ÁREA DE REGIÕES PLANAS: RELATO DE UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA

Tiago Ravel Schroeder[1]
Barbara Rosa Laureth[2]
Rogério Aguiar[3]

Resumo: A experiência vinculada a este relato se trata de um roteiro investigativo a respeito de geometria plana aplicado em duas turmas do ensino médio, ambas aplicações duraram quatro horas aula. Deste modo, o objetivo deste texto é descrever os procedimentos implícitos na construção e aplicação de um roteiro investigativo para a dedução das fórmulas de áreas de: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango e círculo. O referencial teórico conta com a caracterização de atividades de natureza investigativa, diferenciando-a de outras atividades como por exemplo explorações, problemas, exercícios e projetos. As implementações do referido roteiro nos ambientes educativos produziram resultados similares. Com efeito, estes reforçam as evidências trazidas pelo referencial teórico de que atividades desta natureza oportunizam (re)descobertas a partir de questões cujos enunciados são abertos. Os resultados indicam a possibilidade de que a aplicação de roteiros investigativos em estudantes mais jovens, sem alguns vícios da trajetória estudantil, pode render resultados ainda mais proliferos de construção do aprendizado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria Plana. Investigação Matemática.

1. INTRODUÇÃO

Ao longo do segundo semestre do ano de 2019, vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologia (PPGECMT) na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) no Centro de Ciência e Tecnologia (CCT), localizado na cidade de Joinville - SC, ocorreu a disciplina de Fundamentos da Matemática (FMT). Como pré-requisito parcial para aprovação nesta disciplina, fora orientado pelo docente a construção de um conjunto de aulas para serem aplicados na educação básica, sobre conteúdos pertencentes aos temas de geometria plana ou funções, com a presença de alguma tendência em educação matemática.

[1] Especialista em práticas interdisciplinares de matemática; Professor substituto do Instituto Federal Catarinense (IFC) – Campus Ibirama; e-mail: tiago.schroeder@ifc.edu.br.
[2] Licenciada em Física e em Matemática; Professora Admitida em Caráter Temporário (ACT) na Secretária Estadual de Educação de Santa Catarina (SED/SC); e-mail: br.laureth@gmail.com.
[3] Doutor em Matemática Aplicada; Professor efetivo da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) - Centro de Ciências Tecnológicas (CCT); e-mail: rogerville2001@gmail.com.

O presente relato conta a experiência de duas aplicações de um roteiro investigativo, elaborado pelos dois primeiros autores, a respeito de geometria plana num período de aproximadamente 4h/a cada. Deste modo, o objetivo deste texto é descrever os procedimentos implícitos na construção e aplicação de um roteiro investigativo para a dedução das áreas de: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango e círculo.

A fim de atingir o exposto, a organização deste relato conta com a seção intitulada de Fundamento teórico-metodológico para o roteiro investigativo, que explicita a Investigação Matemática (IM) na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Na seção seguinte, implementações em cenários educativos, são apresentados os resultados de aplicações em duas turmas de segundo ano do Ensino Médio (EM), em diferentes escolas. Noutro momento as referidas intervenções são analisadas à luz do referencial teórico apresentado. Por fim, organizam-se as considerações finais com as limitações e as perspectivas de continuidade do estudo.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO METODOLÓGICO PARA O ROTEIRO INVESTIGATIVO

Para Ponte (2003), convencionalmente existe uma separação entre investigar e ensinar. No entanto, o mesmo autor acredita ser possível romper com tal paradigma, pois quem investiga pode o fazer para aprender e quem aprende pode ter interesse em investigar. Para Ponte (2003), embora existam diferentes aprendizados e investigações em cada etapa escolar e nas diferentes modalidades de ensino, todos cumprem uma função social que legitima sua existência, o que garante o não antagonismo entre essas práticas.

Uma forma de conjugar ensino e investigação é o que Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 9) defendem ser Investigação Matemática (IM) em sala de aula. Para eles, isto significa “trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam de modo confuso, mas que se procuram clarificar e estudar de modo organizado”.

Neste ambiente, o papel do professor é ser orientador. Em uma IM isso se justifica quando partimos

> do princípio que o professor existe para que os alunos aprendam [...] ensinar é algo bastante mais complexo do que apenas transmitir conhecimentos e a função fundamental do professor, por onde é preciso avaliar os resultados do seu trabalho, é a promoção da aprendizagem dos seus alunos (PONTE, 2003, p. 3).

