CONSIDERAÇÕES SOBRE CRITÉRIOS DE ESCOLHA DO MÉTODO DE AJUSTAMENTO DE CURVAS

Considerations on criteria for selecting a method of curves adjustment

Carlos Eduardo da Cunha Pinent
Helena Noronha Cury

Resumo

Neste artigo, discute-se o ajustamento de curvas a um conjunto de pontos observados e a escolha da melhor função de ajustamento. A partir de exemplos numéricos, mostramos que a decisão da escolha entre ajuste linear ou quadrático, por critérios de qualidade de ajuste, somente favorece a parábola, nunca a reta. Também consideramos que a questão da escolha da melhor função de ajustamento exige pressupostos que estão além de qualquer critério objetivo. O tema abordado é apresentado em cursos de graduação, e focam-se, em especial, os cursos de Licenciatura em Matemática. Os professores, no trabalho com Modelagem Matemática, por exemplo, podem empregar esses conhecimentos desde o Ensino Fundamental até o Superior.

Palavras-chave: Ajustamento de funções. Trabalhos com Modelagem Matemática. Ensino de Matemática.

Abstract

This article discusses the curve adjustment to a set of observed points and the choice of the best adjusting function. From numerical examples, we show that the decision of the choice between linear or quadratic adjustment, by quality criteria, only favors the parabola, never the line. We also consider that the question of choosing the best adjustment function requires assumptions that are beyond any objective criterion. The topic is presented in undergraduate courses and focuses, in particular, Mathematics Teaching Courses. Teachers, when working with mathematical modeling, for example, can use such knowledge from primary to higher education.

Keywords: Functions adjustment. Works with mathematical modelling. Mathematics Teaching.

Introdução

O ajustamento de curvas é um tópico estudado em cursos superiores da área de Ciências Exatas e Tecnologia, em disciplinas de Estatística ou de Cálculo Numérico. Em especial, nos cursos de Licenciatura em Matemática, é muito usado em projetos que envolvem a Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2002; BISOGNIN; BISOGNIN, 2011; SOUZA; BISOGNIN, 2012).

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), é sugerido o ensino de conceitos de Estatística, englobados no bloco intitulado "Tratamento da Informação". Nesse documento, lê-se: "Vale destacar a necessidade de se intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão), abordadas de forma mais intuitiva no ensino fundamental" (p. 79).

Entre os conceitos que podem ser introduzidos nesses níveis de ensino está o ajustamento de curvas, inclusive porque pode ser trabalhado com uso de planilhas, encontradas, em geral, nos computadores disponíveis nas escolas de educação básica, em sua versão livre (como no Open Office) ou proprietária (como no Microsoft Office).

O problema da escolha da melhor função de ajustamento

Um dos métodos mais usados para ajuste de curvas resume-se ao processo de ajustamento linear, quadrático e, às vezes, exponencial, pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A preferência por esse método não é, em geral, explicada aos alunos desses cursos de graduação nem discutida pelo professor em sala de aula. Quando é posta a questão sobre essa preferência, surge, muitas vezes, a informação de que o método é adequado porque possui solução analítica[1]. No entanto, o que não é explicado (ou a explicação não fica clara) é o fato de que a escolha desse método (ou de qualquer outro) envolve um conjunto de suposições sobre os dados ou sobre as observações que não estão, necessariamente, contempladas em uma dada situação específica (PINENT; SILVEIRA, 1992).

Quando o método é empregado em uma situação real, não é possível sequer testar, objetivamente, todas as premissas subjacentes à escolha do MMQ, visto que esse método tem pressupostos como a normalidade, a homocedasticidade[2] dos resíduos, a ausência de erro na medida da variável independente, etc. Porém, pelas facilidades atualmente proporcionadas pelos computadores, a existência de uma solução analítica não deve ser usada como critério de escolha do método de ajustamento. Se antes se buscavam preferencialmente as soluções analíticas, agora isso é irrelevante.

