

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE LIMITE: UMA PROPOSTA BASEADA EM PRESSUPOSTOS DA APRENDIZAGEM INVERTIDA

Marcio Vieira de Almeida

*Universidade Federal do Rio de Janeiro
marcioalmeidasp@gmail.com*

Agnaldo da Conceição Esquicalha

*Universidade Federal do Rio de Janeiro
agnaldo@im.ufrj.br*

Resumo:

Estudos da área da Educação Matemática no Ensino Superior sinalizam a necessidade de uma postura autônoma e proativa por parte do estudante na graduação. Dentre várias possibilidades para o desenvolvimento dessa postura, destaca-se a utilização de metodologias ativas, com elementos da Aprendizagem Invertida, em especial a Sala de Aula Invertida. Neste artigo objetivamos apresentar uma metodologia para o desenvolvimento de atividades para a introdução do conceito de limite. Essa metodologia é apresentada em Talbert (2009), que indica uma lista com sete passos que auxiliam no design de uma aula. Além disso, propomos um conjunto de atividades, para introduzir o conceito de limite, de forma a possibilitar o desenvolvimento da definição formal a partir da exploração de diferentes representações (numéricas, simbólicas e gráficas). Entendemos ser fundamental para a área de pesquisa discutir questões relacionadas ao design de atividades matemáticas.

Palavras-chave: Aprendizagem Invertida, Sala de Aula Invertida, Limites, Cálculo Diferencial e Integral.

1. Introdução

Estudos da área da Educação Matemática no Ensino Superior sinalizam a necessidade de uma postura autônoma e proativa por parte do estudante na graduação. Guedet *et al.* (2016) sinalizam a necessidade de uma postura autônoma e proativa. Miranda e Masson (2016) identificam a necessidade de mudança na postura dos

estudantes: “Muitos alunos do ensino médio [...] não tem hábitos de estudo, o que compromete significativamente a aprendizagem no Ensino Superior” (p. 2). Dessa forma, seria necessário que em aulas da graduação, pudéssemos desenvolver uma postura autônoma e hábitos de estudo.

Em Schreiber *et al.* (2018) é apresentado um mapeamento de pesquisas científicas, com vistas a identificar e analisar publicações científicas, nacionais e internacionais, acerca da estratégia pedagógica da Sala de Aula Invertida (SAI) no ensino de Matemática. Para isso, foram considerados 16 artigos, obtidos em periódicos classificados, quadriênio 2013-2016, com qualis A1, A2 e B1, para a área de avaliação “Ensino”. As autoras evidenciam impactos positivos no desempenho, motivação e autonomia dos estudantes e indicaram a obtenção de “resultados satisfatórios na inversão da sala de aula, demonstrando que esta pode ser uma alternativa ao ensino tradicional, pois possibilita o desenvolvimento do protagonismo e da autonomia dos estudantes” (SCHREIBER *et al.*, 2018, p. 233).

Em virtude desses benefícios destacados, como podemos organizar atividades de ensino utilizando a sala de aula invertida? Em Moreira *et al.* (2018) é indicada a necessidade de considerar aspectos metodológicos para o desenvolvimento de atividades de ensino nesse modelo.

Dessa forma, neste artigo objetivamos discutir uma metodologia para o desenvolvimento de atividades, no submodelo SAI, apresentada em Talbert (2019), assim como propor um conjunto de atividades desenvolvidas com base nessa metodologia para uma aula para a apresentação da definição formal do conceito de limite de uma função de uma variável¹.

Sendo assim, este trabalho é organizado da seguinte maneira: inicialmente apresentamos considerações sobre a aprendizagem invertida e o modelo para proposta de atividades de acordo com Talbert (2019); elaboramos um conjunto de atividades utilizando o modelo e, por fim, apresentamos considerações finais sobre o trabalho.

