

IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro

**CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE CÁLCULO:
REFLEXÕES DO GRUPO TRANSIÇÃO DO PROJETO
FUNDÃO – UFRJ****Angela Cássia Biazutti***IM-UFRJ**biazutti@im.ufrj.br***Luciano Roberto Padilha de Andrade***SENAI – CETIQT; UNIG; SEEDUC-RJ; SEMED-MESQUITA**lucpad2013@gmail.com***Rafael Filipe Novôa Vaz***IFRJ/CPAR; PEMAT/UFRJ**rafael.vaz@ifrj.edu.br***Resumo:**

A reprovação e evasão nas disciplinas de Cálculo nos cursos de graduação vem sendo objeto de pesquisa nas últimas décadas. Nas diferentes instituições de Ensino superior (IES) onde foram coletados dados para as pesquisas do grupo Transição do Projeto Fundão-UFRJ, estas disciplinas apresentam taxas de reprovação e evasão elevadas. Este trabalho buscou realizar um levantamento da memória das diversas atividades aplicadas pelo grupo nas IES ao longo dos últimos anos e seus principais resultados, referentes às dificuldades dos alunos e suas causas e, paralelamente, uma análise qualitativa de trabalhos realizados por outros autores no contexto do ensino de Cálculo. O grupo Transição vem buscando novas opções didáticas que possibilitem minimizar as diversas dificuldades e, assim, reduzir as taxas de reprovação e evasão nas turmas de Cálculo. Apresentamos algumas conclusões desta pesquisa e sugestões de caminhos pedagógicos que facilitem uma aprendizagem significativa dos conteúdos da primeira disciplina de Cálculo, além de alguns resultados já obtidos com a utilização de material didático desenvolvido pelo grupo. Uma grande dificuldade dos alunos evidenciada nos dados obtidos é no que se refere ao tópico funções. Apresentamos sugestões de atividades utilizando a metodologia de resolução de problemas, associada à utilização do software GeoGebra, que possam auxiliar o professor e os alunos a preencher lacunas no processo ensino-aprendizagem deste tópico, seja nas primeiras aulas de Cálculo, ou em uma disciplina específica de Pré-Cálculo, antes de abordar os conteúdos mais complexos da disciplina.

Palavras-chave: funções; evasão e reprovação; Cálculo I; resolução de problemas.

1. Introdução

Há vários anos, o alto índice de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral, tanto em universidades públicas como particulares, tem despertado o interesse de pesquisadores e o temor dos estudantes. Entre 1990 e 1995 a taxa de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral na Universidade Estadual de São Paulo (USP) variava entre 20% e 70% (BARUFI, 1999), na Universidade Federal Fluminense (UFF), entre 1996 e 2000 a taxa de reprovação variava entre 45% e a alarmante taxa de 95% (REZENDE; 2003) e na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), a taxa de reprovação entre 2011 e 2013 foi de 75% (SANTOS; PINTO; SOUZA, 2016).

As taxas de reprovação podem estar diretamente associadas às taxas de evasão. Para realizar um comparativo e destacar a gravidade do problema, podemos observar as taxas de evasão no ensino superior. Entre 2009 e 2014, de acordo com os dados do Censo da Educação Superior, a graduação em Direito acumulou uma evasão de aproximadamente 45%, nas Engenharias Metalúrgica e Mecânica a taxa foi de 60%, enquanto que nos cursos de Matemática (sem especificar se licenciatura, bacharelado, etc) a evasão atinge 90% dos aluno (SACCARO; FRANCA; JACINTO, 2019).

Cálculo é, epistemologicamente, um conteúdo difícil de ser ensinado e de ser aprendido. “Se o obstáculo não for apenas nosso ou de algumas outras pessoas, mas for mais generalizado, ou foi generalizado em alguma época ou em alguma cultura, então ele é conhecido como um obstáculo epistemológico” (SIERPINSKA, 1992, p. 28). No entanto, diversas causas para essa dificuldade são apresentadas na literatura. Oliveira, Gonçalves e Piasson (2018) realizaram um mapeamento dos artigos, teses e dissertações que tratam da temática Ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) com o uso do GeoGebra, entre os anos de 2010 a 2018. Neste estudo, os autores identificaram como principais causas para o baixo rendimento dos estudantes a falta de conhecimentos matemáticos da Educação Básica (ou da escola), as falhas metodológicas de ensino dos professores, as falhas na estrutura curricular dos cursos e a complexidade dos conceitos.