Por sua vez, o papel das atividades propostas em salas de aula é importante. A atividade mais característica da aula de matemática é o exercício, mas há também o problema, a exploração e a investigação. Para Ponte (2003) cada uma dessas tarefas tem quatro dimensões básicas: o grau de dificuldade, a estrutura, o contexto e o tempo requerido para sua resolução. A respeito da conjugação das duas primeiras dimensões Ponte (2003) oferece as caracterizações presentes no quadro 1.

Quadro 1 - Conjugação entre as dimensões: grau de dificuldade e estrutura.

	Fácil	**Difícil**
Aberto	(I) Exploração	(IV) Investigação
Fechado	(II) Exercício	(III) Problema

Fonte: Adaptado de Ponte (2003).

Por efeito do quadro 1 caracterizam-se na posição (I) tarefas de explorações, atividades cujo a estrutura é aberta e são de fácil solução, para os estudantes. Na posição abaixo dela (II), ficam caracterizadas também tarefas fáceis, mas com estrutura fechada, os exercícios, sendo aceitas apenas uma solução como a correta. Vale ressaltar que estas tarefas são as mais comuns nas aulas de matemática.

Ainda com estrutura fechada, só que agora com dificuldade maior, surgem as tarefas que chamamos de problemas, posição (III). O seu processo de resolução não é trivial e apenas ocorre com a mobilização de várias instrumentos e conceitos matemáticos já aprendidos pelos estudantes.

Por fim, na posição (IV) do quadro 1 delimitam-se as tarefas de investigação. Estas são aquelas em que o enunciado tem uma estrutura aberta, logo, como a exemplo da exploração, se busca um conceito e não uma resposta objetiva. No entanto os processos para o seu alcance não são triviais, é preciso que um conjunto de etapas sejam seguidas para que os estudantes tenham êxito no processo. Sobre esse tipo de tarefa que se assenta o roteiro cuja aplicação é descrita na seção seguinte.

Debruçando-se na dimensão tempo que uma tarefa pode requerer, Ponte (2003) define que investigações longas são chamadas de projetos. Uma discussão que corrobora as dimensões de Ponte (2003), especificamente na dimensão que aborda o contexto de desenvolvimento, são os cenários para investigação (ALRO; SKOVSMOSE, 2006). Nessa perspectiva teórica é possível que atividades propostas em aulas de matemática transitem entre cenários para investigação ou paradigma do exercício, com referência a matemática pura, semi realidade ou mundo real, como evidencia o quadro 2.

Quadro 2 - Ambientes de aprendizagem com ênfase ao contexto de aplicação da atividade proposta em aulas de matemática.

Ambiente	Paradigma do exercício	Cenários para investigação
Matemática pura	(1)	(2)
Semi realidade	(3)	(4)
Mundo real	(5)	(6)

Fonte: Alro e Skovsmose (2006).

Em decorrência do quadro 2, o ambiente (1) é aquele que contém tarefas no paradigma do exercício com alusões a matemática pura; (2) é quando as mesmas referências aparecem numa tarefa de exploração investigativa; já o ambiente (3) é aquele que retorna para o paradigma do exercício, mas tem seu contexto de referência em alguma aplicação fictícia. Paralelamente, o ambiente (4) é aquele que permite numa realidade fictícia investigar conceitos matemáticos a fim de formar o pensamento crítico.

Por sua vez, com referências ao mundo real surgem os ambientes (5) e (6). O primeiro deles referenciado, como os demais ambiente ímpares, no paradigma do exercício, objetivando a resolução de um problema de forma objetiva e o último com intuito de no mundo real, aprender e fazer matemática com vista na sua compreensão e aplicação para questões da vida em sociedade.

Com efeito, é possível vislumbrar, de acordo com Schroeder, Cucco e Oliveira (2018) que as atividades que congregam a IM e os cenários para investigação tem alta possibilidade de conterem uma perspectiva pedagógica crítica que conduz a prática pedagógica da Educação Matemática Crítica (EMC) na perspectiva de Skovsmose (2011).

Metodologicamente, para Ponte (2003, p. 3) existem quatro procedimentos para a realização de tarefas investigativas em aulas de matemática:

- Exploração e formulação de questões investigativas;
- Organização de dados e construção de conjecturas;
- Realização de testes e refinamento e sistematização das conjecturas;
- Construção de justificativas argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Conscientes desses procedimentos e com intenção de realizá-los de forma crítica, se estruturou o roteiro investigativo que trata este relato de experiência. Isso foi organizado em dois volumes, um para a utilização dos alunos e outro do professor. Essa escolha foi feita pela necessidade de elementos importantes na orientação das aulas que aplicaram o roteiro fossem contemplados, entre eles pode-se destacar a definição das regiões que foram calculadas as áreas.