2. Aprendizagem invertida e um modelo para o desenvolvido de atividades

¹ Doravante, neste documento utilizaremos o termo ‘limite’ para indicar o limite de uma função de uma variável.

Apresentamos nesta seção a noção de aprendizagem invertida que vai nortear o desenvolvimento das atividades.

O termo aprendizagem invertida, definido de acordo com a perspectiva de Talbert (2019), pode ser empregado “a toda filosofia de ensino e aprendizagem que abrange o design de uma disciplina (o que algumas vezes denominamos design de aprendizagem invertida) e as expectativas não só quanto a o que mas também como os alunos aprendem” (p. 8, grifo do autor).

De maneira específica, Talbert (2019) pontua que:

A aprendizagem invertida é uma abordagem pedagógica na qual o primeiro contato com conceitos novos se desloca do espaço de aprendizagem grupal para o individual, na forma de atividade estruturada, e o espaço grupal resultante é transformado em um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, no qual o educador guia os alunos enquanto eles aplicam os conceitos e se engajam criativamente no assunto (TALBERT, 2019, p. 21).

O termo ‘espaço’ indicado na definição não se refere apenas ao espaço físico da sala de aula ou outro qualquer, também inclui “aos contextos emocional, intelectual e psicológico com os quais os alunos se deparam quando estão fazendo o trabalho” (TALBERT, 2019, p. 10).

Nessa perspectiva, o contexto de espaço individual, é considerado um momento no qual o(s) aluno(s) esteja(m) trabalhando, seja individualmente ou em grupos pequenos, e o foco está em esforços individuais do aluno.

O contexto de espaço de aprendizagem grupal

[...] é aquele no qual os alunos operam quando estão trabalhando com um grupo formal com parte da aula [...] o que eles encontram quando trabalham com toda a turma ou algum subgrupo intencional e regulado da turma, tal como pequenos grupos formados durante a aula pelo professor ou determinado grupo de discussão em uma disciplina online (TALBERT, 2019, p. 10).

Dessa forma, Talbert indica que para que o professor possa promover um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo nos dois espaços, o individual e o grupal, é necessário que o professor ofereça orientação para os alunos.

Outro ponto que destacamos é que a SAI não é a única forma de realizar uma aula, ou curso, com base na Aprendizagem Invertida. Tabert (2009) cita o exemplo de Eric Mansur, da Harvard University, e a *peer instruction*. Nesse sistema de instrução, o foco

do tempo em aula está em expor e corrigir as concepções errôneas dos alunos sobre ideias importantes de um determinado assunto.

Para Valente (2014), a SAI possibilita que ocorra uma inversão de acordo com a concepção de ensino tradicional.

Na abordagem da sala de aula invertida, o aluno estuda antes da aula e esta se torna o lugar de aprendizagem ativa, o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo, laboratórios etc. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina (VALENTE, 2014, p.159).

Na SAI, o professor não precisaria despende de tempo da aula presencial para expor a teoria, ele tem um gerenciamento diferente do tempo da aula, podendo propor/intensificar outras atividades, como problemas, discussões em grupo, seminários etc. O professor pode passar quase toda a aula caminhando pela sala realizando atendimentos individuais aos estudantes com mais dificuldades, o que pode ser uma das razões para a melhor progressão destes alunos (BERGMANN; SAMS, 2016).

Neste momento vamos apresentar um modelo que foi utilizado por Talbert (2019) para o desenvolvimento de uma aula no modelo SAI e que objetiva a introdução do conceito de limite. Ele indicou o seguinte motivo para utilizar metodologias ativas em suas aulas.

A maior preocupação era o efeito que meu ambiente de aprendizagem estava tendo nos futuros professores. Se os alunos acharem que o cálculo tem a ver com repetição mecânica da exposição do professor e se cálculo for a disciplina que informa as experiências futuras de todos os professores de matemática, então o que necessariamente irá acontecer é que eles se tornarão professores que transmitirão essa compreensão falha da matemática para a próxima geração (TALBERT, 2019, p. 58).

