

## **A MODELAGEM MATEMÁTICA NUMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM FUTUROS PROFESSORES DA UNEMAT: APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA DE UMA VARIÁVEL REAL**

Polyanna Possani da Costa Petry  
Universidade do Estado de Mato Grosso  
polyanna.possani@unemat.br

Kátia Maria de Medeiros  
Universidade Estadual da Paraíba  
katiamedeirosuepb@gmail.com

### **RESUMO**

Este trabalho apresenta o relato de experiência com a utilização do processo de Modelação como uma das atividades avaliativas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, campus de Sinop, no ano de 2017/2. Com objetivo de buscar um maior envolvimento e interesse por parte dos futuros professores, proporcionar situações para que compreendam que a Matemática pode ser utilizada em diferentes contextos e, principalmente, contribuir na construção do conhecimento do futuro professor, incentivando-o à pesquisa, propôs-se a construção, por meio de algum software livre, de uma taça com uma capacidade de 300ml, cujo volume fosse calculado utilizando sólidos de revolução – aplicação de integrais. Utilizamos o GeoGebra e o Winplot, como softwares livres. Após as atividades analisamos resultados obtidos utilizando as etapas de Modelação. Além disso, observamos a íntima relação do resultado final do trabalho com a participação efetiva por parte dos futuros professores nos momentos de acompanhamento e atendimento.

**Palavras-chave:** Modelagem em Educação Matemática, Licenciatura em Matemática, Aplicação de integral.

### **INTRODUÇÃO**

Discussões referentes às dificuldades de aprendizado em Matemática e a busca por alternativas que contribuam no processo de construção do conhecimento em todos os níveis de educação – desde os anos iniciais até o nível superior – são recorrentes e necessárias. Em particular, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) do ensino superior, as dificuldades apresentadas pelos estudantes acentuam-se na abstração para compreensão e construção do conhecimento “[...] a abstração assume um papel fundamental na constituição do conhecimento matemático, mais especificamente na compreensão de conceitos, teoremas e demonstrações que fazem parte do conteúdo desta importante disciplina” (DIOGO, 2015, p. 23).

Nesse contexto, a prática pedagógica faz parte dessa reflexão de como contribuir para uma melhor compreensão e abstração dos conceitos, principalmente quando se fala em cursos de Licenciatura, ou seja, na formação de professores é importante que seja desenvolvida e estimulados alunos e futuros professores a capacidade de abstração e visualização desse abstrato, isto é, refletir sobre a prática pedagógica na seguinte perspectiva:

Conjecturando sobre a nossa prática pedagógica no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, sob a perspectiva da formação do professor de Matemática, percebemos a necessidade de propiciar, aos alunos, chances de desenvolver a capacidade de visualização, por ser esta um recurso didático-pedagógico potencializador do pensamento criativo na interpretação e na construção do seu próprio conhecimento (DIOGO, 2015, p. 18).

A visualização geométrica para a compreensão do conceito é um caminho que possibilita essa transição para a demonstração e representação dos conceitos de CDI I, e no caso do estudo das Integrais e suas aplicações, não é diferente “há um problema geométrico associado ao campo conceitual da Integral” (CARNEIRO DÖRR, 2017, p. 40). Desta forma:

[...] é relevante que o professor desenvolva uma postura crítica reflexiva, subsidiada pelo tratamento teórico, sem abrir mão da conscientização a respeito das vantagens de buscar oferecer na disciplina uma abordagem didático-pedagógica que possa propiciar aos alunos tecerem as suas teias de significados, construídas num movimento de ir e vir entre, o voltar-se para si mesmo e o ir além de si mesmo (DIOGO, 2015, p. 17).