Diversos trabalhos têm investigado o alto índice de evasão e reprovação na primeira disciplina de Cálculo e as principais causas para as dificuldades na transição do Ensino Médio para o Superior, que se refletem nas dificuldades na aprendizagem dessa disciplina. Entre eles estão os trabalhos de Rezende (2003), Gonçalves (2007), Cury e Bortoli (2011), Masola e Allevato (2016) e Torres e Havelange (2019). Vários deles atribuem o alto índice de reprovação em Cálculo à carência de alguns conteúdos pelos

discentes no contexto da Matemática básica, apresentando-se como obstáculo à compreensão dos diversos temas do Cálculo, mas este, definitivamente, não é o único obstáculo.

Várias pesquisas do grupo Transição do Projeto Fundação-UFRJ foram realizadas, desde 2012, para compreender as dificuldades na aprendizagem de Cálculo e apontar caminhos que possam minimizar as dificuldades encontradas por docentes e discentes nos cursos de Cálculo, sobretudo em Cálculo 1.

Este trabalho tem por objetivo realizar uma revisão bibliográfica das pesquisas do grupo Transição ao longo desses oito anos e apresentar os resultados oriundos de uma investigação realizada em duas universidades, que teve como objetivo reduzir as dificuldades dos alunos ingressantes no nível superior. Nessa investigação, atividades envolvendo resolução de problemas foram utilizadas no início de cursos de Cálculo 1 com bons resultados.

2. Os oito anos de pesquisa do grupo Transição

Foi constatado pelo grupo Transição, ao longo da aplicação de diversas atividades em IES, tanto na rede pública como na rede privada de ensino superior, um aumento das dificuldades, ao longo dos últimos oito anos, que os discentes enfrentam na transição entre o Ensino Médio e o Superior. São diversos os conteúdos de Matemática necessários para a aprendizagem do Cálculo que não foram devidamente compreendidos pelos alunos. As conclusões do grupo levam a crer que o mal desempenho acadêmico dos alunos em Cálculo está diretamente ligado a lacunas na aprendizagem de funções durante o período da Educação Básica.

Por outro lado, atribuir a responsabilidade por um ‘fracasso do ensino de Cálculo’, exclusivamente à Educação Básica nos parece equivocado, pois pressupõe que os professores desta disciplina não possam ajudar os alunos em suas dificuldades com respeito a tópicos da Educação Básica e que, além disso, nunca ocorram falhas no processo ensino-aprendizagem dos tópicos de Cálculo. Deste modo, os professores universitários e a universidade não podem estar isentos de responsabilidade por esse ‘fracasso’. A responsabilidade dessa situação é de todos.

Em consonância com as pesquisas de Polya (1978), Sierpinska (1992), Duval (2003, 2009) e Onuchic e Allevato (2011), ao longo desses oito anos, o grupo Transição produziu diversos trabalhos relacionados ao ensino de Cálculo, ao ensino de Pré-Cálculo

e em relação ao ensino de funções no Ensino Médio. Os trabalhos produzidos pelo grupo voltados ao Ensino Superior, mais especificamente, que versam sobre dificuldades na aprendizagem de Cálculo e contribuições para um ensino mais eficaz, completando as lacunas pré-existentes do conteúdo de funções e ressignificando e aprofundando estes conteúdos, são apresentados no quadro 1.

Quadro 1: Trabalhos produzidos pelo grupo Transição

	Título	Autores	Publicação
1	Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?	Lilian Nasser Geneci A. de Sousa Marcelo A. Torraca	V SIPEM (2012) Petrópolis-RJ
2	A transição do ensino médio para o superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas	Geneci Sousa, Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Daniella Assemany, Cecilia Azevedo	XI ENEM (2013) Curitiba - PR
3	Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação	Lilian Nasser Geneci A. de Sousa Marcelo A. Torraca	CIAEM (2015) México
4	Mobilizações didáticas para aprendizagem do conceito de função.	Lilian Nasser Geneci A. de Sousa Marcelo A. Torraca	Capítulo do livro (2016)
5	Cálculo Diferencial e Integral I: como os alunos estão iniciando essa disciplina no curso de engenharia?	Geneci A. de Sousa Luciano R. P. de Andrade	XII ENEM (2016)
6	Explorando imagens conceituais de alunos de Cálculo I relacionadas à continuidade de funções	Jeanne Barros Lilian Nasser Geneci A. de Sousa	EEMOP (2017) Ouro Preto - MG
7	Desempenho em Cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior	Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Geneci Sousa	GEPEM (2017)
8	Explorando problemas desafiadores de otimização no Ensino Médio com o Geogebra	Angela Biazutti, Rafael F. Novôa Vaz, Magno Ferreira	VII EEMAT (2018)
9	Conversão de representações na transição do Ensino Médio para o Superior	Angela Biazutti, Lilian Nasser, Marcelo Torraca, Jeanne Barros, Alexandre Oliveira	CAREM (2018) La Plata - Argentina
10	Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I	Lilian Nasser Angela C. Biazutti Marcelo Torraca Jeanne Barros	CIAEM 2019 Medelin - Colômbia
11	Resolução de problemas como trampolim para a aprendizagem de Cálculo I	Lilian Nasser Angela C. Biazutti Jeanne Barros Rafael F. Novôa Vaz	XIII ENEM (2019) Cuiabá - MT

