ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Combinatorial analysis in High School

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa
Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Resumo

Este artigo é um recorte da dissertação de mestrado sobre Análise Combinatória para o Ensino Médio. Apresenta os conceitos desse tema e a justificativa para o seu estudo, trazendo a classificação dos problemas e a investigação como são abordados esses conceitos em dez livros didáticos. Os resultados apontam que os livros apresentam abordagens semelhantes, através de exemplos, não oportunizando ao aluno a construção do raciocínio combinatório que o leve à dedução das fórmulas. Os tipos de problemas apresentados nos livros são de enumeração, contagem e de classificação. Não são apresentados problemas de existência e de otimização.

Palavras-chave: Educação Matemática. Análise Combinatória. Tecnologias na Educação.

Abstract

This article is a clipping of the dissertation on Combinatorial Analysis for High School. Presents the concepts of this topic and the rationale for their study, presenting the classification of problems and research how these concepts are covered in 10 textbooks. The results indicate that the books have similar approaches through examples do not providing opportunities for the student to deduce the formulas. The types of problems presented in the books are enumeration, counting and sorting. Problems of existence and optimization are not presented.

Keywords: Mathematics Education. Combinatorial Analysis. Technology in Education.

Introdução

Este artigo é uma revisão teórica dos conceitos e da abordagem didática do tema Análise Combinatória para o Ensino Médio. Tem a pretensão de apresentar subsídios aos professores para o planejamento pedagógico de aulas com esse tema (HOMA, 2011).

Apoia-se em autores que pesquisam o tema e o justificam como temática importante a ser estudada no Ensino Médio.

Análise Combinatória no Ensino Médio

Segundo Ribnikov (1988) a Análise Combinatória estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir dos seus elementos, mediante certas transformações que causam mudanças na estrutura ou na composição dos mesmos. De maneira geral, pode-se dizer que é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações entre conjuntos discretos. As configurações obtidas pela reorganização dos elementos de um conjunto discreto diferenciam-se basicamente entre dois tipos de agrupamentos: um que considera a ordem e a natureza dos elementos dentro do agrupamento e o outro em que a ordem dos elementos é irrelevante.

Para Roa e Pelayo (2001), a Análise Combinatória é uma das áreas fundamentais da Matemática Discreta e da Probabilidade.

Atualmente, possui amplo campo de aplicação, com investigação ativa e numerosas aplicações teóricas e práticas em Geologia, Química, Gestão Empresarial, Informática e Engenharia (ALMEIDA; FERREIRA, 2010). Na Matemática, a Análise Combinatória é aplicada na teoria das Probabilidades, no desenvolvimento do Binômio de Newton (MACHADO, 1986), em processos Estocásticos Discretos, na teoria da Comunicação, em Lógica e teoria de Autômatos, nas Ciências da Computação e Matemática Recreativa (BATANERO; GODINO; PELAYO, 1996).

Historicamente o principal estímulo aos estudos e ao desenvolvimento da Análise Combinatória, segundo Boyer, foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos denominados jogos de azar. Esses estudos foram iniciados no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia, depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1661) e Blaise Pascal (1623-1662).

Para Batanero, Godino e Pelayo (1996), a Análise Combinatória é um componente essencial da Matemática Discreta e, como tal, tem um importante papel na Matemática escolar. Também afirmam que, além da sua importância no desenvolvimento da ideia de probabilidade, a capacidade combinatória é um componente fundamental do pensamento formal.

Entre as razões para o ensino da Análise Combinatória, descritas por Kapur (1970), destacam-se as oportunidades proporcionadas pelos problemas combinatórios como:

- os conceitos de contagem, a Modelagem Matemática, a possibilidade de conjecturar, contando sem contar através de generalizações, as otimizações;
- as aplicações nos campos das Ciências;
- o desenvolvimento de conceitos de relações, funções, classes de equivalência, isomorfismo;
- ajuda no desenvolvimento do pensamento combinatório que examina todas as possibilidades, enumera e encontra a melhor solução e, pelo planejamento adequado, trabalha com problemas que não dependem de cálculos complicados, permitindo que sejam apresentados nos diversos níveis escolares.