Nessa perspectiva, dos alunos darem sentido aos conceitos por meio daquilo que lhes interessam e assim construir seus próprios significados, Biembengut (2016, pg. 176) apresenta como processo/método de ensino a *Modelação* como a “utilização do processo da Modelagem no ensino e na aprendizagem da Educação formal”, com objetivo de, dentro da estrutura escolar, incentivar os estudantes à pesquisa, proporcionando condições que o levem a um conhecimento além dos conceitos matemáticos. Para tanto, a autora define as seguintes etapas da modelação:

(1ª) *percepção e apreensão*; (2ª) *compreensão e explicitação*; e (3ª) *significação e expressão*. Estas etapas envolvem tanto o ensino dos conteúdos curriculares, quanto o ensino do processo de pesquisa. Cada etapa deste processo envolve pluralidades de contextos: interativo, social, discursivo, semântico, histórico, linguístico, científico, dentre outros (BIEMBENGUT, 2016, p. 178).

Conforme a autora, a etapa da percepção e apreensão é o momento que visa estimular o aluno sobre determinado tema/assunto, sendo, portanto, o processo de reconhecimento e familiarização com a situação-problema; a segunda etapa, compreensão e explicitação, é o momento de formulação do modelo. Biembengut (2016, p. 197) afirma que na Modelação “esta etapa consiste em levarmos os estudantes a identificar alguns elementos do *tema/assunto* no sentido quantitativo e qualitativo e, com base nas ideias que eles já possuem, ensinamo-los a inteirarem-se do que ainda desconhecem”; a significação e expressão, etapa de interpretar,

avaliar e validar não somente o modelo obtido, mas também suas contribuições. Expressando o que se foi produzido por meio da realização de um Seminário, por exemplo.

Nesse sentido, na busca de contribuir na construção do conhecimento dos futuros professores e encontrar alternativas que possibilitem e estimulem a pesquisa, no ano de 2017/2, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, campus de Sinop – cuja ementa aborda aplicações de integrais de funções de uma variável – foi utilizado como uma das notas avaliativas o desenvolvimento da seguinte atividade de modelagem: construção, utilizando o conceitos de sólidos de revolução, de uma taça, com capacidade de 300ml, por meio de um software livre. Trabalhos com atividades nesse contexto, cujo objetivo é a modelagem de um recipiente (utilizando sólidos de revolução) e o cálculo do seu volume (por integral definida de função de uma variável real), são encontradas na literatura, tais como Júnior e Oliveira (2016), Dantas e Matias (2017) e Pereira et. al. (2017). No entanto, neste trabalho, chama-se atenção ao fato de que a capacidade de armazenamento da taça já estava predefinida, o que apresenta uma variação das referências consultadas.

## **METODOLOGIA**

Para o desenvolvimento dos modelos foram disponibilizadas aulas destinadas ao acompanhamento e atendimento dos grupos durante todo o processo. É importante observar que o tema foi solicitado aos futuros professores e que a taça construída deveria apresentar detalhes para que, no caso de ser real, apresentasse boa aparência e fosse possível de ser utilizada, ou seja, as proporções dessa taça também precisavam ser levadas em consideração.

Por ser a última atividade avaliativa da disciplina, e por ser um curso com a característica de desistência durante o semestre letivo (outra questão importante que deve ser discutida em outro momento), apenas 6 (seis) futuros professores chegaram a etapa da realização e apresentação do modelo, obtendo-se 3 (três) grupos com 2 (dois) futuros professores cada.

O ponto de partida da modelagem deu-se em cada grupo determinar o modelo de taça a ser construído. Em seguida, os grupos ocuparam-se com o processo de modelagem da taça escolhida, sendo o primeiro passo a busca pelas funções que melhor atenderiam ao objetivo da construção da taça definida, ou seja, determinar/encontrar as funções de maneira que, ao rotacioná-las em torno do eixo  $x$  ou do eixo  $y$ , a taça obtida fosse a desejada. Além disso, para garantir a capacidade de 300ml destes recipientes, o estudo do domínio destas funções também fez parte desse processo.