Fonte: Elaborado pelos autores

3. Contribuições para o ensino de Cálculo

3.1 O que diz a literatura

Rezende (2003) alerta que as aulas de Cálculo, em geral, preparam os estudantes

apenas para as avaliações, priorizando exercícios e demonstrações no quadro, o “como fazer” em detrimento do raciocínio sobre “o quê” e “porquê”. Em sua tese de doutorado, Andrade (2020, p. 51) atribui o fracasso do ensino de Cálculo “devido, principalmente, às dificuldades de natureza epistemológica, especificamente, pelas ideias do Cálculo não serem, em geral, trabalhadas na Educação Básica”.

Em relação às contribuições encontradas na literatura para minimizar esse problema, destacam-se: a utilização de novas abordagens metodológicas; melhor preparação do professor quanto ao conteúdo ensinado e suas práticas pedagógicas; o uso intensivo de TICs (Tecnologias de Informação e Comunicação) e do GeoGebra; introdução do ensino de CDI no Ensino Médio (OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, 2018). Estas tendências se articulam com as identificadas por Andrade (2020): a inserção de noções de Cálculo no Ensino Médio; metodologias diferenciadas para o ensino de Cálculo; reforço, tutoria ou monitoria e a inserção do Pré-Cálculo na graduação.

Sobre a revisão de conteúdos da Educação Básica em uma disciplina específica, normalmente denominada Pré-Cálculo, existem relatos positivos, como em Palis (2007). Outro trabalho que aborda a implantação desta disciplina é de autoria de Belletini e Souza (2018), com alguns resultados positivos e dificuldades.

A utilização de softwares possibilita a experimentação com conteúdos matemáticos, além de estimular a percepção visual do aluno (BORBA; PENTEADO, 2001). O estudo de Oliveira, Gonçalves e Piasson (2018) concluiu que os pesquisadores e autores dessas pesquisas, em geral,

assumem a ideia de que, ao explorar o GeoGebra, este se torna um fator de modificação à compreensão dos conceitos e uma importante ferramenta de mediação didática. Os autores também percebem no software a presença de recursos tecnológicos com potencial para contribuir com a melhora do processo de ensino do CDI, em especial, os recursos de visualização gráfica e animação, os quais possibilitam a ressignificação dos conceitos relacionados a esta disciplina, e proporcionam o equilíbrio entre o processo visual e algébrico (OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, 2018, p. 481-482)

Dificuldades dos alunos no estudo de taxas relacionadas, máximos e mínimos de função, por exemplo, podem ser reduzidas ao utilizar a dinamicidade existente dos recursos do GegoGebra. A utilização da tecnologia pode ressignificar a forma de compreender o contexto dinâmico de situações problema e a forma de identificação e

visualização das variáveis e funções envolvidas.

3.2 Pesquisas do grupo Transição

Os trabalhos desenvolvidos pelo grupo Transição envolveram, em geral, coleta de dados obtidos com aplicação de testes criados por membros do grupo em turmas de Cálculo de universidades públicas e privadas, comparações de resultados entre alunos de universidades e alunos do Ensino Médio, de colégios públicos e privados, análise de erros cometidos em provas de Cálculo aplicadas pelos professores das turmas e questionários respondidos por alunos e professores. Diversas pesquisas do grupo Transição apontam que a maioria dos problemas do Cálculo estão associados à falta de uma representação geométrica corretamente associada à representação via linguagem verbal, observados em diversos problemas de máximos e mínimos e de taxas relacionadas. Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação dos conceitos de CDI, mas na dificuldade dos discentes em fazer uma representação geométrica que permita a identificação da relação entre os elementos da figura e os conceitos e na modelagem dos problemas.

