GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS: ASPECTOS HISTÓRICOS E REFLEXÕES SOBRE SEU ENSINO

Maria Helena Monteiro Mendes Baccar
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT)/Colégio Pedro II, RJ
mhbaccar@gmail.com

Flávia Trópia
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT)/Cefet-RJ
tropiaflavia@gmail.com

Karen Coutinho Campos Furtado
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT)/Colégio Pedro II, RJ
karenccfurtado@hotmail.com

Resumo:
O presente trabalho apresenta o resultado de um estudo feito sobre a evolução histórica das geometrias não euclidianas dentro do corpo dos conhecimentos matemáticos bem como uma reflexão sobre as possibilidades de seu ensino tanto na educação básica quanto na formação de professores de matemática. Esse estudo teórico desenvolveu-se ao longo do primeiro semestre de 2020, quando tanto a autora principal como as duas coautoras participaram da disciplina *Geometrias Euclidiana e Não Euclidianas*, no programa de Doutorado em Ensino de Matemática do PEMAT (Programa de Pós-graduação em Ensino e História de Matemática e Física), na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Para fazer esse levantamento histórico do surgimento e evolução das diversas geometrias não euclidianas tomamos por base o famoso Programa de Erlangen, de Félix Klein (1891), e notas de um curso de Geometria Projetiva Plana com aplicações às geometrias euclidiana e não euclidianas, ministrado pelo professor Daniel Perrin (2012), em Paris. E, para a discussão sobre caminhos possíveis de se trabalhar essas geometrias, seja na educação básica, seja na licenciatura de Matemática, buscamos embasamento teórico no relatório francês da Comissão de Reflexão sobre o Ensino das Matemáticas, coordenado por Jean-Pierre Kahane (2000). Nosso estudo encontra-se subdividido em três partes, sendo a presente, a seguir apresentada, enfatizando particularmente as contribuições do trabalho supracitado de Daniel Perrin e nossas respectivas ponderações sobre o tema, com vistas ao desenvolvimento de futuras

pesquisas sobre as possibilidades do ensino de geometria na educação básica e na formação de professores que ensinam matemática.

Palavras-chave: Geometrias não euclidianas; Aspectos históricos; Ensino de Geometria; Formação de professores; Daniel Perrin.

1. Introdução

Daniel Perrin (PERRIN, 2012) é professor de Matemática na França, Universidade Paris-Sud 11 (Faculdade de Ciências de Orsay) e sua área de pesquisa é a Geometria Algébrica. Ele foi relator da comissão que discutiu o ensino de geometria na França em 2000 e trabalha com formação de professores há 40 anos.

Em sua carreira de professor-pesquisador, inclinou-se ao ensino de geometria e, particularmente, à formação de professores e percebeu a necessidade de construir um ensino de geometria em vários domínios (geometria projetiva, cônicas, inversão, poliedros etc.). Suas ideias matemáticas, epistemológicas e didáticas sobre a geometria e sua experiência no ensino o fizeram redigir a parte de geometria do relatório da Comissão Kahane (*Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques*). Além disso, o encontro com Martin (MARTIN, 2003) e o consequente uso do software Cabri em geometrias não euclidianas o fizeram descobrir uma visão extraordinária dessas geometrias. Todos esses eventos que gravitavam em torno do ensino de geometria e a sua preocupação com a formação de professores o levaram a escrever o livro (ainda não publicado) *Géométrie projective plane et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes*. Este livro dá aos futuros professores uma visão da geometria que os permite ver o ensino de sua disciplina de outra maneira.

Na construção desse ensino conseguiu entender o significado do programa de Erlangen (KLEIN, 1891) como unificador das geometrias. Esse programa foi elaborado após a explosão das geometrias na 1ª metade do séc XIX com a criação (ao lado da já existente geometria euclidiana clássica) da geometria projetiva (Poncelet, Plücker, Cayley), da geometria analagmática (Liouville) e das geometrias não euclidianas (Bolyai, Lobatchevski). Apresentou o princípio unificador segundo o qual uma geometria consiste, essencialmente, nos dados de um conjunto X e de um grupo G de transformações de X, ou seja, um grupo G operando sobre X. Os elementos de G são as transformações permitidas na geometria em questão e elas caracterizam essa geometria. Assim, por exemplo: na geometria euclidiana plana são as isometrias, na geometria afim plana são as transformações afins e na geometria projetiva, são as homografias. As propriedades relativas à geometria em questão (afins, euclidianas, projetivas) são aquelas que são conservadas pela ação do grupo e chamadas de invariantes.