Com relação ao software, apesar de ter deixado livre, todos os grupos optaram por utilizar o GeoGebra, isto por que durante o mesmo semestre estes futuros professores estavam cursando a disciplina de Informática Aplicada à Educação Matemática, na qual o professor responsável estava realizando atividades com este software. Além disso, conforme o Instituto Geobebra<sup>1</sup> – UESB “[...] é um software de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA.” Em particular, o grupo 01, além do GeoGebra, utilizou também o software livre Winplot<sup>2</sup>, apresentando o resultado final (a taça pronta) por meio dos dois softwares.

A seguir apresenta-se alguns aspectos, referente ao processo de modelagem da taça de cada grupo, com intuito de relacioná-los com os resultados obtidos e as etapas de modelação citadas anteriormente. Os aspectos considerados foram: utilização das aulas de atendimento; modelo de taça a ser construída; escolha das funções; resultado após realizar a rotação em torno do eixo x.

Utilização das aulas de atendimento: as aulas de atendimento disponibilizadas foram em horário de aula. O grupo 01 participou de todos os atendimentos, apresentando o que já haviam desenvolvido e retirando dúvidas, quando surgiam; o grupo 02 levou um longo tempo para definir o modelo da taça e, portanto, não aproveitaram, como poderiam, as aulas de atendimento; o grupo 03, numa situação muito semelhante ao grupo 02, também demorou para definir o modelo da taça.

Modelo da taça a ser construída: após todos os grupos definirem os modelos das taças que desejavam construir, obteve-se o resultado apresentado no Quadro 1, cuja representação das taças utilizadas como referência constam na Figura 1.

**Tabela 1** – Modelo de taça a ser construída por cada grupo

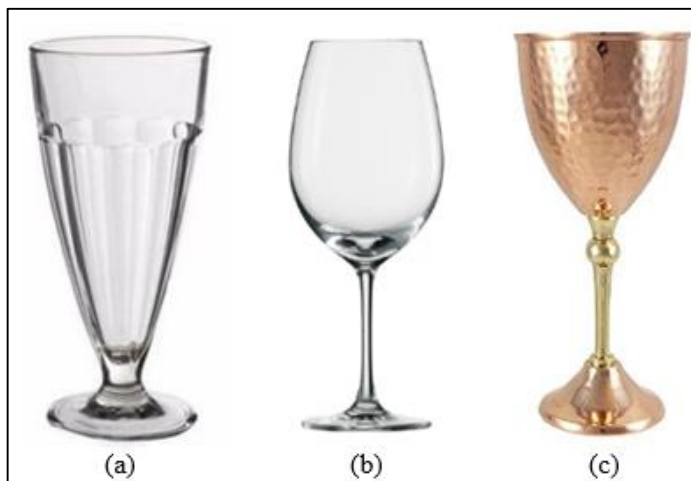
| GRUPOS | MODELO DA TAÇA UTILIZADA COMO REFERÊNCIA            |
|--------|-----------------------------------------------------|
| 01     | Taça de sorvete - modelo apresentado na Figura 1(a) |
| 02     | Taça de vinho - modelo apresentado na Figura 1(b)   |
| 03     | Taça cálice - modelo apresentado na Figura 1(c)     |

**Fonte:** Das autoras

<sup>1</sup>Disponível para download em: <https://www.geogebra.org/download>

<sup>2</sup> Criado pelo Professor Richard Parris "Rick", por volta de 1985 o Winplot é “uma excelente ferramenta computacional para fazer gráficos 2D e 3D de maneira bastante simples e, diria até, intuitivo” (SOUZA, 2004), ainda conforme o autor, sua utilização é motivada por 5 (cinco) pequenos motivos: inteiramente gratuito, simples utilização, pequeno e portátil, é sempre atualizado, há versão em português). Disponível para download em: <https://winplot.br.softonic.com/>

**Figura 1** – Taças utilizadas pelos grupos como referência para a construção.



**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

Escolha das funções para a modelagem: Definido o modelo da taça a ser construída, cada grupo iniciou a “procura” pelas funções cujo contorno relacionavam-se com o modelo almejado. Esse processo ocorreu de maneira muito particular para cada grupo, porém é importante observar que não foi utilizado a ferramenta “Inserir Imagem” do software GeoGebra, o que poderia implicar, por exemplo, no uso de interpolação polinomial, inserindo-se pontos sobre a curva da imagem. Assim, todos os grupos iniciaram suas buscas plotando o gráfico da função que julgavam adequada e então, a partir de observações, foram realizando os ajustes necessários.

