UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE DERIVADA NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

A proposal for the teaching of derivative at the first year of Secondary School in Brazil

Augusto César de Castro Barbosa
Cláudia Ferreira Reis Concordido
Leandro Machado Godinho

Resumo

Neste trabalho, propõe-se uma série de atividades com o objetivo de introduzir o conceito de derivada na primeira série do Ensino Médio. O histórico da presença de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Brasil, assim como a análise de alguns livros didáticos, serve para mostrar como o assunto já foi e está sendo tratado no país. Discute-se a preparação necessária para essas atividades, pois a simples inclusão de mais um tópico no programa poderia causar problemas para o cumprimento do cronograma e não trazer os resultados esperados. Algum grau de adequação dos conteúdos ministrados e de cooperação com professores de Física também é necessário. Um problema físico é o mote para a introdução do conceito de derivada. A metodologia está focada na visualização e na análise de gráficos, a fim de garantir uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Em boa parte do tempo, utiliza-se um *software* de geometria dinâmica, como importante ferramenta de apoio pedagógico.

Palavras-chave: Cálculo. Ensino Médio. Derivada.

Abstract

This paper presents a proposal of activities to be developed in the classroom, with the goal of introducing the concept of derivative for students in the first grade of secondary school. The historical presence of the topics of Differential and Integral Calculus in Brazilian High Schools, as well as the analysis of some textbooks, serves to show how it has been and is being treated in the country. The proper preparation for these classes was also included, since the simple insertion of the derivative could cause problems for meeting the schedule and could not bring the expected results. Some degree of adequacy of the contents and cooperation with Physics teachers are needed. The activities aiming at teaching the initial concepts of derivatives are motivated by a physical problem of motion. The focus is given on intuition and visualization of graphs, so there is a better understanding of the concepts involved. The use of a dynamic geometry software is required for much of the time, as an important tool for pedagogical support.

Keywords: Calculus. High School. Derivative.

Introdução

Um fator que tem pressionado o nosso sistema educacional na busca de um novo patamar em termos de qualidade são as avaliações nacionais e internacionais como, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação dos Alunos (PISA). O resultado do PISA de 2012 em Matemática mostra que nos encontramos bastante abaixo da média mundial, ocupando um lugar entre a 57ª e a 60ª posições em um *ranking* de 65 países.

Este péssimo desempenho é resultado de vários fatores, dos quais destacamos o desinteresse do alunado pelas atividades escolares, mais especificamente aquelas de Matemática. Diante desse cenário, cabe também ao professor buscar novas abordagens que induzam uma maior motivação dos alunos no desenvolvimento de suas atividades.

Por outro lado, uma discussão que ocorre nesse momento é a organização da Base Nacional Comum (BNC), que surge com a ideia da fixação de conteúdos mínimos para o Ensino Básico. Com isso, estaria sendo assegurada a formação básica comum a ser complementada, em cada estabelecimento escolar, com uma parte diversificada (BRASIL, 2013). Uma das propostas para o currículo de Matemática prevê a introdução do cálculo da taxa de variação de funções no Ensino Médio como tópico suplementar.

Nesse sentido, tentando promover uma experiência diferente do que é o padrão estabelecido atualmente, e visando uma melhoria no ensino, propomos a inclusão de tópicos do Cálculo Diferencial no Ensino Médio brasileiro, mesmo que de forma bastante sutil e sem grandes alterações curriculares.

Não procuramos, com isso, incentivar a volta massiva do conteúdo do Cálculo Diferencial ao currículo do Ensino Médio. Embora a total inclusão do Cálculo possa facilitar o caminho para quem vá seguir alguma carreira da área de Ciências Exatas, seriam acrescentados mais assuntos com pouca aplicabilidade no currículo do Ensino Médio.

Entendemos que a derivada é o tópico de Cálculo com maior aplicabilidade no Ensino Médio. Por isso, nossa intenção é apenas introduzir algumas noções de derivada que consideramos importantes na compreensão de conceitos básicos de Física e Matemática, com os quais os estudantes terão contato ainda na 1ª série do Ensino Médio.

Neste trabalho, dispensaremos o estudo detalhado de limites que antecede, em geral, a introdução ao conceito de derivada. Acreditamos que este estudo seja o motivo principal da resistência à volta do Cálculo à Matemática escolar, concordando com Geraldo Ávila, quando afirma que

> [...] há também uma certa reserva quanto à derivada, que costuma ser considerada difícil e imprópria para o Ensino Médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário. (ÁVILA, 2006, p.37)

É certo que o ensino de derivadas, sem uma compreensão mais profunda de limites, ficará com algumas lacunas, e deve-se apelar para a intuição em alguns momentos. Acreditamos, porém, que uma abordagem formal seja mais adequada ao ensino universitário.

Propomos aqui um conjunto de atividades para a absorção das ideias iniciais de derivada, que sejam desenvolvidas ainda durante a primeira série, aproveitando todo o contexto de funções. As atividades devem ter um apelo visual e intuitivo. Assim, sugerimos a utilização, como apoio pedagógico, do *software* livre de geometria dinâmica GeoGebra (HOHENWARTER, 2015), ou equivalente, a fim de tornar a exposição mais rápida e precisa, além de possibilitar uma pronta resposta a prováveis questionamentos e uma variedade maior de exemplos. No entanto, vale observar que o uso da informática não é indispensável para o sucesso da apresentação de todas as atividades, já que é perfeitamente possível desenvolver muitas das ideias sem a utilização de tecnologia.