Mas a geometria projetiva apresenta um inegável interesse por si só, pois o entendimento completo de muitos teoremas só se dá nessa geometria e, como Klein (KLEIN, 1891) explica, todas as outras geometrias usuais vêm dela. Assim, Perrin (2012), fiel à ideia de Klein, considera a geometria projetiva a mãe de todas as outras geometrias. Todas as outras geometrias podem ser obtidas a partir da geometria projetiva e de um dado suplementar. Assim, temos as ramificações possíveis a partir da Geometria Projetiva (figura 1):

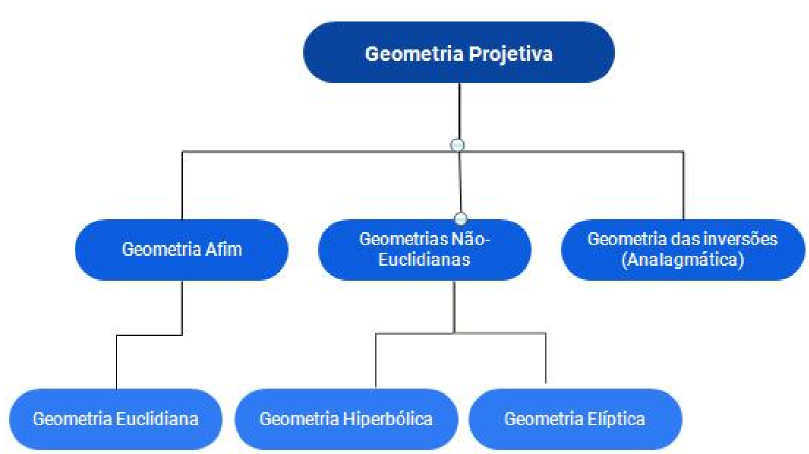

Figura 1: Ramificações possíveis a partir da Geometria Projetiva

Dessa maneira, Perrin (2012) optou pela abordagem linear nesse livro (álgebra linear e formas quadráticas) porque a considera mais simples para os matemáticos de hoje e porque todas as outras axiomáticas podem ser reduzidas a ela. Porém, Perrin (2012) ressalta que essa não é uma escolha didática pertinente para o ensino em nível de educação básica, mas sim para o nível a que se destina esse livro (formação de professores), em que supõe-se haver um conhecimento prévio das noções de espaço vetorial e aplicações lineares. O livro reflete sua visão de geometria: propositadamente usa-se o termo geometria no singular mais vezes que no plural, reforçando muito mais sua unidade do que sua diversidade. Aborda pelo menos cinco geometrias: projetiva, elíptica, hiperbólica, analagmática (de inversão) e euclidiana. Apresenta a visão de um geômetra bastante algebrista (por formação), discípulo de Klein e de seu célebre programa de Erlangen, cujo objetivo é a construção de um cálculo geométrico. Ou seja, o seu objetivo com o livro é reconciliar a álgebra e a geometria. Segundo o autor, é ilusório separar os domínios geométrico e numérico, "[...] o número está na geometria como o verme está na fruta". (PERRIN, 2012, p. 9, tradução)

Perrin (2012) também rebate a afirmação de Bourbaki sobre a morte da geometria, que esquece um aspecto fundamental da geometria: a capacidade de condensar sob uma forma visual e intuitiva, uma grande quantidade de informações: "a geometria está para a álgebra assim como o cinema está para o livro, às vezes mais coisas são ditas em uma única figura do que em um cálculo longo ". (PERRIN, 2012, p. 28, tradução). A geometria é, portanto, essencial como suporte intuitivo dos resultados algébricos.

Os princípios didáticos do livro são seu caráter elementar, para estudantes de mestrado em matemática, e sua preocupação com os aspectos históricos do surgimento dessas geometrias não euclidianas. Segundo Perrin, a geometria, mais provavelmente que outras partes da matemática, tem raízes que remontam ao mais profundo da história da humanidade e, por isso, é importante dar uma ênfase ao desenvolvimento histórico dessa área.