A escolha desse tema se justifica por ser um assunto que apresenta grandes dificuldades para os alunos do Ensino Médio (MUNSIGNATTI JR., 2010) e, segundo esse autor, no estudo desse assunto o principal é o raciocínio, pois saber apenas fórmulas de Arranjo e Combinação, entre outras, não é suficiente. A grande vantagem desse conteúdo é estimular a capacidade de abstração do estudante para resolver problemas, sendo possível desenvolver atividades contextualizadas socioculturalmente, aproximando-o da realidade, permitindo vivenciar situações próximas, que lhe possibilitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nessa realidade, competência proposta pelo PCN+, Ensino Médio (BRASIL, 2002). Segundo Morgado et al. (1996), a solução de um problema combinatório exige, quase sempre, engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002), as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento e tornaram-se bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como é importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais Ciências e áreas. Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística.

Problemas combinatórios

O estudo formal e rigoroso da Análise Combinatória requer o conhecimento de vários conceitos de álgebra abstrata, entre os quais:

- conjunto, subconjunto e operações entre subconjuntos de um dado conjunto; conjunto de partes e partição de um conjunto;

- produto cartesiano de conjuntos;
- relação binária; propriedades de equivalência; relação de ordem; grafos associados a relações binárias;
- correspondências e aplicações: injetiva, sobrejetiva e bijetiva;
- cardinalidade de um conjunto; equipotência.

Para atividades direcionadas ao Ensino Médio, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), não é necessário o uso explícito de tais conceitos, podendo ser apresentadas somente as operações de subconjuntos que formulam as regras da soma, do produto e do quociente que embasam respectivamente o Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo e a Combinação como a razão entre o número de Arranjos e as Permutações.

- Regra da soma: se S é um conjunto finito e $S = \bigcup_{i \in I} A_i$, onde A_i é um subconjunto de S para todo $i \in I$, então $Card\,(S) \leq \Sigma\ i \in I\ Card\,(A_i)$, onde, para o caso de todos os A_i serem disjuntos, verifica-se a igualdade dos termos.
- Regra do produto: se $A_1, A_2, \ldots A_n$ são conjuntos finitos, a cardinalidade do produto cartesiano é dado por $Card\,(A_1\ x\ A_2 x \ldots x\ A_n) = \prod_{i=1}^{n} card\,(A_i)$.
- Regra do quociente: se S é um conjunto finito de cardinalidade n, e existe uma relação de equivalência cujas classes de equivalência têm todas a mesma cardinalidade r, o número de classes é $\frac{n}{r}$.

Na introdução à Análise Combinatória, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), devem ser abordados diversos tipos de problemas combinatórios, dadas certas condições, de modo que o número de possibilidades não seja elevado, possibilitando a solução através da enumeração sistemática de todos os agrupamentos possíveis. Após o desenvolvimento da capacidade de solução desses problemas, explora-se a capacidade de compreensão dos algoritmos para geração sistemática de todas as soluções e assim deduzir as respectivas fórmulas de contagem.

Os mesmos autores afirmam também que o uso da recursividade e indução permite ao aluno contar sem contar, determinando o número de possibilidades ou eventos de uma situação que se apresente, sendo particularmente útil na solução de problemas com um elevado número de agrupamentos. A recursividade, como um método geral de resolução de problemas, implica a identificação de um processo ou procedimento que invoca ele mesmo, sendo necessário, então, a redução do problema apresentado em um menor que se repita nele mesmo.

O processo de indução para generalizar um processo recursivo garante a sua validade em um contexto de infinitos objetos ou eventos. A operação fatorial definida como $F(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ n.F\,(n-1), & n > 1 \end{cases}$ pode ser desenvolvida na construção do conceito de Permutação Simples, onde $P(n) = F(n)$, sendo um exercício do pensamento lógico formal no uso da recursão e indução.

Para o desenvolvimento do pensamento combinatório recursivo através da solução de problemas, como Permutações e Arranjos apresentados ao Ensino Médio, com um número fixo e finito de elementos, Batanero, Godino e Pelayo (1996) identificam os seguintes processos:

- formação efetiva, ou enumeração completa, dos agrupamentos para um número pequeno de objetos;
- descrição do processo de construção de todos os agrupamentos;
- demonstração lógica do processo utilizado, para garantir que não falte nenhum agrupamento.

A dificuldade na construção de um modelo sistemático de enumeração está diretamente ligada ao completo entendimento do problema, pois mesmo tendo o conhecimento dos tipos de agrupamentos básicos e suas fórmulas, a falta de compreensão do problema leva ao uso incorreto dos modelos matemáticos básicos (fórmulas matemáticas).