Uma das principais dificuldades no ensino de Cálculo está no traçado de gráficos. Nasser, Sousa e Torraca (2012) apresentaram uma investigação do desempenho de alunos de Cálculo no *traçado de gráficos* e foi constatado que as dificuldades se devem, principalmente, à falta do desenvolvimento de habilidades gráficas na Educação Básica. Eles sugerem ações que podem ajudar a superá-las, como desenvolvimento de atividades de transformações, como translações, reflexões, contrações, etc. Pesquisa posterior realizada por Sousa e Andrade (2016) também apontou para a necessidade de incentivar a *construção de gráficos a partir das transformações no plano*, em especial com o auxílio de software dinâmicos, Geogebra por exemplo, que podem possibilitar uma maior interação e, conseqüentemente, melhor aprendizagem dos discentes.

Sousa, Nasser, Torraca, Assemany e Azevedo (2013) apontam que os discentes devem ser estimulados com atividades envolvendo a *modelagem de problemas*, através da análise das variáveis envolvidas e da relação entre elas. Neste trabalho apontam a importância da visualização de sólidos geométricos, com análise dos elementos que aparecem em suas seções transversais e interseções, que podem facilitar a resolução de problemas de máximos e mínimos.

Barros, Nasser e Sousa (2017) analisaram respostas, apresentadas a uma questão da primeira prova de Cálculo I de alunos de um curso de graduação em Matemática, e concluíram que a dificuldade dos alunos em apreender os conceitos matemáticos, nesta disciplina, pode estar relacionada com a falta de incentivo ao pensamento matemático na Educação Básica, que privilegia, em geral, *a resolução de exercícios de uma forma mecânica*.

Biazutti, Nasser, Torraca, Barros e Oliveira (2018) realizaram um teste diagnóstico com 252 alunos do Ensino Médio de escolas públicas e particulares e 190 alunos do Ensino Superior, de universidades públicas, todas do estado do Rio de Janeiro. Os resultados do teste mostram, efetivamente, que os alunos têm grande dificuldade com a *compreensão do conceito de função* e suas diferentes representações, principalmente com as *conversões entre o registro analítico e o gráfico*.

O trabalho de Nasser, Biazutti, Torraca e Barros (2019) apresenta um teste diagnóstico aplicado a 237 alunos de vários cursos de graduação, em duas universidades públicas do Rio de Janeiro, no início das aulas da disciplina de Cálculo I. As principais dificuldades observadas nas respostas dos alunos foram: *leitura e interpretação* de enunciados de problemas; modelagem desses problemas; conversão da representação verbal para a analítica, em termos de funções afim e polinomiais; *dificuldade com o trato algébrico*.

Em dois trabalhos, Nasser, Sousa e Torraca (2015, 2017) analisaram soluções obtidas por alunos de Cálculo I, para problemas envolvendo compreensão do conceito de função, taxas relacionadas e máximos e mínimos, e, além de dificuldades já mencionadas, observaram erros causados por concepções ingênuas dos alunos, como a crença de que o gráfico de uma função pode ser sempre obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, dificuldades para *representar graficamente funções definidas por mais de uma sentença* e na utilização de propriedades e teoremas da geometria plana como semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.

4. Investigando a resolução de problemas em Cálculo 1

Como apresentado na introdução deste texto, os índices de reprovação em Cálculo em diversas universidades são altos (BARUFI, 1999; REZENDE; 2003; SANTOS; PINTO; SOUZA, 2016). Na UFRJ, a situação não é diferente. Para realizar um comparativo das taxas de reprovação, analisamos dez turmas de Cálculo 1 no primeiro

semestre de 2019. O índice de reprovação variou de 47% a 78%, com uma média geral de 40,8% de aprovação. Cabe ressaltar que, dentre os reprovados, 40% abandonaram a disciplina, sendo categorizados como reprovados por falta.

Com o objetivo de ajudar professores e estudantes a minimizar estes índices, foi elaborada pelo grupo Transição uma série de atividades didáticas, baseadas em resolução de problemas, associadas à utilização do software GeoGebra, destinadas aos professores de Cálculo 1 (NASSER; BIAZUTTI; BARROS; VAZ, 2019). Estas atividades eram compostas de apresentações multimídia e roteiros para os professores, envolvendo 13 problemas, e foram desenvolvidas para serem realizadas de forma presencial ou à distância, dentro de uma disciplina de Pré-Cálculo ou como componente inicial das aulas de Cálculo com objetivo de melhorar o desempenho acadêmico posterior dos alunos nesta disciplina. Algumas destas atividades são apresentadas neste trabalho, assim como resultados obtidos com a sua utilização em turmas da primeira disciplina de Cálculo em duas universidades públicas do Rio de Janeiro.