Outra dificuldade que observamos no ensino de métodos de ajustamento é a escolha da função de ajustamento. Quais as razões para usar uma função linear ou quadrática? A explicação mais comum de que essas são as funções mais usadas não satisfaz. Às vezes, embora raramente, costuma-se ouvir a informação de que, dentre as funções de ajustamento, a melhor é aquela que apresenta a menor soma dos quadrados dos resíduos, ou a menor variância residual; portanto, se a escolha tiver que ser entre as funções linear e quadrática, ajustam-se ambas, em seguida calcula-se a variância residual (ou a soma dos quadrados dos resíduos) para cada caso e opta-se por aquela que apresentar o menor valor.

Este último critério, para decidir entre reta e parábola, é equivocado porque admite, em princípio, que a reta poderá ter uma soma dos quadrados dos resíduos menor que a parábola. Pinent e Silveira (1992, p.18) afirmam que:

> [...] a tomada de decisão entre a reta e a parábola por critérios "a posteriori", como a soma dos quadrados, variância residual ou coeficiente de correlação, terá necessariamente apenas um dos dois possíveis resultados: rejeita-se o ajuste linear em favor do de 2º grau ou ambos são igualmente adequados; nunca a decisão poderá ser a favor da reta como melhor função de ajustamento que a parábola.

Bassanezi (2002) afirma que, em um programa simples de ajustamento, é escolhido, *a priori*, o tipo de curva que se deseja que expresse a relação funcional. No entanto, "[...] este processo nem sempre satisfaz as condições mínimas exigidas para uma previsão do relacionamento futuro destas variáveis" (BASSANEZI, 2002, p.55).

É preciso discutir com os alunos sobre a escolha da melhor função de ajustamento, visto não terem, ainda, conhecimentos suficientes sobre o assunto que lhes permitam levantar questões transcendentes. Assim, ganha-se importante oportunidade de se propor uma discussão enriquecedora.

O problema do ajustamento de uma curva a um conjunto de observações nada mais é do que uma instância particular do "problema da indução" (tendo em vista que a aplicação prática do ajustamento é a inferência, ou indução estatística), que é em síntese o seguinte: como, a partir

[1] O MMQ possui solução analítica quando a função de ajustamento é linear nos parâmetros. Os pacotes estatísticos como o SPSS possibilitam solução analítica para o ajuste através do MMQ ou de qualquer outro método definido pelo usuário; tal solução é adequada quando a função de ajustamento for não linear nos parâmetros.

[2] Admite-se que os resíduos gerados para cada valor de X têm a mesma variância. É um pressuposto para o MMQ.

de casos particulares (uma amostra), obterem-se enunciados gerais?

Neste texto, trazemos algumas considerações sobre o assunto, como contribuição para as suas aplicações em aulas de Matemática, desde o Ensino Fundamental até o ensino em cursos de Pós-Graduação.

Exemplos numéricos

Para estimular um debate com os alunos de cursos de graduação, propomos dois exemplos de simples solução e compreensão, retirados de Pinent e Silveira (1992).

O primeiro exemplo (Quadro 1) é uma simulação utilizando-se o Método de Monte Carlo (SOBOL, 1983) para gerar uma variável aleatória normalmente distribuída (designada por *e*) com média zero e variância 9,0. A partir de uma variável *X*, vamos criar uma variável *Y* a partir da relação linear $y = X + 5$, adicionada à variável aleatória *e* gerada pelo Método. *Y* passa a ser, então, uma variável aleatória.

Dessa forma, por construção, há uma tendência linear entre *X* e *Y*. Ou seja, sabemos que a verdadeira tendência entre as variáveis X e Y é linear.

Quadro 1 – Construção de uma tendência linear entre *X* e *Y* com auxílio do Método de Monte Carlo.

X	y	e	Y
0	5	1,5	6,5
1	6	-4,1	1,9
2	7	0,2	7,2
3	8	0,6	8,6
4	9	-5,2	4,8
5	10	6,2	16,2
6	11	-1,9	9,1
7	12	-0,7	11,3
8	13	0,3	13,3
9	14	-3,0	11,0

Fonte: Pinent e Silveira, 1992, p.23.

