XI Conferência Nacional sobre
Modelagem na Educação Matemática
ISSN: 2176-0489
MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A ESCOLA BRASILEIRA:
ATUALIDADE E PERSPECTIVAS
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG ● 14 a 16 de novembro de 2019 ● Belo Horizonte, MG

O USO DE ERROS MATEMÁTICOS OCORRIDOS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM COMO UM INCENTIVO PARA NOVAS DESCOBERTAS

Daniela Barbieri Vidotti
Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí (UNESPAR)[1]
dnbarbieri@hotmail.com

Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
lilianakemikato@gmail.com

RESUMO

A ideia de que os erros matemáticos cometidos pelos estudantes devem ser aproveitados de forma construtiva nos processos de ensino e de aprendizagem tem sido defendia por diversos pesquisadores do campo da Educação Matemática. Nesse sentido, objetivamos investigar como os erros matemáticos manifestados pelos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, no contexto do Cálculo Diferencial Integral (CDI), podem conduzi-los a reflexões e aprendizagens. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada com estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública paranaense, no âmbito de um curso de extensão em que se propôs a abordar conceitos de CDI em várias variáveis por meio da Modelagem Matemática. No caso da atividade analisada, observou-se que os estudantes assumiram uma postura de *remediação/conteúdo* a partir do momento em que perceberam que a solução para o problema real estava incorreta e isso os levou a esclarecer más interpretações acerca de um conteúdo matemático.

Palavras-chave: Elipsoide; Integral Dupla; Ensino Superior.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A necessidade de romper paradigmas pedagógicos tradicionais, em que os alunos são qualificados por acertos e erros nas questões matemáticas, tem motivado diversas pesquisas sobre análise de erros em Educação Matemática. Nessa direção, as pesquisas envolvendo essa temática tem enfocado a possibilidade de explorar as potencialidades dos erros para construir conhecimentos (CURY, 1994, 2008; BORASI, 1996).

Nesse âmbito, e no contexto do ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), inserem-se trabalhos como Braga (2009), Kashefi, Zaleha e Yudarah (2012), Kashefi *et al.* (2012), Añino *et al.* (2014), Müller (2015), Brito e Nunes (2017) e Rocha e Wagner (2017). Nas

[1] Agradecemos a Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) pelo apoio recebido para a participação nesse evento científico.

ISSN: 2176-0489

experiências de ensino relatadas nessas pesquisas, o aluno é instigado a questionar suas respostas, expor suas ideias, desestabilizar certezas, testar hipótese, investigar, a partir de experimentos de ensino diversificados, em que se propõe a aproveitar os erros cometidos pelos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem.

Nesse cenário, a Modelagem Matemática[2] no âmbito da Educação Matemática se apresenta como uma tendência que converge a esses propósitos. Braga (2009), ao investigar acerca do tratamento dado ao erro em um ambiente de ensino e aprendizagem gerado por meio da Modelagem, concluiu:

> [...] o ambiente de ensino e aprendizagem gerado por meio da Modelagem Matemática favorece o tratamento do erro matemático dos alunos, convidando-os para construir/reconstruir, indagar/investigar, acertar/errar, interagir/dialogar, motivados por situações em que o estudo do erro é utilizado no ato de modelar/aprender (BRAGA, 2009, p. 153).

Na proposta de Modelagem relatada em Braga (2009), os problemas ou situações abordavam as Equações Diferenciais Ordinárias, e os erros que surgiram foram discutidos em sala de aula por meio do quadro ou do computador (no laboratório de informática). Dessa forma, os estudantes foram incentivados a ressignificar os conceitos que se mostravam controversos nas atividades.

Nesse trabalho pretendemos investigar "Como os erros matemáticos manifestados pelos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, no contexto do CDI em várias variáveis, podem conduzi-los a reflexões e aprendizagens?" Para tanto, relatamos e analisamos uma atividade desenvolvida com estudantes do quarto ano do curso de Matemática de uma universidade pública paranaense, a qual abordou conceitos de CDI em várias variáveis.

