



PROJETO DE DESENVOLVIMENTO DE PRODUTO EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Thiago Fernando Mendes
Universidade Estadual de Londrina
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
thiagofmendes@utfpr.edu.br

Kassiana Schmidt Surjus
Pontifícia Universidade Católica Câmpus Londrina
email.kaka@gmail.com

Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adrianaborssoi@utfpr.edu.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
karinasilva@utfpr.edu.br

RESUMO

Este texto se propõe a investigar que conceitos matemáticos podem ser mobilizados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática com ferramentas digitais. O quadro teórico em que se fundamenta nossas considerações articula a modelagem matemática na Educação Matemática e o uso de ferramentas digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem. As argumentações teóricas são associadas à resolução de um problema extra-matemático oriundo de uma indústria de pequeno porte de equipamentos para academia. O desenvolvimento da atividade de modelagem matemática possibilitou a mobilização de diferentes conceitos matemáticos, como: proporção, ponto, reta, lugares geométricos. Além disso, com a ferramenta digital foi possível a construção de alguns elementos geométricos essenciais para que a problemática extra-matemática pudesse ser solucionada, tais como: construção de circunferência (dados centro e raio), determinação de ângulos com amplitude fixa e interseção de dois objetos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Ferramentas Digitais.

INTRODUÇÃO

Nossa sociedade é circundada por diversas transformações que podem ser observadas em seus diferentes aspectos: sociais, culturais, filosóficos, socioeconômicos, políticos, ideológicos, religiosos, educacionais, dentre outros. É possível elencar vários fatores positivos possibilitados por tais transformações, dentre eles o desenvolvimento de tecnologias que nos ajudam em atividades cotidianas e que apresentam potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem.

Assim, dada a complexidade da sociedade atual, é desejável que a escola seja um espaço que acompanha tais transformações a fim de oportunizar ao estudante o desenvolvimento de habilidade que lhe permita ser bem-sucedido ao interagir socialmente e do ponto de vista profissional.

A escola tem a função de possibilitar a aprendizagem de conhecimentos de forma organizada, planejada e sistematizada, além da expectativa de que proporcione aos estudantes o desenvolvimento de autonomia para seguir aprendendo dentro e fora desse espaço. Em certa medida, os professores são responsáveis por oportunizar esse desenvolvimento, que pode ser mobilizado a partir de suas opções metodológicas. Nesse sentido, o uso de ferramentas digitais no processo educacional associadas à Modelagem Matemática como alternativa pedagógica tem chamado a atenção de diversos pesquisadores da área.

Na literatura há diversas discussões que relacionam a tecnologia com a educação. Santos (2011, p. 27), por exemplo, apresenta uma definição do conceito de tecnologia educacional:

O conceito de tecnologia educacional pode ser enunciado como o conjunto de procedimentos (técnicas) que visam "facilitar" os processos de ensino e aprendizagem com a utilização de meios (instrumentais, simbólicos ou organizadores) e suas consequentes transformações culturais.

No que diz respeito especificamente à Modelagem Matemática, Greefrath, Hertleif e Siller (2018) destacam que há uma suposição geral na literatura de que os modelos matemáticos desenvolvidos durante atividades de modelagem matemática são influenciados não apenas pelos conhecimentos matemáticos dos estudantes, mas também pelas possibilidades das ferramentas digitais a eles disponibilizados pelos proponentes de tais atividades.

Nesse artigo, fazemos referência a uma experiência que se deu no âmbito de um grupo de estudo e pesquisa sobre Modelagem na Educação Matemática, com o intuito de que os pesquisadores se colocassem como modeladores na abordagem de um problema, que como tal se apresentasse. As reflexões decorrentes do desenvolvimento da atividade de modelagem têm implicações para a sala de aula e estão ancoradas na literatura da área com vista a identificar: *Que conceitos matemáticos podem ser mobilizados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática com ferramentas digitais?*

Assim, nós autores deste artigo, como um grupo, fizemos o exercício de resolver um problema por meio da modelagem usando recursos dos quais poderíamos lançar mão na sala de aula. A problemática estudada é oriunda de uma indústria de pequeno porte, de equipamentos para academia.

