveis distintos de competência ou de capacidade. No artigo citado, ele dá um exemplo em que tem um truelo de pistola. As probabilidades de acerto dos envolvidos são 90%, 50% e 33%, e existe um combinado entre os duelistas de que, o primeiro a atirar é o que possui menor capacidade de acerto, seguido pelo de capacidade mediana e terminando com o de maior capacidade. Esta sequência se repete, até reste apenas uma pessoa.

A pergunta proposta na revista é: Existe alguma estratégia que o duelista mais fraco pode utilizar para aumentar a sua chance de sobreviver?

São analisadas as três opções iniciais que fraco tem na sua vez de atirar:

- Fraco atira em mediano e, se acertar vira alvo de ótimo e sua chance de viver é de 10%.
- Fraco atira em ótimo e, se acertar vira alvo de mediano e sua chance de viver é de 50%.
- Fraco atira para o alto e deixa mediano e ótimo na disputa até que estejam mortos ou fracos demais para terem uma grande chance de acerto.

Para este jogo temos:

J = {fraco, mediano, ótimo}

E1 = {atira para cima ou está morto, atira em mediano, atira em ótimo} – estratégias possíveis para o jogador 1, o fraco.

E2 = {atira em fraco, atira para cima ou está morto, atira em ótimo} – estratégias possíveis para o jogador 2, o mediano.

E3 = {atira em fraco, atira em mediano, atira para cima ou está morto} – estratégias possíveis para o jogador 3, o ótimo.

As estratégias $e_{11} = e_{22} = e_{33}$ = atira para cima ou está morto, leva em consideração o fato de que, em qualquer uma das duas hipóteses, o jogador em questão não atira em nenhum dos outros.

A conclusão é de que, a melhor estratégia para o duelista menos capaz, é atirar para cima até que os outros duelistas se destruam ou diminuam a sua capacidade de acertar um tiro, aumentando a chance de sobrevivência do mais fraco.

METODOLOGIA DE PESQUISA

Para apresentar adequadamente a Teoria os Jogos aos alunos do Ensino Médio, escolhemos uma turma do Segundo Ano do Ensino Médio, que estudará neste ano de 2019, os conteúdos de probabilidade e de matrizes, pois acreditamos que com esse conhecimento prévio eles estarão mais bem preparados para conhecerem a teoria estudada nesta pesquisa, mesmo que de forma adequada à sua faixa etária.

A turma do Segundo Ano do Ensino Médio escolhida pertence à Escola Estadual Geraldina Ana Gomes, na região de Venda Nova, em Belo Horizonte, Minas Gerais. O aluno de mestrado, autor deste trabalho, é professor de matemática dessa turma e desenvolverá o trabalho proposto durante suas aulas, por isso a escolha dessa turma. O autor da pesquisa tem autorização da escola e dos responsáveis de cada um dos alunos para conduzir a pesquisa.

A apresentação da Teoria dos Jogos para essa turma do ensino médio ocorrerá segundo as seguintes etapas:

1. Apresentação do filme "Uma Mente Brilhante", que apresenta, de uma forma romanceada, a biografia do matemático John Forbes Nash Júnior, e apresenta em seu decorrer algumas idéias da Teoria dos Jogos e do Equilíbrio de Nash – 200min.

2. Discussão sobre o filme, destacando as partes que fazem uma abordagem relevante para o tema apresentado, dando ênfase ao Equilíbrio de Nash – 50min.
3. Apresentação do tema conceituando jogos, seus tipos e seus elementos, de forma adequada para a faixa etária e o conhecimento prévio dos alunos envolvidos – 50min.
4. Abordagem de exemplos importantes dentro da teoria – 50min.
5. Atividades diversificadas para discutir a teoria apresentada com os alunos – 50min.
6. Apresentação e discussão das atividades propostas realizadas. Conclusão do trabalho com os alunos através da reflexão acerca de um texto que aborda o Equilíbrio de Nash entre dois vendedores em uma praia (NOGUEIRA, 2009) – 50min.

TEORIA DOS JOGOS PARA O ENSINO MÉDIO

Este trabalho de mestrado se iniciou neste ano de 2019 e está em andamento. Foi feito um estudo da parte teórica e um esboço do que será este trabalho com os alunos do ensino médio. Mas a montagem das atividades ainda está em andamento, sendo o propósito do autor, terminar de elaborará-las e aplicá-las antes do XXIII EBRAPEM, onde poderá apresentá-las em seu grupo de discussão.

CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Concluimos este artigo com a expectativa de que esta pesquisa traga contribuições para a Educação Básica, exigência essa colocada para as dissertações no programa de mestrado do PROFMAT, no qual esse trabalho se desenvolve. Acreditamos que os alunos que tiverem com a Teoria dos Jogos no Ensino Médio estarão mais capacitados em analisar situações importantes de conflito e buscar o que seria a melhor estratégia de tomada de decisão.

REFERÊNCIAS

BARRETO, L. S.; BORTOLOSSI, H. J.; GARBUGIO, G.; SANTOS, P. A.; SARTINI, B. A. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. BIENAL DA SBM, 2., 2004. Universidade Federal da Bahia. Disponível em :< www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 15 de agosto de 2019.

CASTRO, F.; MENDES, R.; SILVEIRA, E. Desafio: Probabilidades/Teoria dos Jogos/Negócios. **Revista Cálculo, matemática para todos**. São Paulo/SP, n. 11, p. 51, dez. 2011.

MENDES, R. A Teoria dos Jogos é perfeita para o dia a dia. **Revista Cálculo, matemática para todos**. São Paulo/SP, n. 13, p. 52-57, fev. 2012.

NOGUEIRA, F. M. A. **Modelagem e Simulação - Teoria dos Jogos**. Disponível em:< www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/jogos.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2019.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos**: com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

BÊRNI, Duilio de A.; FERNANDEZ, Brena P. M. **Teoria dos Jogos**: crenças, desejos, escolhas. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.