Dentre as diversas concepções de Modelagem presentes na literatura, assumimos a concepção de Bassanezi (2013, p. 13), segundo a qual "A Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Nesse entendimento, é essencial a construção de um modelo matemático que represente por meio de símbolos ou expressões matemáticas o objeto estudado.

Da mesma forma em nosso trabalho, consideramos fundamental a construção de um modelo matemático que além de representar o objeto de estudo, envolvesse conceitos de CDI em várias variáveis. Essa condição foi negociada com os estudantes, uma vez que o problema real permitia mais de uma solução.

---

[2] Nesse texto usaremos o termo "Modelagem" referindo-se à Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

O foco em conceitos de CDI se justifica, uma vez que as disciplinas de CDI estão presentes em diversos cursos da área de Ciências Exatas e as pesquisas nesse nível de ensino têm identificado dificuldades por parte de professores e estudantes em relação ao ensino e a aprendizagem desses conceitos (FONSECA, 2016). Além disso, diversos pesquisadores tem defendido a inserção da Modelagem nas aulas de CDI (FRANCHI, 1993; ARAÚJO, 2002; BORSSOI, 2004; VERTUAN, 2007; BRAGA 2009; BASSANEZI, 2013; BARROS, 2017).

Considerando esses apontamentos, na próxima seção trazemos algumas considerações acerca do erro em Modelagem bem como o referencial teórico que embasa a análise de erros.

O ERRO EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao sugerir encaminhamentos para a Modelagem em sala de aula, Burak (2010, p. 22, grifo nosso) afirma que "O erro deve ser entendido como uma *aproximação da verdade*, pois é mais educativo e preferível o erro resultante de um processo de pensamento, do que uma resposta correta emitida ao acaso, quando o estudante não é capaz de justificar o porquê da resposta dada". Destaca-se o status positivo dado ao erro, expresso nessas palavras do autor que, assim como nós, ampara sua perspectiva dos processos de ensino e de aprendizagem em teorias da cognição, que consideram o estudante como construtor do próprio conhecimento.

Contudo, quando se trata de Modelagem o termo "erro" pode expressar ambiguidades com relação ao seu entendimento. O erro, que em alguns dicionários da língua portuguesa (DICIO, 2018; MICHAELIS, 2019), é sinônimo de "equívoco" ou "engano", do ponto de vista da Matemática é a "Diferença entre o valor exato de uma grandeza e o valor dado por uma medição" (DICIO, 2018). No contexto da Modelagem, o valor exato (ou valor de referência) a que se refere esta definição, muitas vezes é difícil de ser determinado. A medição, não é restrita à ação de medir, com um instrumento de medida, é a ação de estimar, investigar, calcular, assim, compreende algumas etapas da Modelagem Matemática, que sabemos, trabalha com aproximações da realidade.

Partindo dos encaminhamentos sugeridos por Bassanezi (2013), a Modelagem constitui-se pelas etapas: experimentação, abstração, resolução, validação, modificação e aplicação. Na etapa da validação, especialmente, avalia-se a adequação do modelo obtido para o problema ou situação real investigada. Considerando-se que não existe um modelo ideal para cada situação, sempre haverá erros, os quais não são vistos como equívocos, ou enganos. Por isso, pode parecer irrelevante falar de erros em Modelagem Matemática.

Entretanto, nesse trabalho, veremos que os erros cometidos pelos estudantes assumem um papel importante no processo de Modelagem, pois além de provocarem uma modificação do modelo inicial obtido, podem conduzir os estudantes a explorações e aprendizagens. Mas não necessariamente todos os erros, apenas aqueles que puderem ser observados pelos alunos durante a realização da atividade. Estes poderão ser explorados de diferentes formas, conduzindo os estudantes a identificarem outros tipos de *erros matemáticos*, que caracterizamos como respostas (orais ou escritas) dos alunos às questões matemáticas provenientes do processo de Modelagem "[...] as quais estão em desacordo com as verdades aceitas pela comunidade acadêmica ou pelo professor" (CURY, 1994, p. 99).