Entre as dificuldades típicas associadas à compreensão dos problemas combinatórios, segundo Hadar e Hadass (1981), está o não reconhecimento do conjunto correto de eventos desejados no problema. O uso de notação inapropriada que represente toda a informação e as condições do problema também geram outras dificuldades, associações com a variável x para a quantidade de eventos, dando um caráter algébrico na busca da solução, ou mesmo variáveis indexadas como $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_n = n$ para representar as quantidades de elementos, ao contrário da utilização de n, levando a uma complexidade maior, que impede o completo entendimento do problema. Em alguns casos, o entendimento acaba sendo compreendido como um conjunto de enunciados particulares e não como um problema com parâmetro variável. Outra dificuldade é a capacidade de generalização, em que, por vezes, mesmo sendo capaz de resolver para casos particulares de n, o aluno é incapaz de generalizar a solução.

A classificação do tipo de problema a ser tratado facilita a sua compreensão e a identificação do método a ser utilizado para solucioná-lo. Batanero, Godino e Pelayo (1996) classificam os principais tipos de problemas, abordados nos estudos de Análise Combinatória, diferenciando-os nas seguintes categorias:

- de existência, em que se comprova a existência, ou não, de um determinado tipo de estrutura. Por exemplo, o problema dos matrimônios: Ana conhece André, Jose e Carlos; Beatriz conhece Jose e Carlos; Carmem conhece Carlos, Antonio e Julio; Daniela conhece André e Jose; Elisa conhece Carlos, Jose e André; Leticia conhece Antonio, João e Francisco. É possível achar um marido para cada moça entre os rapazes que elas conhecem?
- de enumeração, onde são enumerados ou listados os elementos que possuem determinada propriedade. Ex.: dado o conjunto {2, 3, 5}, quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados? Faça os agrupamentos e ordene os números formando uma coluna;
- de contagem, em que é determinado o número de elementos que possuem uma ou várias propriedades. Ex.: o dominó tem 2 tipos de peças, as peças duplas, cujos dois lados têm números iguais, e as ordinárias, cujos dois lados têm números diferentes. Quantas peças ordinárias têm a soma dos seus lados igual a seis?;
- de classificação, em que, devido à inviabilidade de contagem, é feita uma classificação mediante relações apropriadas. Ex.: quantos inteiros entre 0 e 1000 não são divisíveis por 2 e 3?;
- de otimização, quando é possível associar uma função ao conjunto solução, a qual induz no conjunto uma ordem total, podendo então considerar as noções de máximo e mínimo. Ex.: na informática, problemas como o algoritmo de busca linear em uma lista ordenada com n elementos executa n operações de comparação entre os elementos da lista e o elemento procurado. A otimização ao problema através de uma *busca binária* executa para o pior caso, $\lfloor log_2 n \rfloor +1$ operações, ou seja, tem uma complexidade computacional $O(log_2 n)$, que é bem inferior à complexidade $O(n)$ da busca linear.

A classificação dos problemas em Análise Combinatória é um facilitador, pois a compreensão do tipo de problema ajuda na escolha da estratégia mais apropriada a ser utilizada para resolvê-lo.

Para os problemas de contagem, Dubois (apud BATANERO; GODINO; PELAYO, 1996) propõe três estratégias:

- *seleção de uma amostra* a partir de um conjunto de objetos – dado um conjunto de n elementos distintos, são feitos agrupamentos de r elementos selecionados;
- *colocação de objetos em casas* – dado um conjunto de n elementos distintos, são selecionados r elementos, que são distribuídos em k posições ou casas;
- *partição de um conjunto* de objetos em subconjuntos – dado um conjunto de n elementos distintos, são selecionados r elementos, que são distribuídos em k posições ou casas; considerando-se os elementos nas casas como subconjuntos ordenados, tem-se cada distribuição como uma partição ordenada de elementos distintos em subconjuntos ordenados.

A distinção entre os modelos estratégicos é essencial do ponto de vista matemático, pois os objetos e representações dos problemas são distintos e estão diretamente associados aos procedimentos e às técnicas a serem empregados na solução dos problemas. A seguir, são apresentadas as etapas descritas por Batanero, Godino e Pelayo (1996) subsequentes à identificação da estratégia a ser usada.