Dessa forma, Talbert resolveu utilizar um modelo de aprendizagem invertida para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo da seguinte forma:

A intenção era de que os alunos obtivessem instrução direta por meio de vídeo pré-gravado, a ser assistido antes do horário da aula, e, então, o tempo em sala de aula seria usado inteiramente respondendo a perguntas e resolvendo tarefas de resolução de problemas mais difíceis (TALBERT, 2019, p. 58).

A organização dos espaços de aprendizagem individual e grupal são organizados da seguinte forma: no espaço individual, antes do encontro regular da aula, era

desenvolvida com os alunos uma atividade, chamada de Prática Guiada. Essa atividade era objetivado que os estudantes tivessem contato com o material pela primeira vez de forma estruturada, sendo composto das seguintes atividades:

- uma descrição do que os alunos iriam aprender na próxima aula;
- uma lista de objetivos de aprendizagem para a aula, ou tarefas de aprendizagem específicas;
- uma seção de recursos para aprendizagem. Podem ser, por exemplo, uma parte do livro-texto para ler e/ou uma seleção de vídeos para assistir;
- uma coleção de exercícios que proporcionavam aos alunos formas de praticar tarefas descritas na lista dos objetivos de aprendizagem básicos;
- um conjunto de instruções sobre como submeter o trabalho, tipicamente alimentando as informações básicas e as respostas aos exercícios em um Formulário no Google.

Em uma aula de 50 minutos, Talbert descreve como o espaço grupal era desenvolvido nessa disciplina de Cálculo ministrada por ele: nos cinco primeiros minutos eram formados grupos de três e quatro integrantes para discutir as respostas dadas às atividades da Prática Guiada; cinco minutos nos quais era feito um balanço da atividade desenvolvidas, focando em padrões apresentados pelos estudantes e concepções errôneas. O restante da aula era reservado para o desenvolvimento de uma forma de aprendizagem ativa que se adequasse ao conteúdo em questão, em duplas ou em grupos, como as seguintes:

- atividades de *peer instruction* usando *clickers*² e testes conceituais (MANZUR, 1997) para material conceitual;
- trabalho em grupo sobre aplicações do conceito básico a cálculos mais avançados e aplicações na vida real;
- grupos resolvendo a derivação ou a prova de uma ideia importante (TALBERT, 2019, p. 61).

Esse é um exemplo de aprendizagem invertida pois no espaço individual o primeiro contato com novos conceitos de Cálculo ocorre por meio das atividades

² O termo “clikers” é se refere a um tipo de sistema de resposta do estudante (termo original *student response system*). Esse tipo de sistema possibilita ao estudante responder perguntas, formuladas pelo professor, usando a internet em seus dispositivos móveis ou no computador, sendo que as respostas são computadas instantaneamente ao professor. Exemplo desse tipo de sistema é o Kahoot! (<https://kahoot.com/>)

desenvolvidas no âmbito da Prática Guiada, que configuravam-se como uma “atividade estruturada que forneceu orientações quando se deparavam com o material novo pela primeira vez” (TALBERT, 2019, p. 62). O espaço grupal é orientado para aprendizagem ativa “por meio de trabalho iterativo e desafiador em tarefas de mais alto nível que normalmente teriam sido relegadas para um momento fora de aula” (TALBERT, 2019, p. 62).