2. Geometria Projetiva Linear: aspectos históricos

Entre os sucessores de Euclides, cujos nomes aparecem na história da geometria projetiva, temos Menelaus (cerca de 80 dC) e Ptolomeu. Porém, Pappus (séc IV D.C., sucessor de Euclides para Perrin) pode ser considerado como o precursor da Geometria Projetiva, pois provou diversos teoremas essenciais, utilizou a dupla razão e a projeção. Entretanto, a geometria de Pappus se situa ainda no quadro euclidiano, pois não faz menção sobre a utilização de pontos ao infinito, o que impede de classificá-la como projetiva, mas contém o germe das noções que são estudadas no livro (PERRIN, 2012).

A utilização da perspectiva nas pinturas na época do Renascimento já ocorria, mas o verdadeiro primeiro nascimento da geometria projetiva deve ser associado ao nome de Desargues (1591-1661). Foi ele quem usou, pela primeira vez, a ideia de uma geometria sem medida. Em seus trabalhos utilizou notadamente a perspectiva, a dupla razão e os pontos ao infinito, mesmo não sendo claramente definidos. Além de Pappus e Desargues, é importante destacar também o trabalho de Pascal (séc. XVII) e o seu teorema do hexágono inscrito em uma cônica, obtido pela projeção a partir do caso do círculo.

Poncelet (1788-1867) é o responsável pelo segundo nascimento da geometria projetiva. Tenente engenheiro da Grande Armada de Napoleão, foi feito prisioneiro pelos russos na batalha de Krasnoi, em 1812. Passou dois anos em cativeiro. Nesse tempo retomou boa parte da geometria de Euclides, sem nenhum livro, relembrando seus professores da Ecole Polytechnique (especialmente Monge e Carnot) e inventou uma nova geometria, que nomeou projetiva. O princípio fundador desta geometria é a noção de perspectiva (ou projeção central). Para Poncelet, a geometria projetiva é essencialmente uma geometria da regra; suas projeções conservam propriedades de incidência das figuras; transforma retas em retas, cônicas em cônicas e geralmente conserva o grau das curvas algébricas. Ele usa definição de elementos ao infinito e introduz a noção de coordenadas homogêneas (sem nomeá-las; nos anos 1840 é que as coordenadas homogêneas foram sistematicamente utilizadas pelos geômetras).

No século XIX ocorre a explosão das geometrias, o nascimento das geometrias não-euclidianas, a geometria de inversão e suas conexões com a geometria projetiva. O ponto alto desse século de pesquisas em geometria é o programa de Erlangen de Félix Klein (KLEIN, 1891).

Para a abordagem da geometria projetiva ao longo do livro, Perrin (2012) trabalha com a noção de espaço vetorial, sendo o espaço projetivo visto como um quociente de um espaço vetorial sem o zero. Essa abordagem se apoia no uso das coordenadas homogêneas.

3. Os invariantes da Geometria Projetiva Linear

A Teoria dos Invariantes surgiu no século XIX e foi uma ferramenta essencial para entender as propriedades geométricas de maneira mais unificada, sendo intimamente ligada a dois aspectos essenciais da álgebra contemporânea: a teoria das equações algébricas e a dos determinantes. Tratava-se de determinar os invariantes dos polinômios em uma variável, relativamente às mudanças de variáveis afins ou homográficas. Participaram no desenvolvimento dessa teoria nomes como: George

Boole, Cayley, Aronhold, Sylvester, Hermite, Clebsch, Paul Gordan e Hilbert. Em 1893, Hilbert buscou incluir a teoria dos invariantes na teoria de campos de funções algébricas (o que hoje chamamos de geometria algébrica).

Embora, na década de 1920 a teoria dos invariantes não tenha sido considerada muito expressiva, ela renasceu das cinzas com Weyl (1939). Gurevich (1964) insistiu no aspecto geométrico da teoria dos invariantes. Já David Mumford, em 1965, estabeleceu a teoria geométrica invariante, ampliando os resultados de Hilbert. E Grothendieck trouxe para a geometria algébrica a noção de quociente e as noções de estabilidade. O surgimento dos computadores foi fundamental em termos de cálculo: softwares de álgebra computacional realmente permitiram efetuar cálculos de invariantes em poucos minutos, o que levaria meses de trabalho aos matemáticos do século XIX.

4. A Geometria de uma forma quadrática

4.1. As cônicas

A Teoria das cônicas apresenta uma história longa e rica. As cônicas são objetos de atenção desde a época dos gregos (em especial Arquimedes e Apolônio) até o século XX. O essencial dessa teoria foi desenvolvido na Antiguidade, faltando apenas algumas definições acrescentadas por Pappus (diretriz e excentricidade). Para os gregos, cônicas são as seções do cone de base circular. Arquimedes (287 a 212 a.C.) trabalhou nas questões de medir área e volume das cônicas e quádricas. Já Apolônio (247 a 170 a.C.) introduziu o vocabulário utilizado atualmente: parábola, elipse, hipérbole.