Os problemas selecionados envolvem questões sobre funções, em geral a serem identificadas pelos alunos, a partir das informações fornecidas. Nos roteiros das atividades os professores e alunos foram incentivados a utilizar o GeoGebra porque os autores o consideram uma ferramenta facilitadora deste processo de construção de uma ponte entre as representações analítica e geométrica. A solução dos problemas envolve também manipulação algébrica, de modo a que sejam discutidas em sala as dúvidas dos alunos no que concerne a tópicos mais básicos de Matemática. Os alunos também foram orientados a complementar as atividades em sala com a consulta a material disponível online por Rocha (2018) sobre tópicos variados de Matemática da Escola básica.

Os treze problemas desenvolvidos foram selecionados de modo a explorar aspectos de Matemática em que os alunos mostraram dificuldades, comprovadas em alguma das pesquisas do grupo. O trabalho de Nasser, Biazutti, Barros e Vaz (2019) apresentou dois destes problemas, que também fizeram parte de um teste diagnóstico das dificuldades dos alunos, envolvendo uma função afim por partes, e uma função polinomial do terceiro grau e dois outros, sendo mais um sobre função afim por partes e o último sobre função quadrática. A seguir serão apresentados quatro outros problemas presentes nessas atividades e seus respectivos objetivos pretendidos.

O problema apresentado na figura 1, tem como objetivo trabalhar com otimização de função não quadrática, mas que pode ser resolvido com o auxílio das suas

propriedades, através de pensamento matemático baseado nas propriedades de crescimento e decrescimento das funções. Neste problema já se conhece a representação algébrica da função. Com o auxílio do GeoGebra pode-se obter a representação geométrica, que vai ser confirmada mais tarde, quando os alunos estudarem os tópicos de limite e derivada. Assim, mantém-se o projeto de utilizar somente as funções já estudadas no Ensino Médio, mas já criando uma expectativa nos alunos sobre o que será estudado mais tarde.

O volume de água V , medido em m^3 , que vazou de um reservatório, foi calculado, após t horas, contadas a partir de 8h da manhã de um certo dia, e foi estabelecido como satisfazendo à expressão $V = \frac{1}{\sqrt{7+6t-t^2}}$, com $1 \leq t \leq 6$. Determine quando o volume de água que vazou foi mínimo e qual foi este volume mínimo.

Figura 1 – Problema 9 do material didático
Fonte: elaborado pelos autores

O problema ilustrado na figura 2 tem como objetivo principal apresentar a função modular de uma forma original. A ideia aqui é fazer os alunos perceberem que ela representa a solução do problema de uma forma mais elegante, no sentido de simples, do que uma função afim definida por duas sentenças. A solução do problema então pode envolver dois tratamentos dentro do mesmo registro de representação (o algébrico), segundo Duval (2003, 2009). Após a resolução deste problema é recomendado, no roteiro para o professor, que ele discuta com os alunos como ficaria a solução mudando a posição do posto na estrada, quais as posições possíveis para ele e explorando a translação.

Um posto de gasolina encontra-se localizado no km 100 de uma estrada retilínea. Um carro com o tanque de gasolina cheio, parte do km 0 desta estrada em direção a uma cidade situada a 250km do ponto de partida.

a) Num dado instante sabe-se que o carro está a 10 km do posto, em frente a uma placa indicando a quilometragem da estrada. Indique as possíveis posições do carro (quilometragem da estrada indicada na placa).

b) Determine a expressão algébrica da função que associa a posição x do carro na estrada em cada instante do seu deslocamento desde a partida até chegar à cidade, à distância y deste carro ao posto; determine também o domínio desta função.

c) Determine o gráfico da função do item (b).

d) Determine a distância máxima que o carro poderá estar do posto, e a posição do carro, neste momento (quilometragem da estrada).

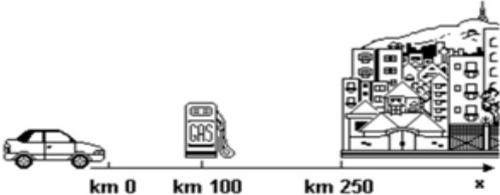


Figura 2 – Problema 6 do material didático
Fonte: adaptado de UFRN, acessado em 19/12/2018.