Os referidos volumes estão organizados em quatro partes: i) conceito de unidades de área e algumas regiões planas; ii) fórmula de área de quadriláteros básicos: retângulo, paralelogramo e quadrado iii) outras fórmulas de áreas: triângulo, trapézio, losango e círculo. e iv) quadro síntese: resultados das partes anteriores.

3. IMPLEMENTAÇÕES EM CENÁRIOS EDUCATIVOS

Uma das intervenções ocorreu na cidade de Atalanta/SC, com uma turma de segundo ano de Ensino Médio, com dezoito estudantes. A intervenção ocorreu em dois encontros, 03 e 10 de outubro. Cada um desses com duração de 90 minutos. Os estudantes formaram seis trios, sua produção será codificada alfanumericamente como G1 à G6, a fim de oportunizar o anonimato aos sujeitos. O segundo contexto de intervenção aconteceu na cidade Rio do Oeste/SC, com uma turma de segundo ano do ensino médio com onze estudantes. A intervenção ocorreu em dois encontros, 04 e 10 de outubro, cada um desses com duração de 90 minutos. Neste contexto foram criados outros quatro grupos, uma dupla e três trios, codificados como G7 à G10, para análise.

Nos primeiros momentos das aulas houve a realização da parte i) do roteiro. De modo geral essa se apresentou valiosa para esse contexto, pois apresentou os estudantes ao ambiente que se desenvolve a proposta (área de figuras planas) e retomou a definição das figuras que já conheciam empiricamente.

No outro encontro, com as regiões planas a serem estudadas definidas, foi possível iniciar as atividades investigativas propriamente ditas (partes ii e iii), pois não foi mais uma revisão, os estudantes não conheciam os passos a serem realizados para as deduções das fórmulas. Com efeito, iniciaram-se os procedimentos de Ponte (2003), que serão abordados com detalhes na seção seguinte. Em cada uma das duas partes restantes os referidos procedimentos se repetiram. Até a parte 4 que conteve a síntese do estudo com o preenchimento de uma tabela com os resultados das conjecturas já refinadas e demonstradas geometricamente.

Ao fim do segundo encontro em ambos os contextos de intervenção, foi aplicado um questionário de satisfação disponível em https://bit.ly/34pNMGS, para avaliar: o roteiro investigativo; o desenvolvimento da atividade e a mediação dos professores. O detalhamento das respostas será dado na seção seguinte. Neste mesmo link está disponível o roteiro investigativo aplicado em seus dois volumes: do professor e dos estudantes.

4. DISCUSSÕES DOS RESULTADOS ORIUNDOS DAS IMPLEMENTAÇÕES

No primeiro cenário mencionado anteriormente, a parte i) consistiu num valioso instrumento de revisão, pois os estudantes mostraram-se engajados para diferenciar cada uma das figuras que delimitam as regiões. No segundo cenário, mesmo sendo uma revisão, percebeu-se maior dificuldade na definição das figuras, porém foi necessária para dar continuidade a ação investigativa.

Ainda no primeiro cenário, na parte ii) e iii), os estudantes mostraram dificuldades nos momentos de construção das conjecturas, segundo procedimento da investigação de acordo com Ponte (2003). No segundo cenário os estudantes estiveram comprometidos com o desenvolvimento das atividades, mostrando mais facilidade.

Ao longo da dedução da área do retângulo os estudantes foram orientados a quadricular a figura para perceber a quantidade de unidades de área presentes, no caso em centímetros quadrados. Com base nisso fora percebido que a quantidade de unidades de comprimento da base, multiplicado pela quantidade de unidades de comprimento da altura proporciona o resultado anterior, logo se deduziu coletivamente, após a socialização dos resultados e organizações dos grupos, que a área é dada pelo produto entre essas duas unidades de medida.

Na sequência, para dedução da área do paralelogramo, devido as orientações de construção e comparação com os passos anteriores, ao longo da socialização os estudantes dos grupos realizaram cortes no paralelogramo a fim de formar um retângulo das mesmas dimensões que o caso anterior. Assim, concluíram que a partir de qualquer paralelogramo é possível formar um retângulo, assim, a área definida é a mesma, bem como a fórmula. Implicitamente utilizou-se nesta dedução de área a equivalência da área do paralelogramo com a área do retângulo construído a partir daquele paralelogramo.