No século XVII, houve várias contribuições: Descartes (invenção da geometria analítica), Pascal (teorema do hexágono inscrito), Desargues (involução associada a um feixe) e Newton (prova da observação de Kepler sobre as trajetórias dos planetas). Uma parte considerável do trabalho de Newton lida diretamente com as propriedades geométricas das cônicas, especialmente as tangentes.

No século XIX tivemos: Poncelet (inventor dos métodos da geometria projetiva), Plücker (utilização do sistema de pontos cíclicos), Chasles (autor de um tratado importante sobre as cônicas, cálculo do número de cônicas tangentes à cinco cônicas dadas), Dandelin e Quételet (determinação das famílias de uma seção cônica), Frégier e Cayley (aplicou às cônicas o poder colossal do cálculo).

As formas quadráticas (polinômios homogêneos de três variáveis com grau 2 em cada monômio) apareceram com as equações das cônicas, no século XVII. E, em 1775, Lagrange estabeleceu uma forma de decompor a soma dos quadrados de formas lineares). Gauss contribuiu com a teoria aritmética das formas binárias. Euler e Cauchy dedicaram-se a um outro problema da teoria das cônicas e quadráticas: encontrar seus eixos (em um espaço euclidiano), que equivale à diagonalização de matrizes simétricas. Jacobi e Sylvester, em 1850, desenvolveram o trabalho em torno da invariância da linha e da assinatura.

Nos manuais de geometria até meados do século XX, as cônicas ocuparam um lugar de destaque, uma onipresença até um pouco exagerada. Mas nos programas atuais houve, praticamente, o desaparecimento desses conteúdos do ensino médio ou superior.

4.2. As Geometrias Não Euclidianas

Para se entender o nascimento das geometrias não euclidianas é necessário falar sobre o 5º postulado de Euclides (postulado das paralelas) e sobre a história de seu questionamento. Muitos geômetras, como Proclus, Clavius, Clairaut, Simson e Wallis, não ficaram satisfeitos por ter que tomar o postulado de Euclides como axioma e tentaram provar isso. Embora sem êxito nesse aspecto, essas tentativas serviram para redefinir a noção de paralela ou substituir o axioma de Euclides por outro. Entre essas tentativas, três merecem atenção especial, a de Saccheri (1667-1733), a de Legendre (1752-1833) e a de Lambert (1728-1777), porque são muito mais elaboradas. Eles partiam da hipótese de que o postulado das paralelas era falso e desdobravam as numerosas consequências dessa hipótese. Tinham a esperança de chegar a uma contradição, o que implicaria que o postulado era verdadeiro.

Já Janos Bolyai (1802-1860) tentou provar que o 5º postulado era falso, mas foi persuadido por seu pai a abandonar esse projeto (BISPO, MARTINS, 2020). Acabou optando por outra ideia, mostrar que uma geometria não euclidiana poderia existir. Escreveu 'A ciência absoluta do espaço' em 1830, onde desenvolveu toda uma geometria sem o axioma das paralelas. Seu texto foi enviado a Gauss, que já conhecia o resultado, mas acreditava ser de difícil aceite na comunidade científica.

Praticamente de forma concomitante, Lobatchevsky (1792-1856), que foi reitor da universidade de Kazan, publicou (em russo e em francês) o artigo Geometria

Imaginária, com resultados semelhantes aos de Bolyai (BISPO, MARTINS, 2020). Além das fórmulas relacionadas à área de um triângulo em função dos ângulos, Lobachevsky desenvolveu fórmulas para o círculo, introduziu novos objetos inexistentes na geometria euclidiana, como os horociclos. Entretanto, não teve sua genialidade reconhecida na época; foi demitido em 1846. Como Gauss temia, as obras de Bolyai e Lobatchevsky não ganharam a adesão de seus contemporâneos. Porém, com o passar dos anos, ocorreu uma busca desesperada por um modelo que satisfizesse algumas exigências: existência de um plano e retas ou pelo menos curvas, conservação das propriedades de incidência, compatibilidade entre os invariantes geométricos. A possibilidade desses modelos existirem ajudou a comunidade científica a aceitar essas geometrias (hiperbólica e elíptica). Assim surgiram os modelos não euclidianos de Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré e Riemann.