O problema 10 do material, apresentado na figura 3, foi incluído de modo a mostrar que problemas de otimização de outras funções, além das polinomiais de grau inferior a três, podem ser resolvidos, utilizando somente outros conteúdos do currículo

do Ensino Médio, como a desigualdade das médias, que faz parte dos tópicos de Estatística. Mas a ideia aqui é que o aluno perceba que o processo de chegar à solução vai ficando mais complicado, e para cada tipo de função é necessário procurar conteúdos diferentes. Assim pode-se argumentar que seria melhor ter um procedimento único, que pode ser utilizado para uma infinidade de funções, adequado a resolver problemas de otimização, que vai ser estudado mais tarde, ou seja, a derivada e suas propriedades.

Deseja-se construir uma piscina de modo que ela tenha quatro lados, obedecendo o seguinte formato: dois lados opostos são retos e paralelos de mesmo comprimento e os outros dois têm formato de semicircunferências, de mesmo raio, ambos côncavas para o mesmo lado. Sabe-se que a piscina tem 200 m^2 de área. Determine:

(a) a expressão algébrica do perímetro da piscina, como função do raio das semicircunferências;

(b) as dimensões (em metros) da piscina de perímetro mínimo e qual será a medida deste perímetro, utilizando o resultado obtido no item (a).

Figura 3 - Problema 10 do material didático

Fonte: elaborado pelos autores

O problema apresentado na figura 4 foi escolhido para constar neste trabalho porque envolve uma função exponencial e os alunos, em questionário respondido após utilização do material, mencionaram que têm muita dificuldade com este tipo de função. Além disso, a técnica utilizada para determinar a função que representa a situação-problema é a mesma que é usada em problemas de Matemática Financeira, como em Nasser e colaboradores (2012), o eixo das setas, permitindo resolver problemas bastante sofisticados de porcentagem e juros compostos sem recorrer a fórmulas e procedimentos mecânicos. A Matemática Financeira na Educação Básica também é um dos focos de interesse do grupo Transição. Problemas como o da figura 4 também vão aparecer mais tarde, após o estudo de derivadas e suas propriedades. É importante, para ajudar os alunos a construir um pensamento matemático mais avançado, frisar que um mesmo problema pode admitir distintas formas corretas de resolução.

A área de superfície de um litoral coberta por certas algas tem crescido aproximadamente 25% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior, de acordo com as pesquisas dos biólogos. Atualmente eles estimam que a área coberta por algas é de, aproximadamente, 4096 m^2 .

(a) Determine qual a área coberta por águas daqui a t anos.

(b) Estime quantos anos se passarão até a população de algas cobrir uma área aproximada de 15625 m^2 .

Figura 4 – Problema 12 do material didático

Fonte: adaptado de Iezzi, Dolce, Degenszajn e Perigo (2011)

As atividades foram aplicadas em três turmas de cursos de graduação em duas universidades públicas do Rio de Janeiro, pelos professores das turmas, nas primeiras 3 aulas da disciplina inicial de Cálculo, no primeiro semestre letivo de 2019. Os docentes e

os discentes responderam um questionário avaliativo quando terminaram as atividades e os discentes responderam outro questionário após realizarem uma ou duas avaliações de Cálculo.

Nasser, Biazutti, Barros e Vaz (2019) constataram que os docentes gostaram do material didático, especialmente por utilizar de forma bastante dinâmica o software GeoGebra - dessa forma foi possível apresentar os tópicos vistos nas aulas iniciais de uma forma mais original e interessante; os discentes também aprovaram a proposta, percebendo que não estavam simplesmente fazendo uma revisão de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, estavam também aprofundando o estudo de vários tópicos; o GeoGebra foi aprovado por eles, facilitando a modelagem matemática dos problemas abordados, tornando mais claros os diferentes registros de representação de funções, auxiliando na validação dos resultados.

Serão descritos agora resultados que não fizeram parte do trabalho de Nasser, Biazutti, Barros e Vaz (2019). Eles se referem às taxas de aprovação, sem a utilização do material em 2018/02 e com a utilização do material em 2019/01. O quadro 2 mostra os resultados obtidos.