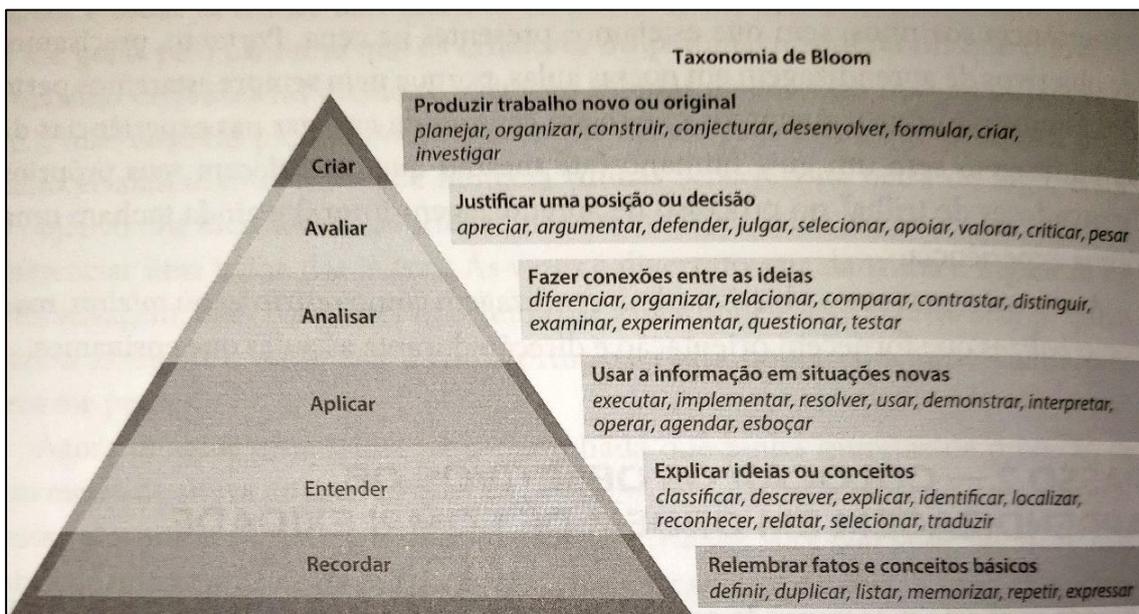
Para auxiliar no planejamento de uma aula para ser desenvolvida em um ambiente de aprendizagem invertida, Talbert (2019) expõe uma estrutura composta por sete passos:

1. Elaborar uma lista breve, mas abrangente, dos objetivos de aprendizagem para a aula;
2. Recombinar os objetivos de aprendizagem para que apareçam em ordem de complexidade dos processos cognitivos;
3. Criar um esboço do planejamento da atividade no espaço grupal que você pretende que os alunos façam;
4. Retornar à lista dos objetivos de aprendizagem e dividi-los em objetivos básicos e avançados;
5. Terminar o planejamento da atividade para o espaço em grupo;
6. Planejar e construir a atividade para o espaço individual;
7. Planejar e construir atividades para o espaço pós-grupo que você pretende que os alunos façam.

Da lista indicada por Talbert, destacamos a noção de complexidade dos processos cognitivos, apresentada no item 2, é referenciada segundo a Taxonomia de Bloom³. Na Figura 1 apresentamos cada um dos níveis, e os verbos que podem ser associados aos níveis da Taxionomia de Bloom, que podem ser utilizados para a descrição dos objetivos do item 2:

³ A Taxionomia de Bloom é uma ferramenta criada por Benjamin Bloom e outros estudiosos das áreas da educação e psicologia com a finalidade de classificar objetivos educacionais. Foi considerada aquele que classifica o processo cognitivo, entendido como o meio pelo qual o conhecimento é adquirido ou construído e usado para resolver problemas diários e eventuais.

Figura 1: Pirâmide de taxionomia de Bloom



Fonte: TALBERT, 2019, p. 120.

Com base nos sete passos propostos em Talbert (2019), apresentamos na próxima seção uma proposta para o desenvolvimento de uma aula com elementos da SAI e da aprendizagem invertida para a introdução do conceito formal de limite.