Para a estratégia de *seleção da amostra*, a próxima etapa consiste em identificar certas características do problema, logo, para um dado conjunto de n objetos distintos ao se tomar duas amostras, deve-se verificar se há necessidade de levar em consideração a ordem dos elementos para distinguir uma amostra de outra, se os elementos são diferentes ou se alguns são iguais e se a amostra tem elementos repetidos. Dessa maneira, da combinação dessas características tem-se os quatro tipos de agrupamentos básicos estudados na Análise Combinatória, apresentados na Figura 1.

Figura 1 – Diagrama com as quatro operações básicas em Análise Combinatória.

Amostra	Ordenada	sem repetição	$A(n,p)$
		com repetição	$AR(n,p)$
	Não ordenada	sem repetição	$C(n,p)$
		com repetição	$CR(n,p)$

Fonte: adaptado de Batanero, Godino e Pelayo (1996).

As representações simbólicas do diagrama são:

- $A(n,p)$, Arranjo simples cuja fórmula é dada por $A(n,p) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. O conceito de Arranjo simples expressa a ideia de n elementos distintos agrupados em subconjuntos com p elementos distintos arranjados em inúmeras ordens diferentes;
- $AR(n,p)$, Arranjo com repetição cuja fórmula é dada por $AR(n,p) = n^p$. O conceito de Arranjo com repetição expressa a ideia de n elementos distintos agrupados em subconjuntos com p elementos distintos, ou não, arranjados em inúmeras ordens diferentes;
- $C(n,p)$, Combinação simples cuja fórmula é dada por $C(n,p) = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$. O conceito de Combinação simples expressa a ideia de n elementos distintos agrupados em subconjuntos com p elementos distintos, de maneira que a ordem dos elementos não importa, ou seja, subconjuntos com os mesmos elementos em ordem diferente são considerados o mesmo agrupamento;
- $CR(n,p)$, Combinação com repetição cuja fórmula é dada por $CR(n,p) = C(n + p - 1, p)$. O conceito de Combinação com repetição expressa a ideia de n elementos distintos agrupados em subconjuntos com p elementos distintos, ou não, de maneira que a ordem dos elementos não importa.

Nas estratégias de *colocação em casas ou posições* e *particionamento* é preciso distinguir se os objetos são iguais ou distintos, se as casas ou subconjuntos são distintas ou não, se é considerada a ordem de colocação dos objetos nas casas, se é permitido mais de um elemento em cada casa e se é permitido que existam casas vazias. Considerando a ordem, a natureza dos objetos e das casas, são definidos seis tipos de problemas, associados às quatro condições de colocações injetivas, sobrejetivas, bijetivas e quaisquer, inclusive casas vazias.

Outras etapas são a identificação dos valores dos parâmetros envolvidos como o número de objetos, subconjuntos, o tamanho do conjunto universo e amostras, a formação dos agrupamentos solicitados ou de contagem das mesmas, para solução direta por meio das fórmulas. Na Figura 2 são apresentados os 24 modelos de colocação simples em casas e as fórmulas para o cálculo do número de soluções dos problemas.

Figura 2 – Fórmulas para problemas de colocações simples.

Colocação	Elementos	Casas ou posições	Tipo	Fórmula
Ordenada	Distintos	Distintas	Injetiva	$A(n,p)$
			Sobrejetiva	$p!\binom{p-1}{n-1}$
			Bijetiva	$P(n)$
			Qualquer	$p!\,(CR(n,p))$
		Iguais	Injetiva	1
			Sobrejetiva	$L(n,p)$
			Bijetiva	1
			Qualquer	$V(n,p)$

Colocação	Elementos	Casas ou posições	Tipo	Fórmula
Não ordenada	Distintos	Distintas	Injetiva	$A(n,p)$
			Sobrejetiva	$n!\, S(n,p)$
			Bijetiva	$P(n)$
			Qualquer	$AR(n,p)$
		Iguais	Injetiva	1
			Sobrejetiva	$S(n,p)$
			Bijetiva	1
			Qualquer	$\sum(n,p)$
	Iguais	Distintas	Injetiva	$C(n,p)$
			Sobrejetiva	$\binom{p-1}{n-1}$
			Bijetiva	1
			Qualquer	$CR(n,p)$
		Iguais	Injetiva	1
			Sobrejetiva	$PE(n,p)$
			Bijetiva	1
			Qualquer	$\prod(n,p)$

Fonte: adaptado de Godino, Batanero e Pelayo (1996).