As ideias do programa de Erlangen (KLEIN, 1891) conduziram à construção de um modelo de geometria hiperbólica (geometria com muitas paralelas). Klein partiu do princípio que existe uma geometria-mãe, a geometria projetiva (particularmente o plano projetivo P(E)) e que dispõe de um grupo de transformações (grupo das homografias). Segundo Klein, o método projetivo abraça toda a geometria.

A geometria hiperbólica conheceu desde o século XIX uma explosão fenomenal, por fornecer um quadro natural à teoria da relatividade e por ter aplicações em outras áreas da matemática. São modelos da geometria hiperbólica os criados por: Klein, Minkowski, Poincaré (disco e semiplano), Beltrami. Já a geometria elíptica (geometria sem paralelas) desenvolveu-se pouco, talvez por ter uma metamorfose mais natural sobre sua forma esférica. São modelos da geometria elíptica: não conforme, conforme de Klein, conforme.

No caso euclidiano, a geometria afim ordinária é obtida a partir da geometria projetiva dando-se uma reta ao infinito (retas paralelas se cortam no infinito). Assim, o postulado de Euclides é válido. Para se obter uma geometria afim não euclidiana, é necessário substituir a reta ao infinito por uma curva algébrica de grau $d \geq 2$ (por exemplo, uma cônica).

4.3. A Geometria Euclidiana

Euclides foi o matemático grego autor do magnífico livro “Os Elementos” (EUCLIDES, 2009), que lança as bases da geometria chamada euclidiana. Essa geometria é conhecida por todos porque é ensinada na educação básica. No livro de Perrin (2012), a parte sobre a geometria euclidiana encontra-se após as geometrias não euclidianas. Há duas razões para isso: a familiaridade com a geometria euclidiana e uma releitura com o objetivo de comparar três geometrias: elíptica, hiperbólica, euclidiana. A abordagem escolhida para as geometrias não euclidianas foi com espaço vetorial E de dimensão 3, plano projetivo $P(E)$ associado e forma quadrática definida sobre E, pois estes casos correspondem a formas não degeneradas. O caso euclidiano corresponde à forma degenerada, portanto mais complicado. Assim, Perrin (2012) apresenta um caminho inverso ao caminho habitual: usa o modelo das geometrias não euclidianas e observa a geometria euclidiana como uma geometria singular, que se afasta desse modelo.

De fato, o caso euclidiano é radicalmente diferente, com vantagens, possibilidade de chegar à geometria afim, e desvantagens, inexistência de uma dualidade conveniente. Também na geometria euclidiana os invariantes têm um papel central. As relações que os unem são fonte de teoremas muito importantes como, por exemplo, a relação de Chasles.

5. A Geometria Analagmática

A geometria analagmática é essencialmente a geometria das inversões. O estudo dessas transformações remonta à primeira metade do século XIX. É difícil dizer quem foi o primeiro a tratar do assunto, mas provavelmente Jacob Steiner (1796-1863) a partir de 1826. Para Chasles (1870), que designa a inversão sob o nome de transformação por raios vetores recíprocos, a primeira aparição do conceito deve ser atribuída a Adolphe Quételet (1796-1874) em 1827, já com o nome moderno de inversão. E, a descoberta da inversão deve ser atribuída principalmente a Giusto Bellavitis (1803-1880), em 1836. O físico William Thomson utilizou também essa transformação por volta de 1845 sob o nome de princípio das imagens elétricas.

A primeira teoria completa de inversão parece ter sido produzida por Joseph Liouville (1809-1882), em 1847. Ele definiu que o grupo de transformação conformes, que conserva os ângulos, de um espaço de dimensão ≥ 3 é gerado por semelhanças e inversões.

A geometria analagmática é um exemplo importante que ilustra o Programa de Erlangen (KLEIN, 1891) e o grupo de Möbius é um dos primeiros exemplos de grupos geométricos não triviais. Um dos interesses principais da geometria analagmática é ilustrar uma consequência essencial do Programa de Erlangen: a interpretação de uma geometria como operação de um grupo sobre um conjunto. Desde que o mesmo grupo apareça sob duas roupagens diferentes e com representações diferentes, a geometria é rica, no sentido de que contém dois tipos de propriedades, vinculadas aos dois aspectos do grupo.