O problema que nos foi apresentado pela indústria tem relação com o que é denominado, na área de Engenharia de Produção, de Processo de Desenvolvimento de Produto (PDP) que, segundo Amaral *et al.*, (2006):

Situa-se na interface entre a empresa e o mercado, cabendo a ele identificar – e até mesmo se antecipar – as necessidades de mercado e propor soluções, por meio de projetos de produto e serviços relacionados) que atendam a tais necessidades. Daí sua importância estratégica buscando: identificar as necessidades do mercado, e dos clientes em todas as fases do ciclo de vida de um produto; identificar as possibilidades tecnológicas; desenvolver um produto que atenda às expectativas do mercado, em termos de qualidade total do produto; desenvolver o produto no tempo adequado – ou seja mais rápido que os concorrentes – e a um custo competitivo.

Conforme Amaral *et al.*, (2006), em um mercado globalizado as empresas querem ser cada vez mais competitivas. Para isso buscam melhorias em seus processos, reduzindo gastos com o foco em aumentar seus lucros. No ramo industrial a otimização dos processos de fabricação de produtos é uma das áreas de atuação da Engenharia de Produção onde o lançamento eficaz de novos produtos e a melhoria da qualidade daqueles já existentes fazem parte do escopo do PDP e são duas questões de grande relevância para a capacidade competitiva das empresas.

Considerando que parte do grupo atua como docentes em cursos de graduação em Engenharia de Produção, o tema pareceu ainda mais motivador. Conseqüentemente a abordagem da situação-problema da indústria também levou-nos a considerar como tal situação poderia se desenvolver como atividade de modelagem em uma disciplina do curso, tal como Introdução ao Cálculo, por exemplo, com intuito de que conceitos matemáticos sejam estudados.

Dedicamos a próxima seção a trazer nosso entendimento sobre Modelagem Matemática e a considerações sobre ferramentas digitais e Modelagem, especificamente quanto a geometria dinâmica que se configurou como a abordagem usada para o estudo da situação-problema. Em outra seção nos dedicamos a apresentar a atividade de modelagem desenvolvida, mostrando como se deu a construção geométrica da solução por meio do GeoGebra para, posteriormente, apresentar algumas de nossas considerações.

MODELAGEM MATEMÁTICA COM FERRAMENTAS DIGITAIS

No âmbito da Educação Matemática, a Modelagem Matemática consiste em uma tendência na qual se faz uso de procedimentos matemáticos para apresentar uma solução para um problema originário de uma situação inicial, geralmente, extra-matemática (ALMEIDA,

2018). A Modelagem Matemática, de certa forma, viabiliza uma interpretação, ainda que parcial, de fenômenos com o apoio da Matemática.

Os procedimentos matemáticos que emergem na busca pela solução para o problema podem ser apresentados por meio de diagramas, gráficos, expressões algébricas ou geométricas - modelo matemático. Almeida e Vertuan (2014, p. 2) afirmam que o modelo matemático “é o que dá forma à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade de busca por esta solução”.

Na dedução de um modelo matemático, em uma atividade de modelagem matemática, algumas simplificações são necessárias para auxiliar no estudo do problema (BORROMEO FERRI, 2006), considerando os interesses e conhecimentos matemáticos e extra-matemáticos daqueles que o modelam. Para a dedução de um modelo matemático, podemos fazer uso de diferentes representações que podem ser subsidiadas por ferramentas digitais, tais como computadores, *tablets* ou dispositivos portáteis.

Na literatura, pesquisadores como Galbraith e Stillman (2006), Confrey e Maloney (2007), Siller e Greefrath (2010), Greefrath, Hertleif e Siller (2018), entendem as ferramentas digitais de forma holística, como adequadas ao aprendizado destacando as possibilidades de seu uso, a saber: construção de várias representações distintas para um mesmo objeto matemático; construção de representações que podem ser interativamente conectadas; verificação e controle das soluções obtidas para as atividades, dentre outras possibilidades.