Quadro 2: resultados finais de alunos

Turma	Sem utilizar o material	Utilizando o material
Bacharelado em Ciências - UFRJ	111 alunos – 29,7% de aprovação	28 alunos – 54 % de aprovação
Licenciatura em Matemática - UFRJ	63 alunos – 38% de aprovação	51 alunos – 37,3% de aprovação
Engenharia/ Computação - UERJ	57 alunos - 29,8% de aprovação	59 alunos – 39% de aprovação

Fonte: elaborado pelos autores

Cabe ressaltar que o baixo índice de aprovação da turma de Bacharelado em Ciências em 2018/02 não pode ser creditado ao número grande de alunos em sala, porque eles estavam distribuídos em duas turmas, uma com 60 alunos e 41,7% de aprovação e a outra com 51 alunos e 15,7% de aprovação. Na turma de Licenciatura em 2019/01 vários alunos começaram a assistir aulas depois daquelas em que foi utilizado o material, por conta das reclassificações de vagas. Os resultados da turma de Engenharia, em 2018/02, foram comparados com os da turma de Computação, em 2019/01, porque foi o único caso em que ambas as turmas estiveram sob a responsabilidade do mesmo professor. Apesar de cursos distintos, a ementa e nível de dificuldade de avaliações foi similar. Os alunos de Engenharia têm, em geral, resultados melhores no vestibular do que os de Computação.

Em duas das três turmas os resultados indicam que este material parece ter ajudado os alunos em suas dificuldades, pelo menos no que se refere aos índices de reprovação.

Tal resultado sugere uma análise mais profunda. O próximo passo poderia ser verificar os resultados com a utilização do material em outras turmas de Cálculo 1 e também ao longo de um semestre letivo completo, em uma turma de Pré-Cálculo. Dispondo de um maior número de dados, nestas investigações futuras, o material certamente poderia ser muito enriquecido. Estes projetos poderão ser implementados certamente num contexto futuro pós-pandemia.

5. Considerações Finais

A partir dos trabalhos que focaram no diagnóstico dos tipos de dificuldades dos alunos e suas causas, e do aperfeiçoamento do material didático desenvolvido, o grupo está produzindo um e-book, a ser utilizado por professores do Ensino Médio, pelos professores de Pré-Cálculo ou nas aulas iniciais primeira disciplina de Cálculo.

O material didático descrito nesse texto pode contribuir para o ensino de Cálculo pois sugere algumas abordagens benéficas à aprendizagem dos estudantes de acordo com a literatura: a utilização de problemas significativos, contextualizados que motivem a aprendizagem (POLYA, 1978), que propiciem a utilização de diferentes tratamentos dentro do mesmo registro de representação (DUVAL, 2003), que possibilitem atividades de modelagem (ONUICHIC; ALLEVATO, 2011) e que envolvam tópicos relacionados ao ensino de funções em uma abordagem mais próxima daquela comumente adotada no ensino superior (NASSER; BIAZUTTI; BARROS; VAZ, 2019). Cabe ressaltar que, segundo Duval (2003, 2009), a utilização desses diferentes registros e da transição entre eles é uma condição necessária para realmente compreender o conceito de função, que é um pré-requisito para a aprendizagem de limite, derivada e integral.

O uso frequente de artifícios de simplificação e fatoração algébrica sem que o aluno tenha a devida compreensão do processo matemático também é uma das causas das dificuldades na resolução de problemas em Cálculo 1. O imediatismo na busca da resposta potencializa o fracasso no desenvolvimento e compreensão da disciplina. As atividades sugeridas neste trabalho são muito interessantes e ricas, de fato não privilegiam procedimentos mecânicos, e podem ser apresentadas de forma bastante dinâmica utilizando o software GeoGebra, conforme exposto em Biazutti, Vaz e Ferreira (2018). Um software gratuito e simples de usar, mesmo a partir de celulares, torna ainda possível a exploração das atividades com resolução de problemas, por parte dos alunos, de forma colaborativa, individualmente ou em grupo, de forma não presencial.

6. Referências

- ANDRADE, F. C. *O Pré-Cálculo na formação inicial do professor de matemática: múltiplos olhares*. 2020. 212f. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 2020.
- BARUFI, M. C. B. *A Construção/ Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. 1999. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.
- BARROS, J.; NASSER, L.; SOUSA, G. Explorando imagens conceituais de alunos de Cálculo I relacionadas à continuidade de funções. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO. *Anais...* UFOP, Ouro Preto, 2017.
- BELLETTINI, M. T.; SOUSA, S. A implantação da disciplina de Pré-Cálculo como política pedagógica de permanência nos cursos de graduação do centro tecnológico da UFSC. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GESTIÓN UNIVERSITARIA, XIII, 2018, Loja. *Anais...* UFSC, Santa Catarina, 2018.
- BIAZUTTI, A.C.; NASSER, L.; TORRACA, M.; BARROS, J.; OLIVEIRA, A. Conversão de Representações na transição do Ensino Médio para o Superior. In: CONGRESO ARGENTINO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, XIII, 2018, La Plata. *Anais...* Universidad Nacional de La Plata. La Plata, 2018.
- BIAZUTTI, A.C.; VAZ, R.F.N.; FERREIRA, M. Explorando problemas desafiadores de otimização no Ensino Médio com o Geogebra, 2018. In: ENCONTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII. *Anais...* UERJ, Rio de Janeiro, 2018.
- BORBA, M. C.; PENTEADO BORBA, M. G. *Informática e Educação matemática*. 2ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2007.
- CURY, H. N.; BORTOLI, M. F. Pensamento algébrico e análise de erros: Algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*. Rio de Janeiro, v.1. n.1, 2011.
- DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papyrus, p.11-33, 2003.
- DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- GONÇALVES, C. F. *Dificuldades em matemática ao ingressar no Ensino Superior*. Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário La Salle, Canoas, RS, 2007.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. e PERIGO, R., *Matemática*, Volume Único, Ed. Atual, 2011.
- MASOLA, W. J; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v.2 n.1. p. 64-74, 2016.
- NASSER, L (org). *Matemática Financeira para a Escola Básica: uma abordagem prática e visual*. 2 ed. Projeto Fundação, UFRJ. Rio de Janeiro, 2012.

- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.A. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012. *Anais...* SBEM-RJ: Petrópolis, 2012.
- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.A; ASSEMAN, D.; AZEVEDO.; C. A transição do ensino médio para o superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013. *Anais...* SBEM: Curitiba - PR, 2013.
- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN, XIV, 2015, Chiapas. *Anais...* CIAEM, Chiapas, 2015.
- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.A. Mobilizações Didáticas para aprendizagem do Conceito de função. In: LAERTE FONSECA (Org.). Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem. 1ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016, p. 183-196.
- NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. Desempenho em Cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior. *Boletim GEPEM*, n. 70, 2017.
- NASSER, L.; BIAZUTTI, A. C.; BARROS, J.; VAZ, R. F. N. Resolução de Problemas como trampolim para a aprendizagem de Cálculo I. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2019. *Anais...* SBEM: Cuiabá, 2019.
- NASSER, L.; BIAZUTTI, A.C.; TORRACA, M.; BARROS, J. Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN, XIV, 2019, Medellin. *Anais...* CIAEM, Medellin, 2019.
- OLIVEIRA, R. A.; GONÇALVES, W. V.; PIASSON, D. O uso do Geogebra para o ensino de cálculo diferencial e integral, um mapeamento de suas publicações. *Revista Thema*, v. 15, n. 2, p. 466-484, 2018.
- ONUICHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *BOLEMA*, vol. 25, n. 41, 2011, p. 73-98.
- PALIS, G. Investigando alguns desafios da incorporação do software Maple em cursos regulares do ciclo superior inicial. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, 2007, Belo Horizonte. *Anais...* SBEM: Belo Horizonte, 2007.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Ed. Interciência. 1978.
- REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. São Paulo: USP, 2003. 450 p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- ROCHA, A. Material para ensino de Pré-Cálculo, 2018. Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/precalculo>>. Acesso em: 05 set. 2020.
- SACCARO, A.; FRANCA, M. T. A.; JACINTO, P. A. Fatores Associados à Evasão no Ensino Superior Brasileiro: um estudo de análise de sobrevivência para os cursos das áreas de Ciência, Matemática e Computação e de Engenharia, Produção e Construção em instituições públicas e privadas. *Estudos Econômicos*, São Paulo, vol. 49, n. 2, 2019, p. 337-373.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E; HAREL, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, p.25-58, 1992.

SANTOS, D. M. M.; PINTO, G. M. F.; SOUZA, I. A.; FELIX, L. V. Atividades de tutoria: uma alternativa ao fracasso em Cálculo Diferencial e Integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo. *Anais...* SBEM: São Paulo, 2016.

SOUSA, G.; ANDRADE, L. Cálculo Diferencial e Integral I: como os alunos estão iniciando essa disciplina no curso de Engenharia? *Atas do X ENEM*, São Paulo, SP, Brasil, 2016.

TORRES, A. F. N.; HAVELANGE, L. S. Investigação dos conhecimentos de assuntos Pré-Cálculo em estudantes da Licenciatura em Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, IV, 2017, João Pessoa. *Anais...* Campina Grande: Realize Editora, 2017.

UFRN, questões do vestibular, 2000, Projeto Medicina, disponível no site <<http://www.projetomedicina.com.br>>. Acesso em 05/09/2020.

VALENTE, W. R. História da Matemática escolar: problemas teórico metodológicos. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, IV, 2001, Natal. *Anais...* Rio Claro, SBHMat, 2001. p. 207-2