Para atender a restrição de que as taças modeladas precisavam ter capacidade de 300ml, os alunos utilizaram o conceito referente às aplicações das integrais definidas, a saber, o cálculo de volume de sólidos de revolução, obtidos a partir da rotação de uma função  $f(x)$  em torno de eixo  $x$  ou  $y$ , cuja construção já havia sido estudada em momento anterior na disciplina. As funções e seus respectivos domínios são apresentados a seguir:

Grupo 01: modelo - taça de sorvete

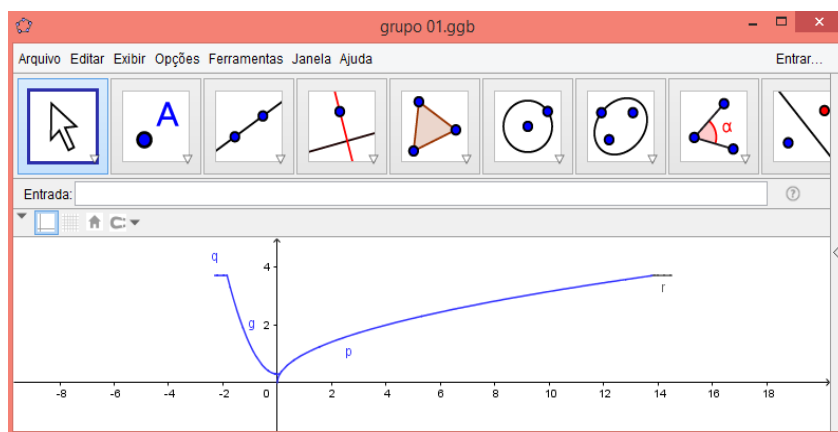
$$p(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 13.82,$$

$$g(x) = x^2 + 0.3, \quad -1.85 \leq x \leq 0.1,$$

$$q(x) = 3.72, \quad -2.3 \leq x \leq -1.85$$

$$\text{e} \quad r(x) = 3.72, \quad 13.82 \leq x \leq 14.5$$

**Figura 2** – Funções utilizadas, pelo grupo 01, para a construção da taça de sorvete.



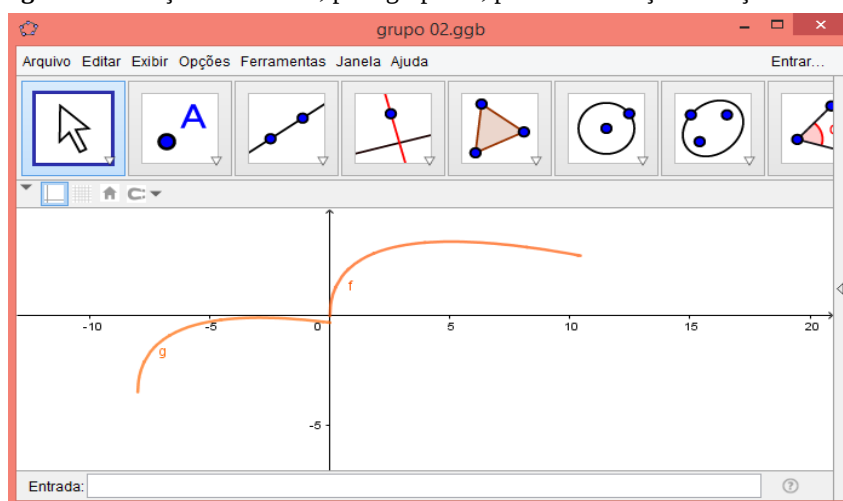
**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