As representações simbólicas do diagrama são:

- $\binom{p-1}{n-1} = C_{(n-1,\, p-1)}$, número de combinações de $(n\text{-}1)$ objetos tomados $p-1$ a $p-1$;
- $L(n,p) = \frac{p!}{n!}\binom{p-1}{n-1}$, números de Lah;
- $S(n,p) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_n=p \\ p_1 \geq 1}} \left(\frac{p!}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!}\right)$ números de Stirling de segundo tipo;
- $V(n,p) = \sum_{k=1}^{n} L(k,p)$, número de colocações ordenadas quaisquer, de p objetos distintos em n casas iguais;
- $\sum(n,p) = \sum_{k=1}^{n} S(k,p)$, número de colocações não ordenadas quaisquer, de p objetos distintos, em n casas iguais;
- $PE(n,p) = PE(n-1,\, p-1) + PE(n,p-n)$ para $p > n > 1$ e $PE(1,\, p) = PE(n,\, n) = 1$, com $p,\, n \geq 1$, número de colocações de objetos iguais em casas iguais, obtido de forma recorrente;
- $\prod(n,p) = \sum_{k=1}^{n} PE(k,p)$, número de colocações quaisquer de p objetos iguais em n casas iguais.

Considerando as colocações de objetos em casas, os agrupamentos serão subconjuntos de todas as soluções possíveis, e analisando um determinado agrupamento em uma casa ou posição tal que os elementos tenham determinada propriedade ou característica, pode-se considerar que o agrupamento é uma partição do conjunto das possibilidades, logo os problemas de *partição em subconjuntos* podem ser tratados como problemas de *colocação em casas.* Dubois (apud BATANERO; GODINO; PELAYO, 1996) estabelece uma equivalência entre os problemas de *colocação em casas* e os de *partição* apresentados na Figura 3.

Figura 3 – Equivalência entre os problemas de colocação em casas e os de partição.

Colocações de objetos em casas ou posições	**Partições**
ordenadas	subconjuntos ordenados
não ordenadas	subconjuntos não ordenados
de objetos distintos	de objetos distintos
de objetos iguais	de objetos iguais
casas ou posições distintas	partições ordenadas
casas ou posições iguais	partições não ordenadas
injetivas	em subconjuntos vazios ou com somente um objeto
sobrejetivas	em subconjuntos não vazios
bijetivas	em subconjuntos com somente um objeto
qualquer	em subconjuntos com mais de um objeto e com subconjuntos vazios

Fonte: adaptado de Godino, Batanero e Pelayo (1996).

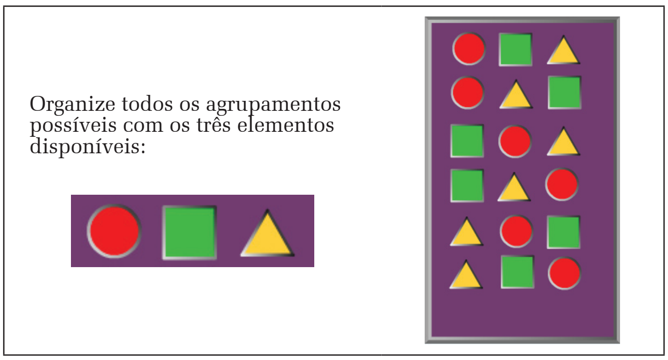
Fazendo uso das correspondências entre os tipos de problemas, é possível fazer uso das mesmas estratégias de solução, permitindo o cálculo através dos 24 modelos utilizados para a *colocação de objetos em casas*.

A estratégia para solução de problemas, com condições específicas, consiste na identificação e decomposição em partes menores com sua devida categorização para uso das fórmulas combinadas.

Organização dos conteúdos de Análise Combinatória

Segundo Fischbein e Gazit (apud BATANERO; GODINO; PELAYO, 1996), o conceito do Princípio Fundamental da Contagem ou Arranjos com e sem repetição de elementos pode ser explorado com o uso de números, letras e figuras geométricas (Figura 4). Em seus estudos, 80% dos alunos, nas idades de 10 a 15 anos, construíram a árvore de possibilidades sem nenhum tipo de ajuda.