3. Proposta de uma aula para o conceito de limite

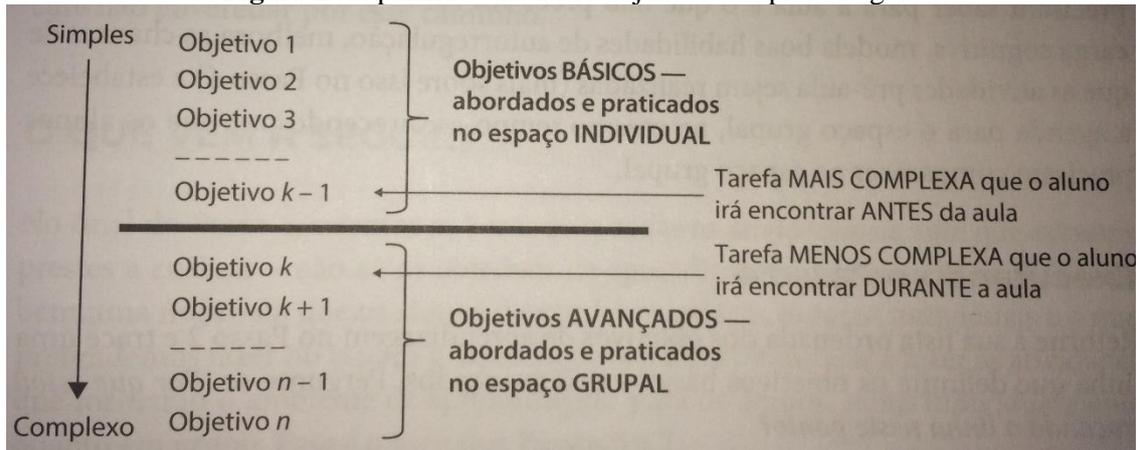
Nesta seção apresenta-se é um conjunto de atividades em que objetiva-se a introdução do conceito de limite, com vistas a possibilitar o desenvolvimento formal desse conceito.

De acordo com o modelo de *design* indicado por Talbert (2019), em um primeiro momento são anunciados os objetivos desse conjunto de atividades já ordenados de acordo com os níveis de complexidade, segundo indicações da Taxionomia de Bloom.

- Enunciar a ideia intuitiva de limite pelo problema da velocidade instantânea;
- Estimar o valor do limite de uma função de maneira numérica;
- Estimar o valor do limite de uma função graficamente;
- Conjecturar sobre a não existência do limite de uma função em um dado ponto.

O item 4 indica o retorno à lista dos objetivos de aprendizagem e dividi-los em objetivos básicos e avançados. Na Figura 2, Talbert indica como esses objetivos podem ser divididos.

Figura 2: Separando a lista dos objetivos de aprendizagem



Fonte: TALBERT, 2019, p. 129.

De acordo com as indicações, optamos em fazer a seguinte divisão:

- Enunciar a ideia intuitiva de limite pelo problema da velocidade instantânea;
- Estimar o valor do limite de uma função de maneira numérica;
- Estimar o valor do limite de uma função graficamente;
- Conjecturar sobre a não existência do limite de uma função em um dado ponto.

Com as atividades propostas no espaço individual de aprendizagem, escolhemos desenvolver uma prática guiada, na qual são apresentadas questões desenvolvidas em formulários da ferramenta Formulários Google. Essa ferramenta permitiu uma futura coleta das respostas dadas de maneira rápida e organizada.

Com as atividades propostas no espaço individual de aprendizagem, escolhemos desenvolver uma prática guiada, na qual são apresentadas questões desenvolvidas em formulários da ferramenta Formulários Google. Essa ferramenta permitiu uma futura coleta das respostas dadas de maneira rápida e organizada.

A seguir, comentamos as questões desenvolvidas no formulário⁴.