Grupo 02:

$$f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{3}x, \quad 0 \leq x \leq 10.43e$$

$$g(x) = 3\sqrt{x+8} - \left(\frac{2}{3}(x+8) + 3.46\right), \quad -8 \leq x \leq 0$$

**Figura 3** – Funções utilizadas, pelo grupo 02, para a construção da taça de vinho.



**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

Grupo 03:

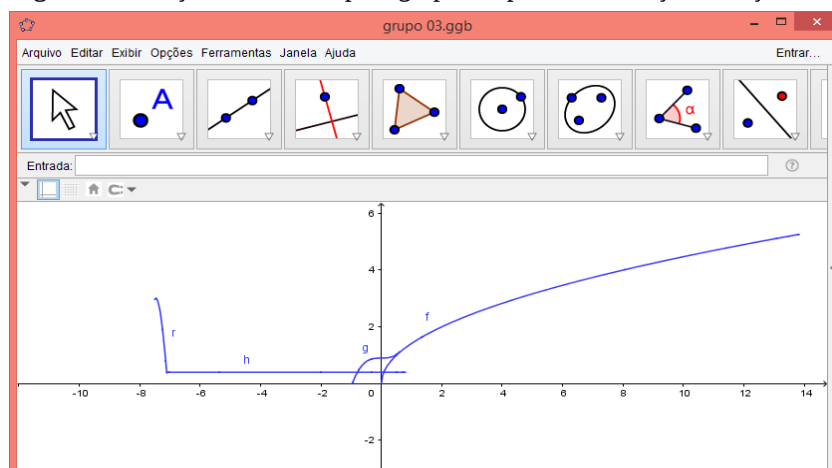
$$f(x) = \sqrt{2x}, \quad 0 \leq x \leq 9.77,$$

$$g(x) = x^3 + 0.9, \quad -0.97 \leq x \leq 0.6,$$

$$h(x) = 0.4, \quad -7.1 \leq x \leq 0.8 \quad \text{e}$$

$$r(x) = 3 \sin(4x), \quad -7.5 \leq x \leq -7.1$$

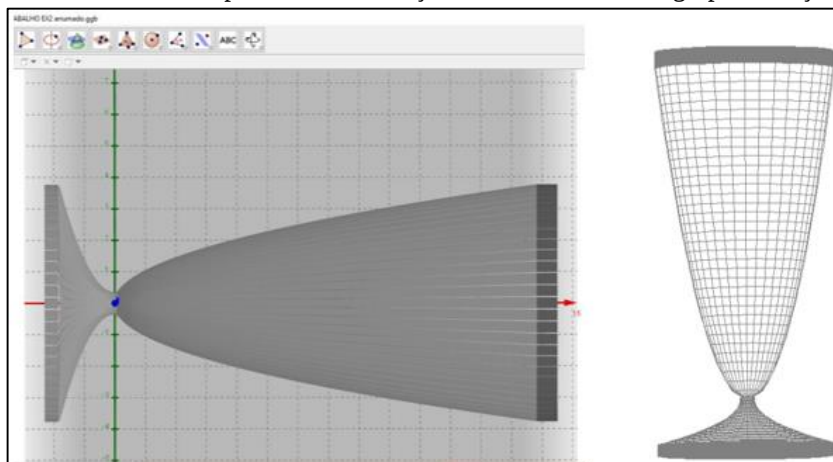
**Figura 4** – Funções utilizadas, pelo grupo 03, para a construção da taçacálice.



**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

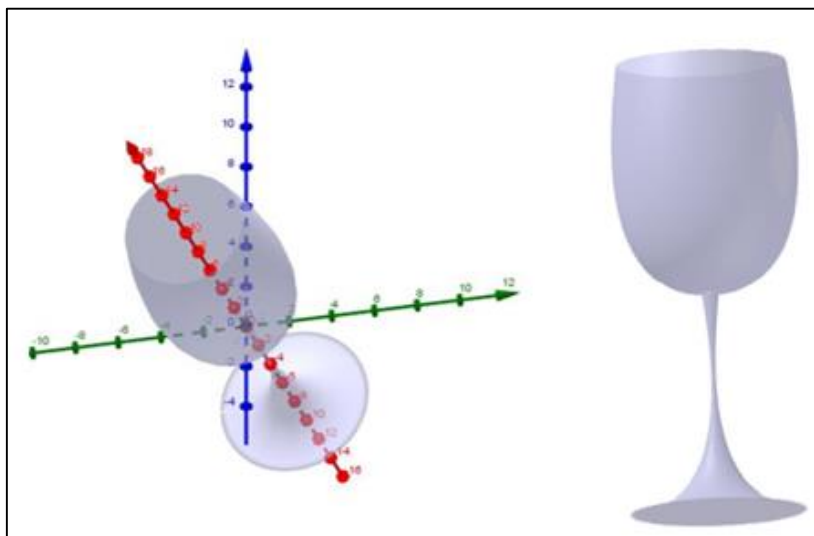
Resultado após realizar a rotação em torno do eixo  $x$ : Devido à construção desenvolvida por cada grupo, tem-se que todos os grupos realizaram a rotação das funções em torno do eixo  $x$ , obtendo assim, a versão final da taça. Os resultados finais das modelagens são apresentados a seguir: Figura 5, taças de sorvete desenvolvidas pelo grupo 01 (construção no Winplot à direita e construção no GeoGebra à esquerda); Figura 6, taça de vinho desenvolvida pelo grupo 02; Figura 7, taça cálice desenvolvida pelo grupo 03.

**Figura 5** – Resultado obtido após realizar a rotação em torno do eixo  $x$ : grupo 01, taça de sorvete.



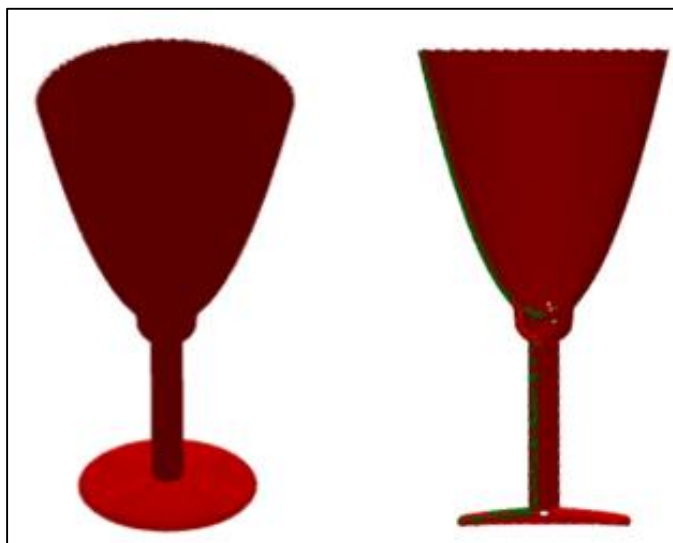
**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

**Figura 6**– Resultado obtido após realizar a rotação em torno do eixo x: grupo 02, taça de vinho.



**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

**Figura 7** – Resultado obtido após realizar a rotação em torno do eixo x: grupo 03, taça cálice.



**Fonte:** Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

De maneira geral, o resultado da experiência didática (experiência no sentido de propor a elaboração de uma atividade de modelagem matemática de modo que os futuros professores fossem os atuantes desse processo de modelagem e o professor o mediador) temos que os objetivos iniciais deste trabalho foram alcançados, isto é, contribuir na construção do conhecimento dos futuros professores, na perspectivas de proporcionar situações que estimulassem maior envolvimento e o interesse destes sujeitos, de modo que estes

compreendessemas possibilidades da Matemática, em diferentes contextos e, portanto, incentivando-os à pesquisa.