De acordo com Carreira et al. (2013) muitas das possibilidades oferecidas pelas ferramentas digitais para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática podem ser exploradas por meio de uma ferramenta específica: os *softwares* de geometria dinâmica. Alguns desses *softwares* possibilitam construir modelos geométricos que, segundo Hall e Lingefjär (2017, p. 302), permitem “fazer medições diretamente no modelo, o que pode gerar relações interessantes para se investigar mais” sobre o próprio modelo. Carreira et al. (2013) destacam que um *software* como o GeoGebra pode melhorar a compreensão do contexto da modelagem matemática além de possibilitar um desenvolvimento de competências matemáticas.

Pead, Bill e Muller (2007) consideram o GeoGebra uma ferramenta digital que pode sustentar vários processos durante as fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Para eles, a ênfase desta ferramenta está nas representações gráficas, principalmente a disponibilidade de diversas opções de representação e o uso de opções de controle.

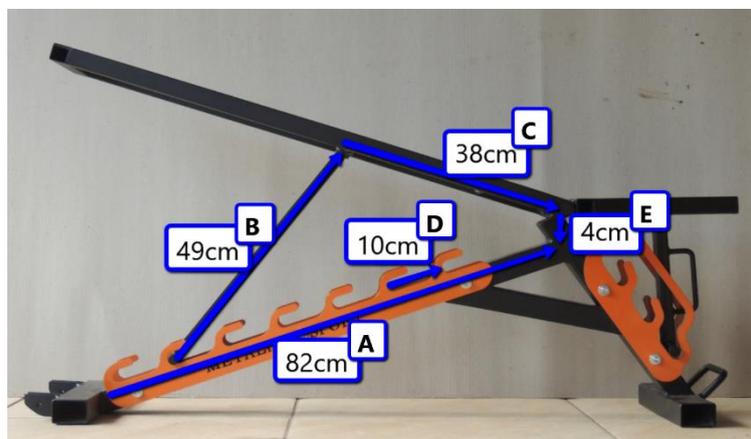
Levando em consideração o uso de ferramentas digitais em Modelagem Matemática, apresentamos no próximo tópico uma atividade desenvolvida por um grupo de professores do Ensino Superior que utilizaram o GeoGebra para resolver um problema oriundo da área da Engenharia de Produção.

ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDA

A empresa Metalika Sport situada no Norte do Paraná atua no ramo da indústria metalúrgica, onde fabrica diversos equipamentos de musculação para academias. Dentre os equipamentos produzidos pela empresa está o chamado Banco com Dupla Regulagem. Este banco tem o encosto e o assento reguláveis proporcionando diversos ângulos entre eles. Isso permite a execução de diferentes exercícios, seja com utilização de barras, halteres, anilhas ou até mesmo abdominais. Assim, dependendo do tipo de exercício a ser praticado pelo usuário, o banco deverá estar posicionado com uma angulação específica entre assento e encosto, que é obtida pelo posicionamento do extremo livre da haste do encosto e do assento.

A Figura 1 ilustra o banco atualmente fabricado com uma regulagem padrão bases de encaixe das hastes do encosto e do assento. Nesse modelo, a base de encaixe da haste do encosto tem medidas fixas, no entanto, a pedido de clientes e profissionais da área da Educação Física estas medidas devem ser alteradas de maneira que proporcionem aberturas mais adequadas à prática dos exercícios físicos. Esta necessidade nos levou à seguinte questão: “a que distância do topo da base deve ser posicionado o extremo livre da haste do encosto, de modo que o encosto fique com inclinação de: 90° , $112,5^\circ$, 120° , 135° , $157,5^\circ$, 180° ?”, sendo essas as medidas indicadas pelos profissionais.