6. Considerações Finais: o Ensino da Geometria

A partir da proposta didática do livro para geometria e da experiência de muitos anos na formação de professores de matemática, Daniel Perrin (2012) faz reflexões sobre possibilidades para o futuro do ensino de geometria na educação básica. Para esse professor, a Reforma da Matemática Moderna descartou muito do ensino de geometria na educação básica (na França), restando basicamente a parte dos cálculos, sem exploração das figuras e dos conceitos envolvidos. Dessa forma, houve pouca ênfase ao estudo da Geometria, priorizando-se o trabalho de outras áreas, como por exemplo Matemática Discreta e Estatística.

Perrin (2012) reforça que é fundamental ensinar geometria na educação básica, pois ela é utilizada em diversos domínios, como por exemplo: arquitetura, urbanismo, topografia, agricultura, informática, infografia, desenho industrial, robótica, astronomia, mecânica, física, balística, carpintaria, tipografia, biologia, medicina, estatística, pesquisa operacional, ótica, navegação, cartografia etc.

Além disso, é fundamental desenvolver o pensamento geométrico nos alunos. Poder contar com a intuição geométrica do plano e do espaço para aplicar a situações mais complexas. O pensamento geométrico é uma visão global de uma questão matemática, condensando em uma imagem diversas informações simultaneamente. A intuição geométrica desenvolve-se através da resolução de problemas, em que os alunos são estimulados a observar, refletir, raciocinar, experimentar, enganar-se, superar os erros.

Para o aluno da licenciatura em matemática é essencial perceber a unidade, a riqueza e a diversidade das geometrias. Compreender a unidade, a partir do ponto de vista de Klein, pois uma geometria é um grupo operando sobre um conjunto e todas as geometrias podem ser originadas a partir da geometria projetiva, mas com dados suplementares. Compreender também a sua diversidade: que a geometria euclidiana é mais prática e utilitária, mas que o estudo das outras não é inútil, especialmente para os futuros professores.

Perrin (2012) sugere que o ensino da geometria na educação básica se faça mais presente, principalmente a geometria euclidiana em dimensões 2 e 3. Recomenda que seja estimulado o trabalho com transitividade e casos de isometria e os invariantes, particularmente áreas e ângulos. Defende que o ensino de Álgebra Linear só ocorra no Ensino Superior. Reforça também que devemos estimular os alunos a pensar, através da apresentação de problemas em aberto (que possam minimamente ser entendidos) e da utilização de softwares de geometria dinâmica, pois estes têm ferramentas extraordinárias para fazer geometria, muito úteis para a pesquisa de lugares geométricos. Servem para desenhar, ilustrar, explorar, conjecturar, eliminar, verificar, provar, construir problemas. E ajudam a produzir conjecturas sólidas.

Já no caso do ensino superior e da formação de professores, Perrin (2012) sustenta a importância do trabalho com a geometria projetiva, as cônicas, as geometrias não-euclidianas e a geometria analagmática. Ele considera essencial que o professor adquira cultura, isto é, conheça de maneira profunda o que se deve ensinar, e postura, ou seja, passe da posição de estudante à posição de professor. É fundamental também que o futuro professor adquira uma perspectiva histórica de como ocorreu o desenvolvimento da geometria, desde os escritos de Euclides (EUCLIDES, 2009) e Arquimedes (ARCHIMÈDE, 1960), passando por Descartes e finalmente chegando às revoluções que originaram as geometrias do século XIX. Dessa forma, é possível entender as ideias essenciais do Programa de Erlangen (KLEIN, 1891).

Além disso, deve-se também desenvolver nesses futuros professores o entendimento que o rigor na geometria é necessário e a capacidade para o uso dos softwares de geometria dinâmica.

É verdade que o olhar para o ensino de geometria de Perrin (2012) volta-se para o que ocorreu/ocorre na França. Mas quando fazemos uma comparação com o panorama do ensino de geometria no Brasil na educação básica, percebemos muitos pontos em comum. Podemos inferir, por exemplo, que da mesma forma, aqui, o trabalho de geometria na educação básica é fragmentado e que muitas vezes o professor dá uma ênfase maior a outras áreas da matemática, como a aritmética e a álgebra, em detrimento da geometria. Não é feito também um trabalho em conjunto, interrelacionando as diversas áreas da matemática. Muitas vezes o ensino de geometria é colocado para o final do ano letivo, e caso não haja tempo, esquecido.