Figura 4 – Exemplo do Princípio Fundamental da Contagem.

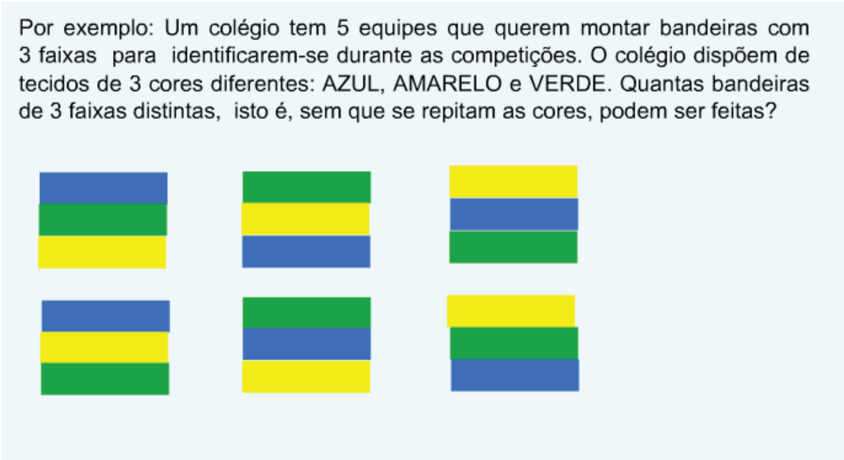


Fonte: autores.

Uma vez que seja introduzido o Princípio Fundamental da Contagem, é aconselhável a introdução do conceito de Permutações Simples, cuja solução consiste na mudança da ordem dos elementos, e a estratégia para a dedução da fórmula e sua conexão com a Árvore de Possibilidades.

Os mesmos autores identificaram que os alunos têm maiores dificuldades para os conceitos de Permutação e Arranjo com repetição, seguido de Arranjos e Combinações Simples. Quanto à natureza dos objetos a serem manipulados, após os alunos estarem acostumados a operar mentalmente com números e letras, é possível fazer uso de objetos como bandeiras e comissões (Figura 5).

Figura 5 – Exemplo de problema com bandeiras.



Fonte: autores.

Em síntese, a organização de uma sequência didática com o conteúdo de Análise Combinatória, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), levando em consideração as diversas categorias de problemas e as possíveis estratégias a serem utilizadas, deve iniciar-se por situações introdutórias aos conceitos combinatórios, em que seja possível a enumeração sistemática de todas as configurações com um número de possibilidades não elevado. A partir da capacitação em resolver tais problemas, é possível a compreensão dos algoritmos de geração sistemática de todas as possibilidades.

Os livros didáticos e a Análise Combinatória

No Brasil, os livros didáticos de Matemática apresentam a Análise Combinatória com os conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação com abordagens semelhantes. Para este trabalho, foram pesquisados dez livros didáticos, utilizados no Ensino Médio, conforme quadro da Figura 6.

Figura 6 – Conteúdo de Análise Combinatória dos livros didáticos.

AUTORES	TÍTULO	ESTADO	EDITORA	ANO
Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Jose Carlos Teixeira, Nilson Jose Machado, Marcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antonio dos Santos Machado	Matemática – Segundo Grau	São Paulo	Atual	1980
Antonio do Santos Machado	Matemática – Temas e Metas	São Paulo	Atual	1986
José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno	Segundo Grau – Matemática	São Paulo	FTD	1992
Adilson Longen	Matemática: uma Atividade Humana	Curitiba	Base	2003
Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva	Matemática Aula por Aula	São Paulo	FTD	2003
Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida	Matemática: Ciências e Aplicações	São Paulo	Atual	2004
Luiz Roberto Dante	Matemática Volume Único	São Paulo	Ática	2005
Manoel Paiva	Matemática Volume Único	São Paulo	Moderna	2005
Antonio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares, Vicente Paz Fernandez	Ensino Médio, Volume Único	São Paulo	Scipione	2009
Cíntia Bagatin Lapa, Jorge Luiz Farago, Lucio Nicolau dos Santos Carneiro	Projeto Eco Matemática 2	Curitiba	Positivo	2010

Fonte: a pesquisa.