Uma situação que exemplifica tal incentivo é a participação de um destes grupos com a apresentação, na forma de pôster, do trabalho intitulado “O uso do GeoGebra como recurso didático para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I: Experiência vivenciada na formação acadêmica” no I Seminário de Pesquisa Aplicada e Tecnologias – SEPATE3, realizado de 21/11/2018 a 23/11/2018, na cidade de Sinop, Mato Grosso.

Com relação às etapas da Modelação, definidas por Biembengut (2016), e as etapas de construção das taças, temos as seguintes considerações: os momentos de definição do modelo de taça a ser construída e do software utilizado encaixam-se como a primeira etapa da Modelação, isto é, a percepção e apreensão. A escolha das funções para a modelagem da taça desejada, determinação dos intervalos bem como os testes de rotação relacionam-se com a segunda etapa da Modelação – compreensão e explicitação. Por fim, ao avaliar o resultado final, ou seja, avaliar a validade do modelo obtido para a taça em questão tem-se a ocorrência da significação e expressão, terceira etapa da modelação.

Observa-se ainda que, após os seminários dos trabalhos finais, ficou explícito que o grupo que utilizou os horários para orientação desde o início, aproveitando a cada novo encontro para apresentar o caminho que estavam traçando na construção (modelagem) da taça e sanar as dúvidas que estavam surgindo, pôde-se contribuir de maneira mais efetiva nos possíveis erros que poderiam ser gerados na taça final, possibilitando maiores avanços para o resultado final do modelo. Ainda, que os outros aspectos que implicam no resultado final (detalhes como proporção da taça, intervalos das funções que poderiam ser diferentes) para se obter melhores resultados estão relacionados ao primeiro, isto é, enxerga-se que as aulas de atendimento e acompanhamento são relevantes, principalmente para troca de experiência entre o professor formador e o aluno – futuro professor de Matemática. Possibilitando ao licenciando, além de discussão e reforço dos conceitos, uma formação reflexiva sobre o conteúdo, crítica na interpretação dos conceitos e o desenvolvimento da capacidade de visualização, conforme Diogo (2015) defende.

---

<sup>3</sup>Para verificar - código de autenticidade 896183.535071.097152.0.309821216496349156 em <https://www.even3.com.br/documentos>.

## REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

CARNEIRO DÖRR, R. **Análises de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso de Desenvolvimento de Conceitos e Procedimentos Algébricos em uma Universidade Pública Brasileira**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília – Brasília, 2017, 237 p.

DANTAS, S. C.; VIEIRA, C. V. Formas de revolução e cálculo de volume. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 39, n. 1, p. 142-155 jan./abr., 2017.

DIOGO, M. G. V. S. **Uma abordagem didático-pedagógica do cálculo diferencial e integral I na formação de professores de matemática**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Rio Claro, 2015, 256 p.

Instituto GeoGebra – UESB. Disponível em: <[http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page\\_id=7](http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page_id=7)>. Acesso em: 21 de abril de 2019.

JÚNIOR, P. B. A; OLIVEIRA, E. G. MODELO MATEMÁTICO DA CURVA DE REVOLUÇÃO DE UMA TAÇA. XII **Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades** - ISSN 2178-034X. São Paulo –SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em: [http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6412\\_3325\\_ID.pdf](http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6412_3325_ID.pdf). Acesso em: 16 de outubro de 2019.

PEREIRA, et al. Usando o GeoGebra para o ensino de sólidos de revolução. **Ciência e Natura**, vol. 39, núm. 3, setembro-dezembro, 2017, pp. 666-686. Universidade Federal de Santa Maria Santa Maria, Brasil.

SOUZA, Sérgio de Albuquerque. **Usando o Winplot**. Versão: 27/10/2004. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html#toc1>>. Acesso em: 21 de abril de 2019.