Adicionando-se a isso, quando ocorre o ensino da geometria, muitas vezes o foco é apenas numérico, na obtenção de resultados de medição de comprimentos, áreas, volumes ou ângulos. A ênfase não ocorre no desenvolvimento do pensamento geométrico, nem no entendimento dos conceitos envolvidos na construção desse pensamento. A intuição não é estimulada, mas, ao contrário, um conjunto de procedimentos são receitados para que os estudantes os reproduzam na resolução dos exercícios.

Há, também, muita semelhança no que ocorre na formação dos professores de matemática no Brasil e na França, de acordo com o que Perrin (2012) relata. Muitas vezes o licenciando chega ao final de uma graduação sem nunca ter ouvido falar em geometrias não euclidianas e, talvez, muito pouco sobre geometria projetiva. Ter conhecimento da existência dessas geometrias e de como ocorreu o surgimento das mesmas é fundamental para que esse futuro professor tenha uma bagagem cultural para poder sentir-se seguro para trabalhar, por exemplo, a geometria euclidiana na educação básica. Ou mesmo para ousar apresentar um pouco dessas outras geometrias no ensino médio, por exemplo. Afinal, vivemos num planeta que facilitaria o entendimento, por exemplo, de propriedades da geometria elíptica.

Sendo assim, uma possibilidade poderia ser repensar o trabalho com a geometria na educação básica aqui no Brasil, estimulando a parte conceitual em detrimento da procedimental, o uso de softwares geométricos para uma geração que já é alfabetizada digitalmente desde pequena e a apresentação (mesmo que de forma bem suave) da diversidade de geometrias existentes. Esse enfoque poderia ser uma maneira de tornar a aprendizagem de geometria mais significativa para esses estudantes, provavelmente mais sólida.

Importante destacar, entretanto, que após esse levantamento sobre a evolução histórica das geometrias não euclidianas dentro do corpo dos conhecimentos matemáticos e da reflexão sobre as possibilidades de seu ensino tanto na educação básica quanto na formação de professores de matemática, é necessário que pesquisas de campo sejam desenvolvidas sobre sua aplicação em ambos os segmentos. De forma a identificar as possíveis maneiras de tornar o ensino de geometria (euclidiana ou não euclidiana) mais significativo tanto na escola como na licenciatura em matemática. O que e como desenvolver nos estudantes as habilidades geométricas necessárias aos respectivos segmentos?

É essencial, sobretudo, que exista uma continuidade entre o que se estuda de geometria na escola e na licenciatura em matemática. Os outros dois trabalhos que complementam esse estudo, *Félix Klein e o Programa de Erlangen: Histórico e Implicações Pedagógicas* e *As Contribuições da Comissão de Jean-Pierre Kahane para as Reflexões sobre o Ensino de Geometria na Educação Básica e na Formação de Professores*, analisam essas possíveis conexões com a Educação Básica e com a Formação de Professores. Acreditamos que aproximar universidade e escola é uma missão possível e muito necessária.

7. Referências

ARCHIMÈDE. *Oeuvres complètes*, traduction P. Ver Eecke. A. Blanchard, Paris, 1960.

BISPO, A.; MARTINS,R.*As geometrias não-euclidianas e a verdade matemática*. Disponível em: <http://www.ghtc.usp.br/server/pdf/Geometrias-Sci-Am-3.PDF>. Acesso em 10 out. 2020.

CHASLES, M. *Rapportsurlesprogrés de lagéométrie*. Hachette, Paris, 1870.

EUCLIDES, *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

KAHANE, J. P. *Rapport d'Étape sur la Géométrie et son Enseignement*. Comission de réflexionsurl'enseignementdesmathématiques. France, 2000. Disponível em: <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/geo-com6.pdf>; Acesso em 24 jul. 2020.

KLEIN, F. *Considérations Comparatives sur les Recherches Géometriques Modernes*. Traduction de M. H. Padé. Annales scientifiques de l'É.N.S, 3e série, p.87-102, 1891.

MARTIN, Y. *Conception et mise en ouvre de micromondes de géometries non euclidiennes dans le cadre de la géometrie dynamique illustrées avec Cabri-Géomètre.* Expérimentation en formation des maîtres (thèse). Université de Grenoble 1, 2003.

PERRIN, D. *Géométrie Projective Plane et Applications aux Géométries Euclidienne et non Euclidiennes*. 2012. Disponível em: <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/>; Acesso em 24 jul. 2020.