Na primeira questão objetiva-se verificar qual seria o entendimento do respondente sobre o vídeo assistido. O vídeo, disponível na plataforma Khan Academy⁵,

⁴ Disponível em: <https://forms.gle/bxDbncedpaiKg2bv5>

⁵ A *Khan Academy* (<https://pt.khanacademy.org/>) é uma organização cuja missão é proporcionar uma educação gratuita e de alta qualidade para todos, em qualquer lugar, oferece uma coleção grátis de vídeos de Matemática (do Ensino Básico ao Superior) e outras áreas do conhecimento como Física, Química, Biologia, Ciência da Computação, entre outras.

apresentou uma introdução ao conceito de limite pelo cálculo da velocidade instantânea do velocista Usain Bolt durante uma prova de 100 metros rasos. Por esse motivo, na questão proposta solicita-se aos alunos que descrevam, com suas palavras, qual foi o método exposto para calcular a velocidade instantânea do corredor em um dado instante. Além disso, o vídeo mostra que um processo de limite pode resultar em um número. Sendo que essa é uma das dificuldades apontadas em Tall e Vinner (1981): conceber o processo de limite como um número.

Na segunda questão objetiva-se que seja utilizado o método apresentado no cálculo da velocidade média em outra situação: o cálculo da velocidade instantânea de uma bola lançada verticalmente no instante $t = 2$ segundos. Nessa atividade queremos que os alunos tentem aplicar o método exibido no vídeo da questão anterior para calcular a velocidade instantânea de um móvel. Nessa atividade é utilizado um *applet* do GeoGebra, de modo que com esse *applet* é possível efetuar a seguinte operação indicada por Tall quando diz que “os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um mouse é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla” (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

Nas próximas três questões (terceira, quarta e quinta) são abordados métodos numéricos e gráficos para a estimativa do valor de um limite de uma função num ponto dado.

Na terceira questão apresentamos um vídeo que trata de como é possível estimar o valor do limite de uma função por meio de uma tabela e da observação do comportamento gráfico da função, e é solicitado ao estudante que escreva o que entendeu sobre esse método. Na quarta e na quinta questões solicita-se que se estime o limite de uma função, utilizando a abordagem gráfica e a numérica apresentadas no vídeo da questão 3. O exemplo apresentado, na questão 5, foi feito de forma que o estudante possa perceber que o valor limite pode ser diferente do valor da imagem da função e que o limite não é uma barreira, pois o valor do limite é menor que o valor da imagem da função no ponto $x = 2$.

Na última questão, deixamos que o aluno reflita sobre quais seriam as condições para as quais o limite de uma função não exista. Tall indica a necessidade de considerar contraexemplos de um dado conceito, pois se “todos os exemplos considerados possuem determinada propriedade, então, na ausência de contraexemplos, a mente assume que a

propriedade conhecida seja implícita em outros contextos” (TALL, 1986, p. 84, tradução nossa).

Descrevemos, o esboço de uma atividade que poderia ser desenvolvida no espaço de aprendizagem grupal. Estimamos 50 minutos o desenvolvimento dessa atividade. No Quadro 1 é apresentado o esboço da atividade do espaço grupal:

Quadro 1: Organização das atividades do espaço grupal de aprendizagem

Tempo previsto	Descrição da atividade
Primeiros 15 minutos:	<p>Discussão sobre o que foi visto em vídeos que indicamos na atividade do espaço individual de aprendizagem. Essa discussão foi pautada nas seguintes questões:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Como foi calculada velocidade instantânea do corredor? • Para dado um gráfico de espaço em função do tempo, calcular a velocidade instantânea em $t = 2$? • Como estimar o valor de limite de uma função, a partir de informações de uma tabela? • Como poderíamos indicar quando o limite de função em um dado ponto não existe?
Próximos 25 minutos:	<p>Discussão sobre os seguintes termos destacados na definição intuitiva de limite (STEWART, 2006): “Se pudermos tomar os valores de $f(x)$ <u>arbitrariamente próximos de L</u> (tão próximo quanto quisermos), tornando x <u>suficientemente próximos de x_0</u> (por ambos os lados de x_0), mas não igual a x_0”.</p> <p>Resolução em sala das seguintes questões: Faça uma estimativa dos seguintes valores:</p> <p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$</p> <p>b) $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right)$</p>
10 minutos finais:	<p>Discussão final sobre as duas atividades propostas em aula.</p> <p>Reforçando que o método de aproximação sucessivas pode conduzir a um erro dependendo dos valores escolhidos (como no item b) que dependendo da forma como nos aproximamos do 0, o valor do limite não é o mesmo.</p>

Fonte: produção dos autores.