Figura 1 – Dimensões do equipamento



Fonte: o fabricante

Para determinar quais devem ser as distâncias na peça de encaixe de maneira que, ao posicionar a haste livre do encosto na base de encaixe, o ângulo de abertura formado entre o encosto e o encaixe seja o ângulo desejado, nosso primeiro encaminhamento se deu pela abordagem geométrica utilizando o GeoGebra.

Para a coleta de dados a empresa nos forneceu as medidas e imagens detalhadas do Banco com Dupla Regulagem. A Figura 1 ilustra a estrutura do banco e as medidas do mesmo:

A: Base do encaixe da haste - 82 cm

B: Haste do encosto - 49 cm

C: Distância entre o eixo da haste e o eixo do encosto - 38 cm

D: Distância entre os encaixes - 10 cm

E: Distância entre o eixo do encosto e a base de encaixe da haste - 4 cm

Para o desenvolvimento da atividade foram feitas as simplificações:

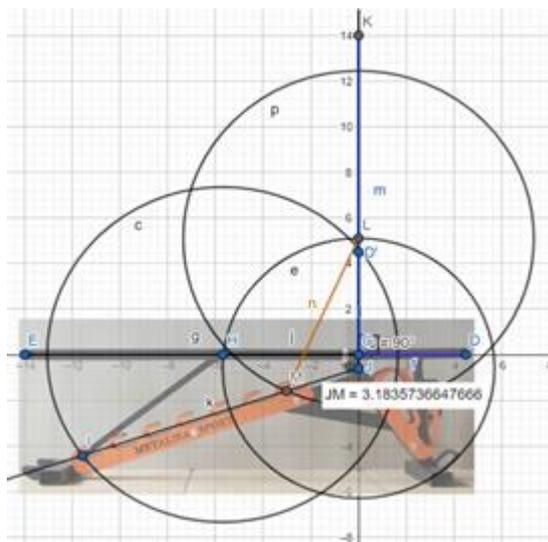
- Considerar o assento fixo, na posição horizontal (0°);
- Não levar em conta as dimensões do estofado do assento e encosto;

Foram elaboradas as seguintes hipóteses:

- H1: a imagem (Figura 1) usada como base para o desenvolvimento da modelagem está em perspectiva ortogonal;
- H2: 1,5 unidades no GeoGebra correspondem a 10 cm no equipamento;

Inserimos a imagem do Banco com Dupla Regulagem no Geogebra para a determinação da escala conforme a Figura 2 e obtenção da equivalência de medidas da construção geométrica em relação às medidas reais como mostra a Tabela 1:

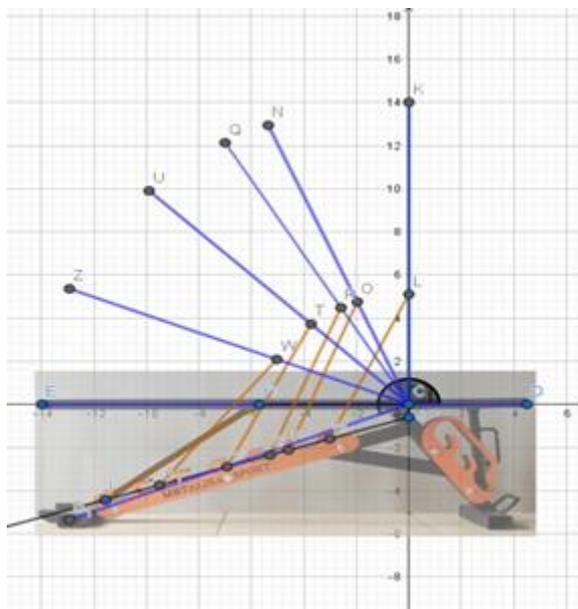
Figura 3 – Abordagem Geométrica



Fonte: <https://www.geogebra.org/graphing/jpqjnhzu>

O mesmo procedimento foi realizado para a obtenção de todas as distâncias no encaixe relativas a cada ângulo desejado conforme mostra a Figura 4:

Figura 4 – Resolução Geométrica



Fonte: <https://www.geogebra.org/graphing/jpqjnhzu>

Obtidas as distâncias no Geogebra, o próximo passo foi fazer a conversão entre unidades e centímetros, como mostra a Tabela 2:

Tabela 2 – Distâncias do topo da base até a posição de apoio do extremo livre da haste do encosto em função do ângulo

Ângulo	unidades	cm
90°	3,18	21,2
112,5°	4,83	32,2
120°	5,57	37,13
135°	7,3	48,7
157,5°	10,01	66,73
180°	12,18	81,2

Fonte: Dos autores

Na Tabela 3 é apresentada a comparação entre os valores coletados e os valores obtidos pelo modelo geométrico:

Tabela 3 – Comparação: Modelo Geométrico e Valores Coletados

Ângulo α	Valores Coletados	Modelo Geométrico
180°	79	81,21
160°	69	68,56
149°	59	60,06
138°	49	51,16
128°	39	43,19
118°	29	35,79

Fonte: Dos autores

CONSIDERAÇÕES E DISCUSSÕES

Com o empreendimento de investigar que conceitos matemáticos podem ser mobilizados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática com ferramentas digitais, este texto se propôs a apresentar a solução de uma problemática oriunda de uma indústria de pequeno porte de equipamentos para academia. Tal solução foi obtida por meio da modelagem matemática no qual foram utilizados recursos que poderiam ser lançados mão em sala de aula, como as ferramentas digitais.

No desenvolvimento da atividade de modelagem alguns conceitos matemáticos puderam ser evidenciados, tais como: proporção, ponto, reta, lugares geométricos.

Além disso, o uso do *software* Geogebra possibilitou a construção de alguns elementos geométricos essenciais para que a problemática extra-matemática pudesse ser solucionada, como: construção de circunferência (dados centro e raio), determinação de ângulos com amplitude fixa e interseção de dois objetos.

Tais possibilidades oferecidas pela ferramenta digital vão ao encontro do que discutem Meier e Gravina (2012) em que as autoras afirmam que o uso de GeoGebra no processo de resolução de um problema potencializam o desenvolvimento de ações como a experimentação, interpretação, visualização, abstração e generalização permitindo que, no âmbito da sala de aula, os estudantes ajam como sujeitos ativos de seu processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik** – ZDM – The International Journal on Mathematics Education, v. 50, p. 19-30, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W. ; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P. (Org.). **Modelagem Matemática em Foco**. 1ed. Rio de Janeiro - RJ: Ciência Moderna, 2014, v. 1, p. 1-21.
- AMARAL, D. C. et al. **Gestão de Desenvolvimento de Produtos: uma referência para melhoria de processos**. São Paulo: Saraiva, 2006.
- BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik** – ZDM – The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.
- CARREIRA, S.; AMADO, N.; CANÁRIO, F. Students' modelling of linear functions: How GeoGebra stimulates a geometrical approach. In B. Ubuz et al. (Eds.) **CERME 8**. Proceedings of the eighth congress of the European Society of Research in Mathematics Education (pp. 1031–1040), Antalya, Turkey. Ankara: Middle East Technical University, 2013.



CONFREY, J.; MALONEY, A. A theory of mathematical modelling in technological settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study** (pp. 57–68). New York: Springer, 2007.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 38(2), 143–162, 2006.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H. Mathematical modelling with digital tools - a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 233-244, 2018.

HALL, J.; LINGEFJÄRD, T. **Mathematical Modeling: applications with GeoGebra**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2017.

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657**, v. 1, n. 1, 2012.

PEAD, D.; BILL, R.; MULLER, E. Uses of technologies in learning mathematics through modelling. In W. Blum et al. (Ed.), **Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study** (pp. 309–318). New York: Springer, 2007.

SANTOS, M. **Novas Tecnologias no ensino de matemática: Possibilidades e desafios**. Pontifícia Universidade Católica, Rio Grande do Sul, 2011.

SILLER, H.; GREEFRATH, G. Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), **Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)** (pp. 2136–2145). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique, 2010.