A ideia de aproveitar os erros cometidos pelos estudantes como trampolins para a aprendizagem (ou para pesquisa) é defendida por Borasi (1996), que sugere possibilidades de explorá-los em sala de aula, as quais exibimos no Quadro 1. De acordo com a autora, essas possibilidades variam conforme o *nível do discurso matemático* empreendido na tarefa e também com a *postura de aprendizagem* assumida pelo aluno.

Quadro 1 - Taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa

Postura de Aprendizagem	**Nível de discurso matemático**		
	Realização de uma tarefa matemática específica	**Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático**	**Compreensão sobre a natureza da Matemática**
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso. (Remediação/tarefa)	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático. (Remediação/conteúdo)	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos. (Remediação/Matemática)
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar erros potenciais. (Descoberta/tarefa)	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc. (Descoberta/conteúdo)	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático. (Descoberta/Matemática)
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas. (Pesquisa/tarefa)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original. (Pesquisa/conteúdo)	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a insights e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático. (Pesquisa/Matemática)

Fonte: Borasi (1996, p. 138, tradução nossa).

Cada uma das nove estratégias de uso dos erros, exibidas no Quadro 1, implicam em diferentes oportunidades de aprendizagem. De acordo com Borasi (1996), dependendo do nível do discurso matemático adotado, a análise de erros pode conduzir os estudantes a: aprender sobre como realizar uma tarefa matemática específica (*nível de tarefa*); aprender algum conteúdo técnico-matemático (*nível de conteúdo*); e aprender sobre a natureza da matemática (*nível de matemática*).

Além disso, independente do nível do discurso matemático, há outro fator (indicado no Quadro 1) que influencia as atitudes dos estudantes no estudo dos erros, a saber, a postura de aprendizagem. Nesse sentido, uma *postura de remediação* é identificada quando o aluno já está ciente de que a sua resposta para um determinado problema está incorreta, e por isso procura identificar o erro e repará-lo. De forma semelhante, uma *postura de descoberta* é identificada quando o aluno está resolvendo um problema, ou aprendendo algo novo e, mesmo não sabendo se a sua resposta está correta ou não, sente-se instigado a examiná-la buscando determinar se cometeu algum erro. Por último, uma *postura de pesquisa* pode surgir se, motivados por algum erro, os alunos são levados a redefinirem a tarefa original, iniciando outras explorações (BORASI, 1996).

Algumas dessas possibilidades de explorar o erro em sala de aula podem ser reconhecidas no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem (VIDOTTI, 2019), devido à sua natureza aberta, e também pela possibilidade que a mesma oferece do erro ser observável aos estudantes. Assim, é partir desses pressupostos que traçamos compreensões a respeito de como o erro em Modelagem pode conduzir os estudantes a reflexões e aprendizagens.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nesse texto, descrevemos e analisamos uma atividade de Modelagem desenvolvida em um curso de extensão realizado em uma universidade pública paranaense, no contexto de uma pesquisa de doutorado (VIDOTTI, 2019), na qual buscou-se investigar o potencial da Modelagem para explorar os erros que os estudantes cometem a fim de problematizá-los.

O estudo foi realizado à luz das orientações metodológicos procedentes da vertente Qualitativa em Educação, conforme sugeridas por Bogdam e Biklen (1994). Nesse âmbito, a responsabilidade pelas apreensões de conhecimentos está nas mãos do pesquisador, e não num método pré-definido, o qual insere-se num processo indutivo de interpretação de dados descritivos que nessa pesquisa foram construídos a partir de uma questão geradora.

Participaram da pesquisa 11 licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática, que no momento do curso de extensão estavam matriculados no 4º ano e já haviam concluído a disciplina de CDI II (Cálculo em várias variáveis). A atividade foi conduzida pela pesquisadora que, por sua vez, foi a professora da disciplina de CDI II ministrada no ano anterior, momento em que os estudantes tiveram contato com a Modelagem Matemática e, portanto já estavam

ISSN: 2176-0489

familiarizados com esse tipo de atividade. Para o desenvolvimento da atividade constituíram-se três grupos: G1) Paloma, Luana, Mara e Simão; G2) Brenda, Ana, Marcelo e Bia; e G3) Diana, Eliane e Babi[3].

A problemática desenvolvida abordou o tema “laranja” e foi elaborada pelos alunos junto com a professora|pesquisadora[4]. Foi realizada nos dias 06, 04 e 10 de maio de 2017 e teve duração de seis h-a. Essas aulas foram gravadas por meio de áudio e vídeo; as gravações foram transcritas pela professora|pesquisadora que juntamente com os registros escritos dos alunos e com as anotações de um diário de campo, constituíram os dados da pesquisa. Foi solicitado que os alunos não apagassem nenhum dos cálculos efetuados, porque pretendíamos identificar e analisar os erros cometidos por eles. Contudo, alguns desses registros ficaram ilegíveis após a digitalização, e por isso apresentamos somente a transcrição.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE DE TEMA “LARANJA”

O tema desta atividade foi motivado pelo fato da produção de laranjas constituir uma importante atividade econômica da região que permeia o campus universitário, cujo município é sede de duas grandes fábricas de suco de laranjas. Como forma de convite aos estudantes para essa investigação, a professora|pesquisadora apresentou alguns dados acerca da produção de laranjas no Brasil nos anos de 1970 a 2010[5]. Ela também levou algumas laranjas e distribuiu aos grupos, solicitando-os que pensassem em algum problema real[6] envolvendo esse tema, que pudesse ser investigado por meio de conceitos do CDI II.

Os acadêmicos optaram por explorar propriedades geométricas da laranja, que incluíram: determinar uma equação que representasse a superfície da fruta e utilizá-la para calcular o seu volume. De acordo com Bassanezi (2013, p. 241) “a maioria dos problemas “diretos” levantados no início do processo de modelagem dizem respeito à Geometria dos objetos relacionados com o tema em estudo”. Esse destaque visual ocorreu em nosso curso, em outras atividades também. Outros questionamentos mais elaborados surgiram no decorrer da atividade, como por exemplo: Qual a relação entre o volume da laranja e a quantidade de suco que ela possui? Que tipos de laranjas apresentam um maior rendimento de suco? Entre outros.

---

[3] Os nomes são fictícios.

[4] De acordo com Campos e Araújo (2015, p.336) a relação dialética pesquisador|professor caracteriza-se “por uma alternância entre ênfase no papel de pesquisadora e no de professora” colocando ação e reflexão em diálogo. Esse duplo papel, de pesquisadora e professora, exercido por uma mesma pessoa é uma prática recorrente em pesquisas de Modelagem Matemática realizadas no contexto de uma prática pedagógica.

[5] Disponível em: <https://www.embrapa.br/documents/1355135/1529009/Laranja_Brasil_2013.pdf/5c85ffa4-f792-4db8-b1e7-2940d1cf07e5> Acesso em: 18/04/2017.

[6] Não discutiremos sobre o termo real nesse texto. Consideramos real tudo que existe.

ISSN: 2176-0489

Nesse trabalho, apresentamos e analisamos apenas o problema inicial: Como determinar o volume de uma laranja utilizando conceitos de CDI II? Para obter uma estimativa desse volume, antes de efetuarem os cálculos, os alunos mergulharam a laranja em um copo graduado com água, observando o aumento do volume ocupado dentro do copo. A medida obtida foi assumida como valor de referência nessa atividade.

Os grupos assumiram como hipótese, inicialmente, que a esfera seria um modelo matemático apropriado para representar a laranja. Contudo, nessa etapa de experimentação, quando coletavam os dados e exploravam o problema, ao medirem as laranjas com o auxílio de um barbante (Figura 1), observaram que elas estavam mais próximas do formato de um elipsoide:

Luana: Isso aqui não é uma esfera, é um elipsoide. Está dando 23 de um lado e 21,5 do outro, a circunferência.

Figura 1 - Posições do barbante usadas para medir a laranja

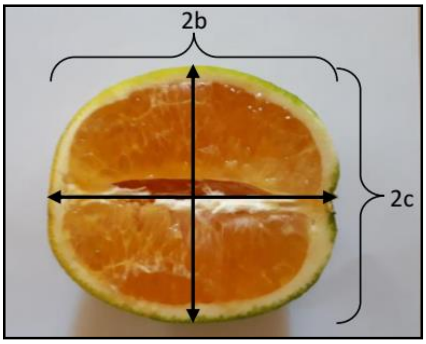
Fonte: Vidotti (2019, p. 188).

Os alunos pesquisaram, nos livros didáticos de CDI, sobre as propriedades matemáticas dessa superfície, identificando a equação geral do elipsoide, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, e observaram que precisavam obter as medidas dos semieixos *a*, *b* e *c*. Além disso, comentaram que o elipsoide de revolução (elipsoide com dois semieixos iguais) seria mais apropriado.

Para determinar essas constantes, o G1, por exemplo, partiu a laranja (dividindo-a em duas partes) e mediu umas das partes com a régua, em dois lugares (Figura 2), determinando o eixo maior, $2b=6,8$ cm, e o eixo menor, $2c=6,6$, da elipse que representa a seção transversal da superfície no plano *yz*. Assim, consideraram $a=b=3,4$ para desenhar o elipsoide de revolução (Figura 3).

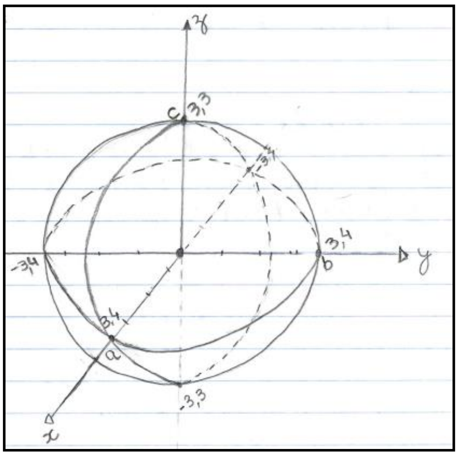
ISSN: 2176-0489

Figura 2 - Identificação das medidas da laranja



Fonte: Vidotti (2019, p. 188).

Figura 3: Elipsoide de revolução desenhado pelo G1

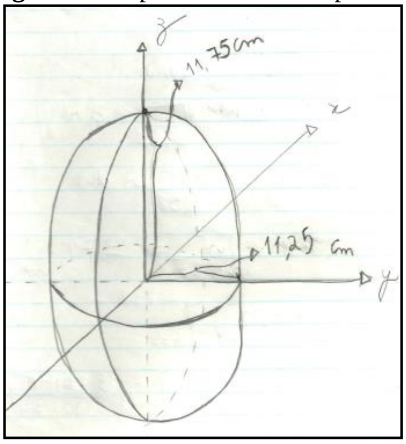


Fonte: Vidotti (2019, p. 189).

Nessa fase de experimentação, o G3 errou ao identificar as medidas dos semieixos do elipsoide, pois dividiu as medidas dos comprimentos das circunferências por dois, ao invés de tomar as medidas identificadas como 2b e 2c na Figura 2. Esse equívoco pode ser observado na Figura 4 e no diálogo a seguir:

> **Babi:** Esse lado aqui é 23,5 né? E o outro lado é 22,5 (Medidas dos barbantes posicionados conforme ilustrado na Figura 6).
> **Diana:** Sim, mas acho que temos que usar só a metade, não é?
> **Babi:** No caso, o 11,75 e 11,25, será que é assim?
> **Diana:** Eu acho que é.
> **Diana:** Então $a = b = 11,25$ será que é isso?
> **Babi:** Então $c = 11,75$.

Figura 4 - Elipsoide desenhado pelo G3



Fonte: Vidotti (2019, p. 191).

Após determinarem os valores das constantes a, b e c da equação do elipsoide, que representava a equação matemática da laranja, elas tentaram calcular o volume do sólido representado na Figura 4, por meio de uma integral dupla, conforme transcrito no Quadro 2:

ISSN: 2176-0489

Quadro 2 - Resposta (incorreta) do G3 ao problema da Atividade 2

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ $z=-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$	$a=b=11,25$ $c=11,75$ $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ $x^2+y^2=r^2$ $z=11,75\frac{\sqrt{r^2}}{11,25}$ $0\le r\le 11,25$ $0\le\theta\le 2\pi$ $\int_0^{2\pi}\int_0^{11,25}11,75\frac{\sqrt{r^2}}{11,25}rdrd\theta$	$\int_0^{2\pi}\int_0^{11,25}11,75\frac{r}{11,25}rdrd\theta=$ $\int_0^{2\pi}\int_0^{11,25}11,75\cdot\frac{1}{11,25}r^2drd\theta=$ $\int_0^{2\pi}\left[11,75\cdot\frac{1}{11,25}\cdot\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=11,25}d\theta=$ $\int_0^{2\pi}\left[\frac{11,75(11,25)^3}{33,75}-0\right]d\theta=$ $\int_0^{2\pi}[495,7]d\theta=$ $[495,7]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=3112,996$

Fonte: Vidotti (2019, p. 191).

Nessa fase do desenvolvimento da atividade, as alunas só perceberam que algo estava errado quando concluíram o cálculo da integral dupla, pois o valor obtido era muito alto comparado ao valor de referência, obtido experimentalmente no início, quando mergulharam a laranja na água, obtendo um volume de aproximadamente 200 ml. A princípio, elas discutiram que poderiam ter errado quando integraram em relação à variável *r*, pois Babi achava que o correto seria:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{11,25}11,75\frac{r}{11,25}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[11,75\cdot\frac{1}{11,25}\cdot\frac{r^2}{2}\right]_0^{11,25}d\theta$$

Questionaram também o Professor Matos[7], que verificou que a última opção estava incorreta. Na ocasião, também apontou que a medida do raio (da região de integração) era muito grande para o raio da circunferência que representa uma seção transversal da laranja (11,25 cm), por isso, pediu para que elas explicassem como haviam obtido aquela medida:

> **Babi:** A gente mediu a volta inteira, deu 22,5, então pegamos a metade.
> **Professor Matos:** Então isso não é o raio, pois o comprimento da circunferência é $C=2\pi r$, logo $r=\frac{C}{2\pi}$.
> **Babi:** Ahhh! Então a gente tem que calcular o raio?
> **Professor Matos:** Vocês tem que dividir por 2π e não só por 2.
> **Babi:** Então o *c* vai mudar também.
> **Professor Matos:** Se vocês tivessem medido o diâmetro aí sim, o diâmetro é duas vezes o raio.

[7] Nome fictício dado ao professor da disciplina de Modelagem Matemática e Pesquisa Operacional que também participou dessa atividade realizada no curso de extensão.

ISSN: 2176-0489

Diana: Nossa! Eu ia sair daqui sem saber disso! Nossa! Eu vou ter que pesquisar uma aula sobre isso. <u>Olha, se a gente mede a circunferência e dá 6, por exemplo, pra mim o raio seria 3.</u>
Babi: A agente mediu a circunferência, que é isso tudo aqui, agora se a gente tivesse medido só a altura, o diâmetro, aí sim... Nossa! Vamos ter que fazer tudo de novo.

Nesse episódio, identificamos uma postura de *remediação*, iniciada quando o G3 finalizou o cálculo da integral dupla e percebeu, durante o processo de validação, que o resultado encontrado não condizia com o valor de referência, sendo necessário identificar o erro cometido. Para além dessa percepção, as circunstâncias do episódio favoreceram que as alunas esclarecessem más interpretações acerca de um conteúdo técnico-matemático, a saber, a relação entre o raio e o comprimento da circunferência, operando em nível de *conteúdo*. Vale destacar também que o *erro matemático*, nesse episódio, parece ter motivado a aluna Diana a querer pesquisar mais sobre o assunto, quando afirmou "Nossa, eu vou ter que pesquisar uma aula sobre isso", o que poderia estender a uma postura de *pesquisa/conteúdo*, se viesse a se concretizar.

Para finalizar a atividade, as alunas corrigiram as constantes a, b e c, mas não examinaram todos os passos realizados antes de identificarem esses erros. Desse modo, não perceberam que também erraram quando tentaram isolar a variável z na equação geral dessa quádrica, conforme ilustrado na primeira coluna do Quadro 2. Uma forma correta seria: $z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. E, então, refizeram o cálculo do volume utilizando a equação (incorreta) $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ conforme mostramos no Quadro 3:

Quadro 3 - Recorte da resposta do G3 ao problema da atividade da laranja

$a = b = 3{,}58$ $c = 3{,}74$ $z = 3{,}74\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3{,}58}$	$\int_0^{2\pi}\int_0^{3{,}58} 3{,}74\dfrac{\sqrt{r^2}}{3{,}58} rdrd\theta =$ $\int_0^{2\pi}\int_0^{3{,}58} 3{,}74\dfrac{r^2}{3{,}58} drd\theta =$ $\int_0^{2\pi}\left[3{,}74\cdot\dfrac{1}{3{,}58}\cdot\dfrac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=3{,}58} d\theta =$ $\int_0^{2\pi} 16 d\theta = 100{,}48$

Fonte: Vidotti (2019, p. 193).

O cálculo apresentado no Quadro 3 forneceria, caso estivesse correto, o volume de metade da laranja e, então, multiplicando o resultado por dois, o G3 concluiu que o volume

ISSN: 2176-0489

total da fruta é de $200{,}96$ ml. Esse valor foi aceito pelo grupo, uma vez que o valor de referência do volume estimado para essa laranja foi de 200 ml. Tendo em vista que nenhum outro método para validar o processo foi utilizado por esse grupo, as alunas concluíram a atividade sem perceberem os últimos erros.

Esse episódio mostra uma situação em que os *erros matemáticos* não foram percebidos pelas estudantes, pois, coincidentemente, a resposta estimada foi encontrada. Esse fato inibiu a postura de *remediação* identificada quando os alunos encontraram uma resposta muito diferente daquela estimada no início da atividade, que serviu como valor de referência. Nesse caso, não houve oportunidade para que esses erros fossem explorados na atividade, como “trampolins para pesquisa” (BORASI, 1996), visto que, como as consequências deles não interferiram na solução do problema, não puderam ser detectados pelos estudantes ou pela professora|pesquisadora.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante desses resultados, discutidos na seção anterior, voltamos nossos olhares para a questão norteadora: Como os erros matemáticos manifestados pelos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, no contexto do CDI em várias variáveis, podem conduzi-los a reflexões e aprendizagens?

No decorrer da atividade de tema “laranja”, os estudantes do G3 observaram que algum tipo de erro teria sido acometido quando compararam o valor de referência assumido para o problema com o valor aferido por meio do modelo matemático elaborado e identificaram uma diferença substancial entre esses valores. Isso incitou uma *postura de remedição*, levando-os a examinarem os procedimentos realizados a fim de identificarem o erro, e consertá-lo. Nesse movimento, puderam esclarecer interpretações equivocadas acerca de um conteúdo técnico-matemático, isto é, a relação entre o raio e o comprimento da circunferência, por isso operaram em *nível de conteúdo*. Portanto, de acordo com a taxionomia dos usos dos erros propostas por Borasi (1996), os estudantes assumiram uma estratégia de *remediação/conteúdo* que os conduziu a refletirem sobre o conteúdo matemático abordado.

Contudo, como vimos, na mesma atividade, alguns erros não manifestaram o mesmo potencial para a aprendizagem, uma vez que não puderam ser observados pelos estudantes, logo não geram quaisquer dúvidas ou questionamentos. Assim, desvelamos a possibilidade de explorar ou não os erros em Modelagem, dependendo das interferências desses erros na solução do problema real.

Nessa experiência de ensino, chamou-nos a atenção a dificuldade dos estudantes em relação a conceitos geométricos que, normalmente, nas disciplinas de CDI assume-se como conhecidos por eles. Diversos problemas apresentados nos livros didáticos dessas disciplinas envolvem o cálculo do volume de sólidos geométricos e já fornecem as medidas das figuras. É difícil imaginar que neste nível de ensino, pode haver dúvidas em relação a como determinar essas medidas. Desse modo, a Modelagem se mostra capaz de trazer à tona conceitos mal interpretados pelos estudantes.

Vale destacar que, embora nessa atividade tenhamos identificado apenas uma das variações dos usos dos erros como "trampolim para pesquisa", é possível que outras possibilidades sejam alcançadas. Vidotti (2019) ao trabalhar com a Modelagem no contexto do CDI II identificou as variações: *remediação/tarefa*, *remediação/conteúdo*, *descoberta/conteúdo* e *pesquisa/tarefa*. Considerando que essas estratégias implicam em diferentes oportunidades de aprendizagem aos estudantes, evidencia-se o potencial da Modelagem para promover ricas experiências de aprendizagem.

Para além dos objetivos dessa pesquisa, destaca-se que por meio dessa atividade, os estudantes puderam vivenciar uma situação real que envolveu conceitos de CDI II, proporcionando uma visão diferenciada desses conceitos. Assim, constituiu-se um espaço importante para a formação desses sujeitos, uma vez que proporcionou discussões acerca dos distanciamentos entre a teoria e prática na matemática.

REFERÊNCIAS

AÑINO, M. M. *et al*. Early error detection: an action-research experience teaching vector calculus. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 45, n. 3, p. 378-395, 2014. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2013.837522?needAccess=true. Acesso em: 15 ago. 2018.

ARAUJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:** as discussões dos alunos. 2002. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

BARROS, M. C. de. **Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática**. 2017. 258 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2013.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. 2 ed. Porto: Porto Editora, 1994.

ISSN: 2176-0489

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction**: a focus on erros. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino**. 2004. 200 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias**. 2009. 180 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

BRITO, C. E.; NUNES, T. R. Erros e Obstáculos no Processo de Aprendizagem de Derivadas: uma análise bilateral docente/discente. **Educação Matemática em Revista**. Brasília, v. 22, n. 56, p. 277-288, out./dez. 2017.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

CAMPO, I. S.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador|professor. **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n.2, p. 324-339, maio/ago. 2015.

CURY, H. N. **As concepções matemáticas dos professores e sus formas de considerar os erros dos alunos.** 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

ERRO. In: DICIO, **Dicionário Online de Português**. Porto: 7Graus, 2018. Disponível em: https://www.dicio.com.br/erro/. Acesso em: 30 jul. 2019.

ERRO. In: MICHAELIS, **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2019. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/erro/. Acesso em: 30 jul. 2019.

FRANCHI, R.H.O.I. **A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia**. 1993. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1993.

FONSECA, L. **Didática do Cálculo:** epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

KASHEFI, H.; ZALEHA, I.; YUDARIAH M. Y. Overcoming Students Obstacles in Multivariable Calculus through Blended Learning: A Mathematical Thinking Approach. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, v. 56, p. 579-586, 2012. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812041535. Acesso em: 12 ago. 2018.

KASHEFI, H.; ISMAIL, Z.; YUSOF, M.; RAHMAN, R. Supporting Students Mathematical Thinking in the Learning of Two-Variable Functions Through Blended Learning. **Procedia-Social and Behavioral Sciences,** v. 46, p. 3689-3695, 2012. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812018642. Acesso em: 12 ago. 2018.

ISSN: 2176-0489

MÜLLER, T. J. **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros.** 2015. 203 f. Tese (doutorado em Informática da Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Tecnologia na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

ROCHA, M. M.; WAGNER, V. M. P dos S. Impactos de análise de acertos e erros em cálculo I. **Vydia**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 367-382, jul./dez., 2017.

THOMAS, G. B. Cálculo. 12 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, v. 2, 2012.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) − Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VIDOTTI, D. B. **Potencialidades da modelagem matemática e da análise de erros para o ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral em várias variáveis**. 2019. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2019.