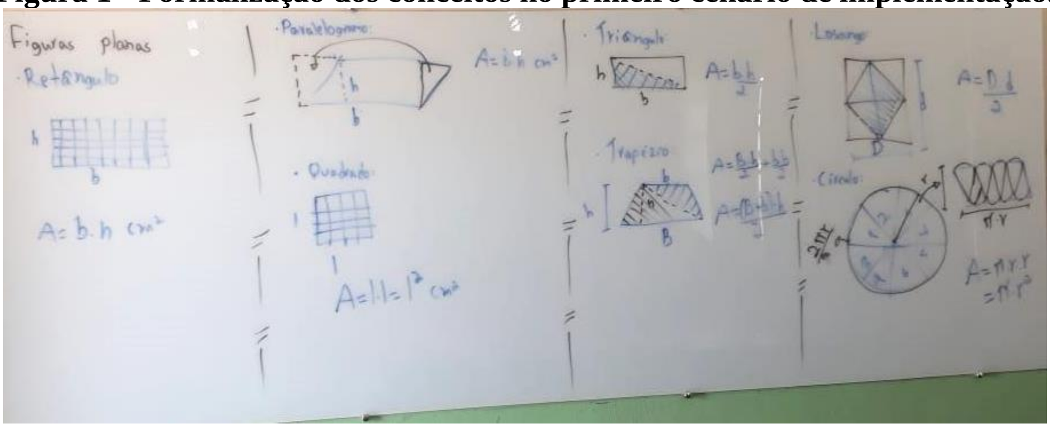
Na dedução da fórmula do quadrado o procedimento foi rápido. Como estava definido na parte i), o quadrado é um caso particular do retângulo, logo, os estudantes perceberam que sua área também é um caso particular da fórmula do retângulo. Para isso novamente realizaram o quadriculado e perceberam que a quantidade de unidades de comprimento em cada lado foi igual.

Na dedução da área do triângulo, devido as orientações, que foram novamente a partir do retângulo inicial, e realizar o traço da diagonal, foi possível que os estudantes percebessem que os triângulos formados tem a mesma área, logo, a área do triângulo é a metade do retângulo, por isso sua expressão analítica é a mesma do retângulo, só que dividida por dois.

Neste momento, iii) do roteiro, após a construção do trapézio e novamente o traço da diagonal, se formaram dois triângulos. O roteiro e as orientações *in loco* direcionaram os estudantes a pensar a área do trapézio como a soma dos dois triângulos. Ao longo da socialização das conjecturas os estudantes mostraram quais foram as alturas e a base que identificaram para cada triângulo. Com isso se deduziu a área numericamente e posteriormente a dedução da fórmula. Neste caso em especial, além de montar geometricamente é preciso que os estudantes percebessem que $\frac{h}{2}$ é um fator comum de ambas áreas e foi colocado este fator em evidência para definir a área da figura. Essa observação da evidência foi possível apenas na lousa, pela orientação do professor.

Para dedução da área do losango, novamente foi retornado ao retângulo inicial, quando houve o recorte da região, os quatro triângulos excedentes e o losango correspondem a mesma área, assim, se definiu que numericamente a área do losango é metade do retângulo que completa o losango, e como no caso do triângulo, também aparece um dividido por dois, mas no caso aqui não são usados base e altura, pois esses não são elementos do losango, assim, se utiliza as diagonais como elementos da fórmula, como ilustra a divisão a direita da figura 1.

Figura 1 - Formalização dos conceitos no primeiro cenário de implementação.



Fonte: Acervo dos autores (2019).

Na parte iv) os estudantes construíram o círculo e realizaram recortes, a fim de dividir a figura em oito partes iguais. Percebe-se que a figura formada pela reunião das oito partes se aproxima de um paralelogramo, como sua área já foi definida no roteiro, a partir de sua base e altura. Assim, para o caso do círculo a base do paralelogramo formado com os recortes é dada por metade da circunferência, e a altura é exatamente o raio. Assim, a área é dada pelo produto dessas medidas. Ressalta-se que esta é uma dedução informal, que serve para intuir os estudantes dos procedimentos. No entanto, para contemplar todos os casos e demonstrar com o devido rigor matemático seria necessário utilizar o método da exaustão ou a aplicação de integrais, o que não foi feito por fugir do escopo da aula e do roteiro.

De modo geral nas partes ii) e iii), como conheciam algumas fórmulas (como foi o caso do paralelogramo, triângulo, trapézio e círculo) de outras etapas escolares, os estudantes sentiram-se desafiados em imaginar a dedução dessas a partir de desenhos e recortes, descritos nas instruções do roteiro investigativo. No entanto, a partir da socialização das conjecturas iniciais e aprimoramento das proposições, constituinte do terceiro passo de Ponte (2003), os estudantes mostraram-se conscientes dos procedimentos implementados. O mesmo ocorreu ao longo da formalização feita na lousa pelo professor (Figura 1), após os três passos anteriores da investigação.