Na Figura 7, são apresentados os livros didáticos com a listagem dos conteúdos de Análise Combinatória abordados.

Figura 7 – Quadro com os conteúdos de Análise Combinatória abordados nos livros didáticos.

Livros didáticos	Editora	Fatorial	Princípio Fundamental da Contagem	Permutação	Permutação com Repetição	Arranjos	Combinações	Binômios de Newton	Probabilidade	Triângulo de Pascal
Matemática – Segundo Grau	Atual		x	x	x	X	x	x	x	
Matemática – Temas e Metas	Atual	x	x	x	x	x	x	x	x	
Segundo Grau – Matemática	FTD	x	x	x		x	x	x	x	
Matemática: uma Atividade Humana	Base Editora	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Matemática Aula por Aula	FTD	x	x	x		x	x	x	x	x
Matemática: Ciências e Aplicações	Atual	x	x	x	x	x	x	x	x	
Matemática Volume Único	Ática	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Matemática Volume Único	Moderna	x	x	x	x	x	x	x	x	
Matemática: Ensino Médio, Volume Único	Scipione	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Projeto Eco Matemática 2	Positivo		x	x	x	x	x	x	x	

Fonte: a pesquisa.

A apresentação da Análise Combinatória nos livros analisados sempre contextualizam com problemas de contagem (enumeração) como uma preparação para o estudo da Estatística e Probabilidade.

Os livros analisados iniciam os estudos com o Princípio Aditivo e Multiplicativo, apresentando em seguida o cálculo combinatório (uso das fórmulas) para a resolução dos problemas.

A abordagem metodológica utilizada é de apresentação dos conceitos, com exemplos resolvidos através de árvores e matrizes de possibilidades, não oportunizando ao aluno a construção do raciocínio combinatório que o leve a dedução das fórmulas.

Ressalta-se que somente o livro *Matemática – Segundo Grau* (IEZZI et. al.,1980) apresenta um capítulo de indução e recursão matemática, porém, tais conceitos não são explorados dentro da Análise Combinatória, considerados por Batanero, Godino e Pelayo (1996) essenciais ao pensamento lógico matemático, permitindo ao aluno contar sem contar. A abordagem do conceito de Permutação é realizada de modo direto e através da associação do Fatorial, não aproveitando a oportunidade para o estudo da recursividade.

Os tipos de problemas apresentados nos livros são de enumeração, contagem e de classificação. Não são apresentados problemas de existência e de otimização.

Para os problemas de contagem, a literatura propõe as estratégias de: seleção de uma amostra, colocação de objetos em casas (posições) e partição de um conjunto de objetos em subconjuntos. Observou-se que não são apresentados exemplos de partição de conjuntos.

Não são exploradas as fórmulas de Arranjo e Combinação com repetição. Os exemplos com repetição são explorados no Princípio Multiplicativo e na Permutação.

Referências

ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. *Aprendendo Análise Combinatória através da resolução de problemas:* um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2010.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; PELAYO, V. Navarro. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, México, v.8, n.1, abr. 1996. p.26-39.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. 2.ed. São Paulo: E. Blücher, 2006.

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Parâmetros Curriculares Nacionais. PCN+ Ensino Médio. Brasília: MEC, Semtec, 2002.

HADAR, N; HADASS, R.: The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, v.12, p.435-443, 1981.

HOMA, Agostinho Iaqchan R. *Testes adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória,* 2011. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática), ULBRA, Canoas, 2011.

KAPUR, J. N.: Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v.3, p.111-127, 1970.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática: temas e metas*. São Paulo: Atual, 1986.

MORGADO, A. C. de Oliveira et al. *Análise Combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Impa/Vitae, 1996.

MUNSIGNATTI JR., Mauro. Combinatória: números de soluções inteiras e não negativas de uma equação. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, v.28, n.73, 3º quadrimestre, 2010.

RIBNIKOV, K.: *Analisis Combinatorio*. Moscou: Mir, 1988.

ROA, Rafael; PELAYO, Virginia Navarro. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Jornadas Europeas de Estadística*, Ilhas Baleares, 10 e 11 out. 2001.

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa – Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil e professor do curso de Matemática Licenciatura da ULBRA.

Claudia Lisete Oliveira Groenwald – Doutora em Ciências da Educação pela Pontifícia de Salamanca na Espanha, professora do curso de Matemática Licenciatura e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA.