O USO DO GEOGEBRA NA INVESTIGAÇÃO DO PENSAMENTO DIFERENCIAL DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Ana Rita Domingues[1]

GD 6 – Educação Matemática, Tecnologias e Educação à Distância

Resumo: O artigo apresenta uma pesquisa de Mestrado em andamento que busca investigar a natureza do pensamento diferencial de alunos do ensino médio através do desenvolvimento e exploração de tarefas durante algumas sessões de experimento de ensino. Será apresentada neste texto uma atividade semiaberta que aborda o cálculo de área com tecnologia digital e apresenta certo cuidado com a relação pessoa participante-GeoGebra, assumindo aspectos tutoriais de construção em determinados momentos. Por se tratar de uma pesquisa de natureza qualitativa, as tarefas poderão sofrer adequações qualitativas e investigativas entre a realização das sessões.

Palavras-chave: Educação Matemática. Tecnologia Digital. Geometria Dinâmica.

INTRODUÇÃO

O cálculo é menos estático e mais dinâmico, por isso estuda-lo é essencialmente diferente da matemática que costuma ser vista na educação básica. Ele aborda variação e movimento, assim como quantidades que tendem a outras quantidades (STEWART, 2011). Por essa razão, introduzi-lo aos alunos do ensino médio é criar uma possibilidade para a investigação da natureza do pensamento diferencial.

Temos o entendimento de que investigar algo é procurar conhecer o que não se sabe, usando diferentes estratégias de abordagem. Investigar objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos é identificar suas propriedades e descobrir relações, perpassando pelas etapas: reconhecimento da situação, exploração e inquietações iniciais; formulação de conjecturas; realização de testes e refinamento de conjecturas; demonstração e avaliação do trabalho (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Durante uma investigação matemática, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática, por ser um importante processo de formação de imagens que possibilita a inserção das representações dos objetos matemáticos para que se possa pensar matematicamente (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). A

[1] Universidade Estadual Paulista - UNESP; Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos (Interunidades); Educação Matemática; ana.rita.domingues2@gmail.com; orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.

visualização no estudo da matemática traz consigo o sentimento de beleza, harmonia e elegância. Os elementos matemáticos, quando dispostos harmoniosamente, se tornam, simultaneamente, uma satisfação para as necessidades estéticas do ser humano e um auxílio para a mente que a sustenta e guia (POINCARÉ, 1996), levando o indivíduo à formulação de conjecturas e verificação das mesmas.

Essa dinamização e visualização mencionada até o momento se faz presente em geometria dinâmica, que oferece possibilidade de uso, manuseio, combinação, visualização e construção virtual de objetos geométricos, permitindo que novos caminhos de investigação sejam traçados. O *software* GeoGebra, por integrar geometria dinâmica e múltiplas representações de funções, proporciona cenários inovadores de investigação matemática, por isso, desde o seu lançamento tem sido fortemente usado e explorado por professores e pesquisadores de modo didático-pedagógico e acadêmico no ensino e aprendizagem de Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

É no contexto de investigação e exploração dinâmica com tecnologia digital para o desenvolvimento do pensamento diferencial que se apresenta neste artigo reflexões e propostas de uma pesquisa de Mestrado em andamento.

TECNOLOGIAS DIGITAIS: O GEOGEBRA

As tecnologias digitais estão em constante desenvolvimento e inserção na sociedade, transformando as relações e a forma de pensar e agir do ser humano. Todo esse progresso parte da necessidade e instiga para solucionar problemas relacionados às mais variadas situações. Pensando em Educação Matemática, essas tecnologias oferecem um cenário alternativo para a educação, por isso parte das pesquisas desenvolvidas no Brasil nas últimas décadas apresentam, em diferentes contextos, reflexões quanto ao seu uso didático e pedagógico em investigações matemáticas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

Trabalhar com tecnologias digitais em sala de aula é abrir um leque de possibilidades de investigação, exploração e conjecturas. É permitir ao aluno o desenvolvimento e aplicação da sua matemática de forma imediata e dinâmica. Entretanto, esse cenário só é possível quando bem construído e pensado pelo professor, pois o uso aleatório e sem fundamento desses recursos não contribui de maneira efetiva com o desenvolvimento da educação.

Quando se trata da matemática, é costumeiro apresentar, de modo isolado, várias fórmulas prontas para o aluno, deixando no esquecimento a parte histórico-humana envolvida e transmitindo o sentimento de que se trata de algo estático, dessa forma, elas acabam sendo de fácil aplicação e também de fácil esquecimento.

Pensando nisso, é compreensível o número de professores e pesquisadores que aderem o uso do GeoGebra em suas aulas ou produções acadêmicas. Este *software*, criado por Markus Hohenwarter em 2001, além de apresentar uma interface simples e prática, é gratuito, ocupa pouca memória quando instalado, oferece versão online, está disponível em vários idiomas, trabalha dinamicamente geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo, indo de encontro com novas estratégias de ensino e aprendizagem que destacam a importância do aluno vivenciar situações em que possa conjecturar e verificar suas ideias.

OBJETIVO, METODOLOGIA E ANÁLISE DE DADOS

A pesquisa em desenvolvimento tem como objetivo investigar o pensamento diferencial de alunos do ensino médio ao fazer uso do *software* GeoGebra para a construção e exploração de atividades relacionadas ao cálculo da área de regiões limitadas por eixos e curvas e do volume de regiões limitadas por planos e superfícies. Tal objetivo pode ser enunciado enquanto pergunta norteadora da seguinte forma: Qual a natureza do pensamento diferencial de alunos do ensino médio ao explorarem atividades envolvendo o cálculo de área e volume com o GeoGebra?

Este estudo é de natureza qualitativa, sendo assim prioriza procedimentos descritivos durante seu desenvolvimento e considera o conhecimento como compreensão que não é verdade rígida, estando sempre em dinamismo e passível a modificações (BORBA, 2004), convergindo com a proposta da metodologia de pesquisa ativa que será desenvolvida durante a produção e análise dos dados.

Por meio de sessões de experimentos de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) realizadas com algumas duplas de alunos do ensino médio, as quais serão filmadas e as telas dos computadores captadas através de um *software* a ser definido, serão desenvolvidas algumas tarefas semiabertas, dentre as quais destacamos neste artigo: o cálculo da área de uma região sob a curva da parábola. Em experimentos de ensino são trabalhados cenários colaborativos, nos quais os participantes têm liberdade para explorar e explicar as atividades segundo a sua matemática (STEFFE; THOMPSON, 2000), compartilhando conjecturas e negociando metas e objetivos comuns.

Seguindo o roteiro: observação, descrição, identificação de eventos críticos, transcrição, codificação, criação do enredo e composição da narrativa (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004), para análise dos arquivos audiovisuais, será possível fazer o aprimoramento qualitativo e investigativo das tarefas antes de aplica-las a outras duplas. Entretanto, é importante ressaltar que, a adaptação da tarefa está relacionada a aspectos construtivos e questionadores, preservando sua natureza e objetivo, e pode ocorrer de maneira direta e/ou aprimorada, dependendo do direcionamento que a atividade seguir durante o processo de aplicação (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

A ATIVIDADE

Apresentamos aqui a atividade *O problema da área* que será desenvolvida em uma sessão de experimento de ensino que estrutura a pesquisa em andamento. Tal atividade foi selecionada para compor este artigo com a finalidade de apresentação e discussão no evento XXIII EBRAPEM.

Atividade: O problema da área

Desde os gregos antigos são desenvolvidas estratégias para calcular áreas de regiões limitadas por linhas retas. A principal delas, chamada de "método da exaustão", consiste em dividir qualquer polígono em triângulos, calcular suas áreas individualmente e, em seguida, somar os resultados obtidos.

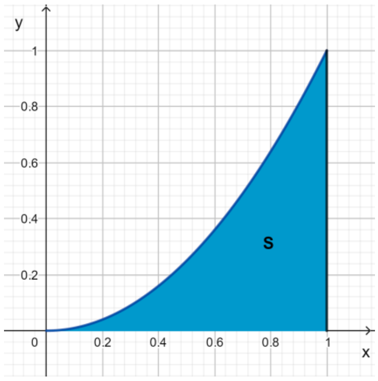
Mas e as figuras limitadas por curvas? Para elas, as coisas não eram tão simples. No caso do círculo, por exemplo, o método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles, tomando-se a média das áreas ao final.

E no caso da parábola, é possível calcular a área sob sua curva? Como investigar esse questionamento usando o *software* GeoGebra?

Esta atividade possui como objetivo determinar a área sob a curva da parábola e o eixo x no intervalo de 0 até 1, uma vez que o problema da área é central no cálculo integral e as técnicas desenvolvidas nessa atividade possibilitarão o cálculo do volume de um sólido, proposto em outras sessões de experimento de ensino da pesquisa.

Atividade: Determine a área de uma região S (Figura 1) que está sob a parábola $y = x^2$, *com* $0 \leq x \leq 1$.

Figura 1: Região parabólica S



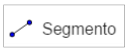
Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra.

1. Construção da parábola no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e da região S.

a) Clique no campo "Entrada" 

, digite "Função", escolha a opção 

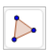
clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses "$x^2, 0{,}1$". Pressione a tecla "Enter" 
.

b) Construa um segmento de reta vertical delimitando a região S. Para isso clique na aba "Reta" 
e selecione a ferramenta "Segmento" 

, em seguida clique com o mouse nas posições (1,0) e (1,1) na "Janela de visualização 2".

c) O que podemos observar e discutir inicialmente com relação à área da região S? É possível compará-la com de outras regiões?

2. Construção das primeiras aproximações à região S.

a) Clique na aba "Polígono" 
e construa na "Janela de visualização 2" um quadrado com vértices em (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1).

b) Construa um triângulo com vértices em (0,0), (1,0) e (1,1). Para isso, use novamente a aba "Polígono" .

c) Podemos considerar a área desse triângulo como uma "boa aproximação" para área da Região S? Se for uma boa aproximação, é possível encontrar uma melhor?

3. Divisão da região S em faixas.

a) Oculte o quadrado e o triângulo construído na **Parte 2**.

b) Dividir a região S em cinco faixas de mesma largura. Para isso, construa 4 segmentos de retas verticais, igualmente espaçados em x, clicando na aba "Reta" e selecionando a ferramenta "Segmento" Segmento.

c) É possível aproximar cada faixa a uma região com lados retos? Qual medida devemos considerar para a sua base e altura?

4. Construção de retângulos usando as extremidades direitas e esquerdas das faixas.

a) Selecione a ferramenta "Controle Deslizante" a=2 e clique em algum lugar na "Janela de visualização 2" distante das construções realizadas até a **Parte 3**. Na janela "Controle Deslizante", digite *n* em "Nome"; selecione a opção "Inteiro"; em "Intervalo", digite 0 (zero) em "min" e, em "max", digite 1 000 (um mil); em "Incremento" deixe o valor 5(cinco); na aba "Animação" Animação, em "Repetir", selecione a opção "Crescente (Uma Vez)" ⇒ Crescente (Uma Vez) . Para finalizar, clique no botão "OK" OK.

b) Clique no campo "Entrada" + Entrada..., digite "SomaDe", escolha a opção

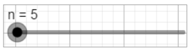
SomaDeRiemannSuperior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)

clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses "$x^2, 0{,}1, n$". Pressione a tecla "Enter" ↩ .

c) Clique no campo "Entrada" + Entrada..., digite "SomaDe", escolha a opção

SomaDeRiemannInferior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)

clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses "$x^2, 0{,}1, n$". Pressione a tecla "Enter"  .

d) Mova o "Controle Deslizante" até n = 5 

.

e) Oculte uma construção por vez para melhor observação.

f) Quais estimativas são possíveis fazer para a área de S?

g) É possível repetir esse procedimento com um número maior de faixas? O que é esperado que aconteça?

5. Cálculo da área da região S aumentando o número de faixas.

a) Deixe visível na "Janela de visualização 2" apenas os objetos construídos nas **Partes 1 e 4**.

b) Clique no "Menu Exibir"  e selecione a opção 

.

c) Na "Janela de Álgebra" clique com o botão direito do mouse sobre o objeto "Controle Deslizante" e selecione "Gravar para a Planilha de Cálculos" 

. Repita essa ação para os objetos "SomaDeRiemannSuperior" e "SomaDeRiemannInferior".

d) Anime o "Controle Deslizante" clicando no botão "Play"  presente no lado direito do objeto na "Janela de Álgebra".

e) Qual é o valor da área da Região S? O que acontece se aumentarmos a quantidade de casas decimais?

Referências Bibliográficas

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 1 – A Matemática Grega. Tradução de José R. B. Coelho. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

STEWART, J. **Cálculo**, volume 1. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

RESULTADOS INICIAIS

Atualmente a pesquisa encontra-se em fase de elaboração de dados/tarefas. As atividades selecionadas para exploração com tecnologias, as quais serão abordadas experimentalmente em sessões de ensino, são apresentadas ao longo do desenvolvimento do Cálculo, que combina problemas e teorias, e podem ser reduzidas ao modelo geométrico. Serão abordados problemas de determinação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e problemas de determinação do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas. Esta investigação tem como desafio explorar elementos do Cálculo Diferencial e Integral com alunos do ensino médio, além de apresentar uma proposta que excede com relação ao conteúdo proposto a esta fase escolar, por exemplo, o estudo do volume do paraboloide que será desenvolvido em uma sessão de ensino posterior a da atividade apresentada neste artigo.

REFERÊNCIAS

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 1 – A Matemática Grega. Tradução de José R. B. Coelho. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BORBA, Marcelo de Carvalho. A pesquisa qualitativa em educação matemática. Anais da **27ª reunião anual da Anped**, p.1-18, 2004.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 2. ed.; 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

POINCARÉ, H. A invenção matemática. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.), **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p. 7-14.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. rev. ampl.; 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, v.17, n.21, p.81-140, 2004.

STEFFE, L.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ, 2000.

STEWART, J. **Cálculo**, volume I. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. 6. ed. americana. 5. reimp. da 2. ed. de 2010. São Paulo: Cengage Learning, 2011.