Com efeito, na parte iv), a maioria dos estudantes procederam com o preenchimento correto do quadro, que além de demonstrar o refinamento correto das conjecturas ainda se apresenta como valioso instrumento de estudo, pois sintetiza os resultados subjacentes as atividades propostas pelo roteiro.

Para finalizar ambas as implementações e com intensão de quantificar aspectos relativos a: I- análise do roteiro investigativo e II - contribuições para o ensino e papel do professor na implementação das atividades, foi aplicado com os estudantes um questionário de satisfação nos modelos da escala de verificação de *likert* na perspectiva de Silva Junior e Costa (2014). A referida escala apresenta cinco pontos, através deles os grupos se posicionavam de acordo com a sua concordância ao item respondido, esta escala variava de discordância até concordância, passando por discordância parcial, não concordância ou não discordância e concordância parcial.

As questões foram divididas em categorias de acordo com os dois aspectos supracitados. Como o objetivo deste relato é a implementação e construção do roteiro investigativo em sala, analisamos as questões pertinentes apenas ao segundo.

A primeira questão analisada era se “houve sequência na disposição das atividades do roteiro”, dos 21 questionários analisados, 18 concordaram que esta sequência ocorreu, enquanto apenas um discordava, também 18 concordaram com a afirmação “O conjunto de atividades oportunizou aprofundamento conceitual sobre área de figuras planas” ocorrido através do roteiro investigativo construído. Através desta análise podemos verificar que o roteiro respeitava uma ordenação, necessária para que ocorressem as deduções das áreas das figuras, facilitando o entendimento e atingindo o objetivo de estimular a investigação e o facilitar o aprendizado.

Na questão “os recortes e dobraduras serviram de instrumento para a sua aprendizagem?”, as respostas tiveram uma maior variação: 10 concordaram, 8 concordaram parcialmente, 2 não concordaram e nem discordaram e um discordou. Na questão “houve abstração da forma geométrica que se estudou a área em cada caso”, 15 concordaram, 4 concordaram parcialmente, um não concordou e nem discordou, e um discordou parcialmente. Esta analise através da escala de verificação de *likert* contribuem para que seja possível efetuar correções necessárias tanto na construção e ordenação do roteiro, bem como, em futuras implementações do mesmo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Passadas as intervenções é possível inferir que o presente texto evidenciou a criação de um roteiro investigativo e as implementações em dois cenários distintos. Nesse processo, foram percebidos que as potencialidades do mesmo, presente na literatura sobre IM, se repetiu nas experiências que compõem esse relato.

Uma limitação do estudo aqui desenvolvido diz respeito a alguns vícios da trajetória estudantil, entre eles a reprodução acrítica de algumas fórmulas e a definição de algumas figuras. Como perspectiva de continuidade é possível imaginar uma ampliação no sentido de aplicar esse roteiro para estudantes mais jovens que não tem os referidos vícios.

No entanto, devido a natureza dos resultados, recomenda-se a implementação de atividade de investigação, mesmo no ensino médio, por possibilitar a curiosidade e a possibilidade adicionar novas perspectiva sobre um estudo já realizado em anos anteriores, como foram os casos aqui apresentados.

Outro fator relevante que as experiências relatadas neste texto fazem emergir é o papel do professor. É de extrema importância a proposição da IM de forma objetiva e a condução da mesma de forma mediadora. Tal fator tem peso importante na criação e autonomia que se almeja dos estudantes no desenvolvimento dos conceitos ou conteúdos que estão sendo investigados.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. In: ACTAS do PROFMAT. Lisboa: APM,. p. 25-39, 2003.

SCHROEDER, T. R.; CUCCO, I.; OLIVEIRA, F. P. Z. de. INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO II**:** Materialização da teoria. In: VII Jornada de Educação Matemática, 2018. **Anais...**, Passo Fundo, 2018, p. 1 – 10. Disponível em: http://docs.upf.br/download/jem/Trabalhos2018/Eixo4/RE_10353752908-verso_%20identificada.pdf. Acessado em: 27 out. 2019.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica.** Campinas, SP. Papirus. 6. ed. 2011.

SILVA JÚNIOR, S. D.; COSTA, F. J. . **Mensuração e Escalas de Verificação**: uma Análise Comparativa das Escalas de Likert e Phrase Completion. In: XVII SemeAd - Seminários em Administração, 2014, São Paulo. Seminários em Administração, 2014.

FONTE(S) FINANCIADORA(S)

Estado de Santa Catarina – Secretaria de Estado da Educação - Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina – UNIEDU.