Esse é o conjunto de atividades desenvolvido. Nele utilizamos os 7 passos indicados em Talbert (2019) para o desenvolvimento dos dois espaços de aprendizagem: o individual e o grupal.

4. Considerações finais

Neste artigo foi apresentada uma metodologia, inspirada em Talbert (2019), para a construção de atividades que possibilitem o desenvolvimento do conceito de limite, apoiado na Aprendizagem Invertida e em elementos da SAI.

Contudo, de que forma podemos organizar atividades de ensino utilizando a sala de aula invertida? Para responder a essa questão, trouxemos o modelo de *design* de Talbert (2019). Esse modelo possibilita a organização de dois espaços de aprendizagem que emergem no âmbito da aprendizagem invertida: o individual e o grupal.

De posse desse modelo, desenvolvemos um conjunto de atividades para a introdução do conceito de limite. Consideramos que se faz necessário discutir teoricamente a produção de atividades. Além disso, anunciamos que está prevista a aplicação desse material com um grupo de alunos de uma Instituição Pública de Ensino Superior. E, a partir daí, poderemos responder quais foram os avanços dos estudantes que utilizaram as atividades apresentadas neste manuscrito.

Vislumbramos possibilidades de futuras pesquisas, pois entendemos que o modelo proposto em Talbert (2019) pode ser utilizado em outros tópicos de Matemática de Nível Superior.

Por fim pretendemos, com o conjunto de atividades apresentado, ampliar o campo das discussões sobre o desenvolvimento de outras atividades, referenciadas em resultados de pesquisa e constructos teóricos da Educação Matemática. Entendemos que a elaboração de material para o ensino é um campo de pesquisa fértil e necessário para que se possa implementar resultados de pesquisas da Educação Matemática nas salas de aula.

5. Referências

BERGMANN, J.; SAMS, A. *Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem*. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. 1. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2016.

GUEUDET, G., BOSCH, M., DISESSA, A., KWON, O. N. VERSCHAFFEL, L. (Orgs.) *Transitions in Mathematics Education* (ICME-13 Topical Surveys). New York, NY: Springer. 2016.

MIRANDA, L. F.; MASSON, T. J. Projeto de Apoio para Melhoria do desempenho

Acadêmico – PAMDA. *Anais*: XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Rio Grande do Norte: UFRN, 2016.

MOREIRA, M. M.; JOYE, C. R.; ARAÚJO, A. C. U.; BORGES NETO, H. A. Sequência Fedathi na Produção do Material Didático de Matemática: Estudo de Caso do IFCE. *Conexões - Ciência e Tecnologia*, v. 12, n. 1, p. 8-17, mar. 2018. Disponível em: <<http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1321>>. Acesso em: Acesso em 23 jun. 2020.

SCHREIBER, P. K.; PEREIRA, E. C., MACHADO, C. C., PORCIÚNCULA, M. Sala de aula invertida no ensino de Matemática: mapeamento de pesquisas científicas na área de Ensino. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 20, n. 2, out. 2018. ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/35473>>. Acesso em 23 jun. 2020.

TALBERT, R. *Guia para Utilização da Aprendizagem Invertida no Ensino Superior*. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

TALL, D. *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

_____. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. *Proceedings...* Blackwood: ATCM Inc, 2000. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>>. Acesso em 23 jun. 2020.

VALENTE, J. A. *Blended learning e as mudanças no Ensino Superior*: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, Curitiba, Edição Especial, n. 4, p. 79–97, 2014.