Em seguida, passa-se aos resultados dos dois ajustes, linear e parabólico, para os valores do Quadro 1, em que $\hat{Y}$ é o valor estimado de *Y* a partir da equação de ajustamento, SQ é a soma dos quadrados dos desvios $Y - \hat{Y}$, S_r^2 é a variância dos desvios (ou resíduos), *R* é o coeficiente de correlação entre *X* e *Y* e $\hat{R}_1$ é o coeficiente de correlação ajustado (com o denominador n-1). A partir dos valores dos pares ordenados (*X*;*Y*), os coeficientes da reta (ajuste linear), $\hat{Y} = aX + b$, e da parábola (ajuste parabólico), $\hat{Y} = aX^2 + bX + C$ são determinados pelo MMQ:

Ajuste linear	Ajuste quadrático
$\hat{Y} = 0{,}93X + 4{,}80$	$\hat{Y} = -0{,}077X2 + 1{,}62X + 3{,}88$
$SQ_1 = 85{,}7$	$SQ_2 = 82{,}6$
$S_r^2 = 10{,}71$	$= 11{,}8$
$R_1 = 0{,}675$	$R_2 = 0{,}689$
$\hat{R}_1 = 0{,}623$	$\hat{R}_2 = 0{,}570$

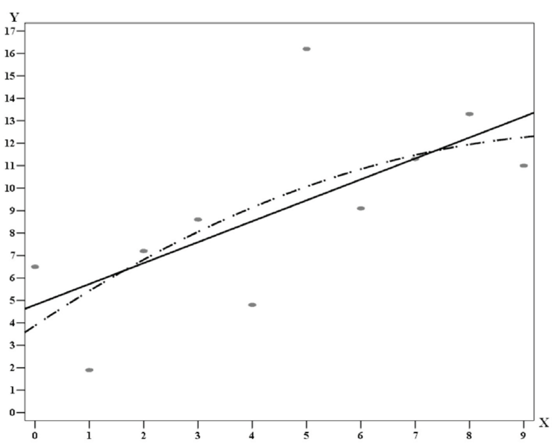
O próximo passo é o cálculo da razão F, para testar a significância da diferença entre os quadrados dos dois coeficientes de correlação (GUILFORD, 1973):

$$F = \frac{\left(0{,}689^2 - 0{,}675^2\right)}{1 - 0{,}689^2}\left(10 - 3\right) = 0{,}254$$

O valor crítico de F ao nível de 25% é 1,57 (WINER, 1971); portanto, decide-se pela não rejeição da hipótese nula. É necessário lembrar que a hipótese nula é enunciada pela afirmação: não há diferença entre os quadrados dos dois coeficientes de correlação, ou seja, não há diferença estatisticamente significativa entre os dois ajustamentos.

Podemos, ainda, fazer a representação dos pontos e das curvas de ajuste, na Figura 1, a seguir:

Figura 1 – Gráfico dos pontos simulados no Quadro 1 e equações de ajustamento linear (linha contínua) e parabólico (linha tracejada).



O segundo exemplo (Quadro 2) foi obtido de Spiegel (1993): *Y* se refere à população dos EUA (Estados Unidos da América), em milhões de habitantes, e *X* é a década correspondente. A década zero corresponde a 1850 e a 10, a 1950. Neste exemplo, contrariamente ao anterior, não se conhece a verdadeira tendência entre *X* e *Y*.

Quadro 2 – População dos EUA, em milhões de habitantes, entre 1850 e 1950.

Ano	*X*	*Y*
1850	0	23,2
1860	1	31,4
1870	2	39,8
1880	3	50,2
1890	4	62,9
1900	5	76,0
1910	6	92,0
1920	7	105,7
1930	8	122,8
1940	9	131,7
1950	10	151,1

Fonte: Spiegel, 1993, p.352.

Em seguida, passa-se aos resultados dos dois ajustes, linear e parabólico, para os valores do Quadro 2:

Ajuste linear	Ajuste parabólico
$\hat{Y} = 13{,}00X + 15{,}63$	$\hat{Y} = 0{,}40X^2 + 9{,}02X + 21{,}59$
$SQ_2 = 176{,}11$	$SQ_2 = 40{,}58$
$S_r^2 = 19{,}57$	$S_r^2 = 5{,}07$
$R_1 = 0{,}9953$	$R_2 = 0{,}9989$
$\hat{R}_1 = 0{,}9948$	$\hat{R}_2 = 0{,}9986$

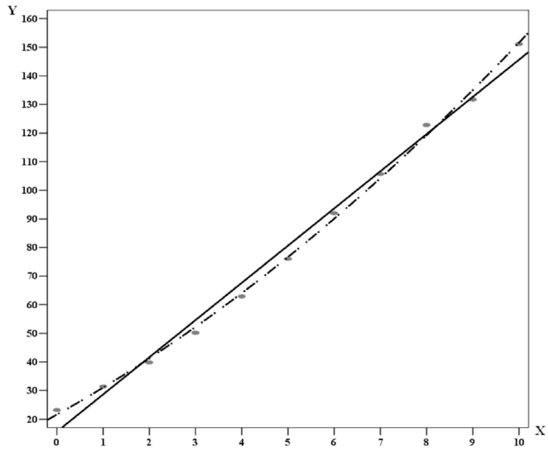
O próximo passo é o cálculo da razão F para testar a significância da diferença entre os quadrados dos dois coeficientes de correlação:

$$F = \frac{\left(0{,}9989^2 - 0{,}9953^2\right)}{1 - 0{,}9989^2} 8 = 26{,}12$$

O valor crítico de F ao nível de 0,1% é 25,42; portanto, decide-se pela rejeição da hipótese nula em nível inferior a 0,1%, ou seja, há diferença estatisticamente significativa entre os ajustamentos.

Novamente, podemos representar os dados na Figura 2:

Figura 2 – Gráfico da população dos EUA entre 1850 e 1950, equações de ajustamento linear (linha contínua) e parabólico (linha tracejada).



O critério das somas dos quadrados, no primeiro exemplo, permitiu que se chegasse à conclusão de que a parábola se ajusta um pouco melhor do que a reta; as duas somas (SQ_1 e SQ_2) são muito semelhantes, mas SQ_2 é menor. No entanto, como o teste de significância estatística levou à não rejeição da hipótese nula, conclui-se que a pequena vantagem da parábola sobre a reta, ou seja, a relação $SQ_2 < SQ_1$, deve ser atribuída ao acaso. Efetivamente, se sabe que, por construção, há uma tendência linear entre X e Y; o acaso se deve à inclusão da variável aleatória *e*.

No segundo exemplo, ainda que o coeficiente de correlação R seja próximo da unidade (isto é, ainda que o ajuste linear seja considerado bom), pode-se observar que $SQ_2 \cong 4SQ_1$, ou seja, o a soma dos quadrados, no caso da parábola, é aproximadamente quatro vezes menor do que no caso da reta. Portanto, esse dado leva à rejeição da hipótese nula, no teste de significância estatística, significando que o ajuste parabólico é melhor que o linear.

Com esses exemplos, podemos mostrar aos alunos que a reta não se ajusta melhor do que a parábola, mesmo quando a relação é linear por construção (exemplo 1). Se o trabalho estiver sendo feito em um curso de Licenciatura em Matemática, em que as demonstrações fazem parte dos conteúdos matemáticos ou estatísticos apresentados, podemos mostrar aos estudantes, eventualmente, a demonstração dessa verificação numérica. A demonstração pode ser encontrada em Pinent e Silveira (1992, p.19-22).

Revisão de estudos que utilizaram ajustamento de curvas

Acreditamos ser importante discutir com os licenciandos em Matemática a respeito das questões aqui apresentadas, em especial com o que se prepara para ser professor, até porque isto sairá da rotina metodológica imposta por um programa de ensino de Estatística, que geralmente se resume ao cálculo e interpretação de medidas estatísticas.

Além disso, na prática docente dos licenciandos, questões que envolvem ajustamento surgirão em várias situações. Por exemplo, Seckler (2010) trabalhou com resolução de problemas com uma turma de alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, a partir de dados coletados por eles em seu próprio contexto, visto que a maioria deles vivia em pequenas propriedades rurais. Os estudantes buscaram informações sobre área de terra plantada, quantidade colhida e gastos com a lavoura, para três produtos: milho, fumo e feijão.

Nesse trabalho, Seckler (2010) teve que supor que todas as lavouras de um determinado produto tinham a mesma produtividade e os mesmos gastos, para poder fazer o ajuste com uma função linear; se houvesse empregado os dados reais, o ajustamento de curvas traria vantagens para o ensino de equações polinomiais de segundo grau, próximo assunto a ser trabalhado com a turma.

Rocha (2009) também trabalhou com dados coletados por alunos de 8ª série, em uma experiência com Modelagem Matemática no contexto da educação ambiental. Em uma das atividades, os estudantes queriam saber qual a altura máxima atingida por um pé de eucalipto e qual a altura mínima para o primeiro corte. Tendo coletado informações em empresas que cultivam eucaliptos, os estudantes montaram uma tabela da altura versus tempo de vida e construíram um gráfico com a planilha eletrônica Excel, até o 8º ano de vida. Nesse período, foi possível modelar o fenômeno por uma função linear, mas quando tentaram saber a altura máxima atingida e montaram uma tabela de 0 a 100 anos, os alunos notaram que o gráfico não representava uma reta. Foi-lhes então explicado que a curva se chamava exponencial e, inclusive, foi possível mostrar a assíntota, evidenciando que 51 m é a altura máxima atingida por um eucalipto.

O estudo de função polinomial ou exponencial não era conteúdo da 8ª série, na escola em questão, mas, conforme comenta Rocha (2009), "[...] as perguntas dos alunos propiciaram essa abordagem, pois fazia parte da realidade deles." (p.48-49). Dessa forma, consideramos que os ajustes de curvas podem ser, também, apresentados aos alunos desde o Ensino Fundamental, se houver motivação e interesse pelo tema.

Chaves (2006) fez um trabalho usando Modelagem Matemática, com alunos de Ensino Médio, sobre o tema "consumo de álcool e tabaco entre os jovens de uma determinada cidade do Rio Grande do Sul". Os dados, coletados em um estudo epidemiológico, mostraram que o consumo de álcool tem aumentado 10% a cada ano nessa cidade e que, na época da pesquisa, havia cerca de 11.000 estudantes de Ensino Médio na cidade. Com essas informações, foi solicitado aos alunos que fizessem uma previsão do consumo de álcool nos próximos anos, se a taxa de crescimento permanecesse constante.

O trabalho, orientado pela professora-pesquisadora, levou os alunos, ao final, à fórmula de uma função exponencial, cujo gráfico foi feito no Laboratório de Informática da escola, com a planilha Excel. O trabalho estimulou os estudantes ao estudo da função exponencial e desencadeou várias outras atividades com dados relativos ao consumo de álcool e tabaco entre os jovens. Assim, além dos conteúdos matemáticos, foi possível discutir os efeitos dessas substâncias no organismo e outros assuntos correlatos, em uma visão interdisciplinar do tema.

Já no Ensino Superior, especificamente em um curso de Licenciatura em Matemática, podemos citar o trabalho desenvolvido por Stieler (2007), em uma disciplina ministrada por sua orientadora no referido curso. Os alunos trabalharam com Modelagem Matemática e, em grupos, escolheram temas do seu interesse para a investigação: uso de maconha, valor da passagem em transportes urbanos, consumo em carros biocombustíveis e criação de chinchilas. Os dados, coletados ou disponibilizados em diferentes mídias, permitiram aos alunos a construção de modelos matemáticos, em que foram usados ajustamentos lineares, quadráticos e exponenciais. Conforme Stieler (2007), com o trabalho foi possível explorar os conhecimentos matemáticos ou estatísticos dos licenciandos, compreendendo, também, o significado social dos assuntos abordados.

Esses exemplos mostram que, mesmo sendo um conteúdo em geral estudado em Cálculo Numérico ou em Estatística, o ajustamento de curvas presta-se a experiências de ensino e aprendizagem em qualquer nível de ensino e com metodologias diversas.

Um aprofundamento das considerações

Em cursos superiores ou em pós-graduações, essas considerações podem ser aprofundadas. Podemos, por exemplo, mostrar que o resultado pode ser generalizado para funções tais que a particularização de uma ou mais constantes a serem determinadas se reduz a outra. Um polinômio de grau m sempre se ajustará tão bem[3], ou melhor, do que outro de grau j, se j for menor do que m. Um polinômio que possui tantas constantes a serem determinadas quantos são os pontos observados ajustar-se-á perfeitamente a esses pontos.

Essas observações permitem concluir, ainda, que há infinitas funções que se ajustam perfeitamente a um conjunto de pontos observados (quando a curva passa exatamente sobre todos esses pontos); dessa forma, existe um número infinito de polinômios que se ajustam perfeitamente a um conjunto de pontos, quando o número de constantes a serem determinadas excede o número de pontos. Efetivamente, por dois pontos passam infinitas parábolas, infinitas equações do terceiro grau, do quarto grau etc.

Como consequência, pode-se considerar que uma sequência de observações aleatórias sempre pode ser descrita, posteriormente, por uma função. Reduzir o ajustamento a algumas curvas, como reta, parábola ou exponencial, pode levar a problemas na interpretação das informações. Um exemplo conhecido é o da relação entre o período de revolução de um planeta em torno do sol e a distância média planeta-sol, determinada por Kepler como $\hat{Y} = bX^{1,5}$.

Há uma “tentação”, comum, em casos de exercícios de ajustamento propostos em sala de aula, de usar apenas funções com expoentes inteiros. No entanto, se tomarmos os dados do Quadro 2, pode-se mostrar que a função $\hat{Y} = 8{,}08\sqrt{X} + 21{,}78$ se ajusta muito melhor do que a função linear ou a quadrática, visto que, nesse ajuste, SQ=32,89 e R=0,9991.

Vamos supor, então, que se queira ajustar uma função aos seguintes pontos observados: (0;5), (1;6), (2;7) e (3;8)[4]. Dentre as infinitas funções que se ajustam perfeitamente, têm-se as seguintes:

$$\hat{Y} = X + 5$$
$$\hat{Y} = 0{,}01\text{sen }(\pi X) + X + 5$$
$$\hat{Y} = -10\text{sen} + (2\pi X)\ X + 5$$
$$\hat{Y} = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 5X + 5$$

Além destas, há um número infinito de funções que se ajustam aos mesmos pontos, com o grau de aproximação que se quiser. Assim, as duas funções abaixo se ajustam ao conjunto de pontos citados acima, sendo que a primeira se ajusta quase perfeitamente[5] e a segunda, não tão bem quanto à primeira:

$$\hat{Y} = 0{,}01\text{sen }(6{,}6\pi X - \pi/3) + X + 5$$
$$\hat{Y} = X^4 - 6X^3 + 11\,(X+0{,}01)^2 - 5X + 4{,}7$$

Em um problema em que se faz necessário o ajuste de dados por meio de curvas, como escolher entre um número infinito de funções? Por exemplo, para os pontos acima indicados, como escolher entre as seis funções apontadas? Não há resposta objetiva a essa questão; deve-se buscar uma curva com R o mais alto possível, isto é, o mais próximo de um. Entretanto, na prática devem-se descartar funções que aderem perfeitamente aos dados, isto é, com $R = 1$, pois os dados são falíveis, possuem incertezas, levando-nos a priori a rejeitar ajustes perfeitos, ou mesmo quase perfeitos.

[3] Em termos estatísticos, na comparação do ajustamento de diferentes curvas, é usual usar as expressões “bem”, “melhor”, “muito melhor”; em um teste de hipótese, por exemplo, reta e parábola podem resultar “igualmente boas” para o ajuste.

[4] Exemplo retirado de Pinent e Silveira (1992).

[5] Neste caso, estamos propondo ao leitor que calcule os coeficientes de correlação R e verifique que será igual a um para as quatro primeiras funções e próximo de um para as seguintes.

Efetivamente, qualquer ajustamento, mesmo que pareça simples, como é o caso da escolha de ajuste linear ou quadrático, pode levar a um complicado e, muitas vezes, insolúvel problema da melhor escolha. Como afirmam Pinent e Silveira (1992), “[...] esboroa-se, desta forma, a pretensão de que o conhecimento científico é obtido a partir de observações, sem qualquer pressuposto, preconceito ou teoria” (p.28).

Essas considerações podem levar a uma discussão, em salas de aula de disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, sobre Filosofia e História da Ciência. Efetivamente, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), lê-se que a parte comum a todos os cursos de Licenciatura deve incluir conteúdos da História e da Filosofia das Ciências e da Matemática.

Também os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010) apontam que a atribuição central do licenciado em Matemática é a docência na Educação Básica e que, para isso, “requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas” (p.79).

Assim, a apresentação do tema abordado neste artigo pode desencadear uma discussão sobre a origem do conhecimento científico. Até porque muitos filósofos da ciência, entre os quais se inserem os filósofos da Matemática, ocupam-se deste aparente paradoxo[6]: o conhecimento científico é inventivo, é criação do intelecto humano.

Considerações finais

Mostramos e exemplificamos que a decisão da escolha entre reta e parábola por critérios de qualidade de ajuste somente tem um resultado positivo: a favor da parábola, nunca da reta. A reta pode ser uma função de ajustamento tão boa quanto a parábola, mas nunca melhor. Portanto, não podemos utilizar esse critério para a escolha. A questão da escolha da melhor função de ajustamento exige pressupostos que estão além de qualquer critério objetivo.

Essas considerações podem ser aproveitadas em cursos de formação inicial ou continuada de professores, haja vista a importância do ajustamento de curvas em problemas de Cálculo Numérico, de Modelagem Matemática ou mesmo em trabalhos com tecnologias informáticas, pela possibilidade de utilizar vários *softwares* na representação gráfica dos dados e das curvas de ajuste.

[6] Um paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum.

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p.105-121.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Parecer 1.302 de 6 de novembro de 2001 – CNE/CES*. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em 28 maio 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio. 2006. v.2. Disponível em: <http://sites.unifra.br/fisicamatematica/Produção/Produtos/tabid/1651/Default.aspx?PageContentID=62>. Acesso em 7 jun. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. *Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura*. Brasília, abril de 2010. Disponível em: <http://www.uff.br/enzimo/arquivos/arq0008.pdf>. Acesso em 08 jun. 2012.

CHAVES, C, M de S. *Modelagem matemática e o uso do álcool e do cigarro*: uma forma de contextualizar a matemática. 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)- Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2006.

GUILFORD, J. P. *Fundamental statistics in psychology and education*. New York, McGraw-Hill, 1973.

PINENT, C. E. da C.; SILVEIRA, F. L. Mínimos quadrados: pode a reta ser, em algum caso, melhor função de ajustamento do que a parábola? *Scientia*, São Leopoldo, v.3, n.1, p.17-28, 1992.

ROCHA, K. L. S. da. *A Modelagem Matemática para o Estudo de Funções no Contexto da Educação Ambiental.*

2009. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)- Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2009.

SECKLER, D. M. *O ensino de função polinomial do 1º grau na oitava série do Ensino Fundamental:* um trabalho com situações do cotidiano. 2010. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2010.

SOBOL, I. *O Método de Monte Carlo*. Moscou: MIR, 1983.

SOUZA, A. M.; BISOGNIN, V. Modelagem matemática: análise da variação da população brasileira e do Rio Grande do Sul. In: SIMPÓSIO DE ENSINO DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA, 2., 2012, Santa Maria. *Anais...* Santa Maria: UNIFRA, 2012. 1 CD-ROM.

SPIEGEL, M. R. *Estatística.* 3.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1993.

STIELER, M. C. *Compreensão de conceitos de matemática e estatística na perspectiva da modelagem matemática*: caminhos para uma aprendizagem significativa e contextualizada no ensino superior. 2007. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2007.

WINER, B. J. *Statistical principles in experimental designs*. New York: McGrawHill, 1971.

Carlos Eduardo da Cunha Pinent – Doutor em Educação, professor aposentado de Estatística.

Helena Noronha Cury – Doutora em Educação, professora do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), de Santa Maria, RS.

RECEBIDO EM: JUL. 2012
CONCLUÍDO EM: NOV. 2012