Breve histórico

Ao longo do tempo, o Cálculo já foi incluído e excluído diversas vezes do Ensino Médio. Foi introduzido pela primeira vez nos programas oficiais em 1890 com a Reforma Benjamin Constant (BRASIL, Decreto nº 981, 1890). Em 1901, com a reforma de caráter mais humanista promovida por Epitácio Pessoa, alguns conteúdos deixaram de ser ministrados no Ensino Médio, entre eles o Cálculo (BRASIL, Decreto nº 981, 1901).

O Cálculo só voltaria a ser parte dos programas secundários em 1929, com as inovações curriculares que foram introduzidas pelo professor de Matemática Euclides Roxo no Colégio Pedro II (VALENTE, 2005). Ele aderiu às ideias propaladas pela ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), então presidida pelo matemático alemão Felix Klein, que iniciou estudos sobre o ensino da Matemática na escola secundária em vários países (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). Vale mencionar que até a década de 1920, a Matemática era subdividida em várias disciplinas isoladas e somente a partir da década seguinte passou a existir uma única disciplina chamada Matemática.

Em 1931, surge a reforma implementada por Francisco Campos (BRASIL, Decreto nº 19.890, 1931; Decreto nº 21.241, 1932). Os decretos, bases dessa reforma, não versavam explicitamente sobre os conteúdos que seriam ministrados nas escolas secundárias, mas sim que o Ensino Secundário oficialmente reconhecido seria ministrado no Colégio Pedro II e em estabelecimentos sob regime de inspeção oficial. Dessa forma, o Cálculo retornou ao Ensino Secundário.

Com a chegada do movimento chamado Matemática Moderna, iniciado nos anos 1950 e consolidado nos anos 1960, mais uma vez o ensino do Cálculo voltou a ser retirado dos currículos (BRASIL, Decreto nº 4.024, 1961). A Matemática Moderna foi um dos mais importantes movimentos no que diz respeito à Educação Matemática (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004), pregando que o ensino da Matemática deveria ter ênfase nas estruturas matemáticas, com uma forte valorização do estudo dos conjuntos e do rigor no uso da simbologia.

Apesar da força desse movimento, seus objetivos não foram alcançados. De acordo com Soares, Dassie e Rocha (2004, p.12), "[...] a reforma deixou de considerar que aquilo que se propunha estava fora do alcance dos alunos e dos professores. Estes, obrigados a ensinar uma matemática por cujos métodos não foram preparados, ministravam um ensino deficiente e só agravaram os problemas". Foi o excesso de rigor exigido que tornou alguns assuntos praticamente inviáveis de serem abordados adequadamente no Ensino Médio, como o Cálculo, que demandaria, de acordo com os novos padrões, quase um curso de Análise Matemática.

Até hoje, o Cálculo é abordado no Ensino Médio em poucos colégios, principalmente naqueles voltados à preparação para vestibulares que cobram o Cálculo em seus programas.

Abordagem do Cálculo nos livros didáticos

Analisamos dezenove livros didáticos de Ensino Médio – algumas obras atuais e outras mais antigas. Os títulos analisados foram escolhidos entre os disponíveis na biblioteca da sala de Matemática do *campus* São Cristóvão III do Colégio Pedro II A ideia foi traçar uma espécie de linha do tempo e perceber qual foi o foco dado pelos livros em relação ao Cálculo e se houve alguma mudança de abordagem com o passar dos anos. Nosso objetivo era buscar um livro didático que trouxesse as noções de derivada apresentadas ainda na primeira série do Ensino Médio, sem uma introdução formal e extensa sobre limites (que apareceriam de forma intuitiva apenas como ferramenta) e sem menção ao Cálculo Integral.

Nove dos livros didáticos consultados possuíam uma parte dedicada ao Cálculo. Sete desses foram escolhidos para fazer parte dessa análise. Nessa escolha, adotou-se o critério de se evitar livros com publicações em anos muito próximos. Destes, a maioria apresentava capítulos sobre limites e derivadas, dois apenas sobre derivadas e apenas um mostrava também conceitos de integral. O Quadro 1 mostra um resumo das características de cada livro analisado: Iezzi et al. (1976, 1990), Gentil et al. (1996), Barreto Filho e da Silva (2003), Smole e Diniz (2010), Dante (2010) e Paiva (2013) .

Quadro 1 – Resumo da análise dos livros.

Autor(es)	Ano	Limites: Capítulo Exclusivo	Limites: Contexto Introdutório	Derivada	Derivada: Contexto Introdutório	Derivada: Aplicações	Integral
Iezzi et al.	1976	Sim	Gráficos e aproximações	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada; variação das funções	Não
Iezzi et al.	1990	Sim	Gráficos e aproximações	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada; variação das funções	Não
Gentil et al.	1996	Sim	Gráficos e aproximações	Sim	Taxa de variação e limite	Reta tangente; cinemática (somente em exercícios); máximos e mínimos	Sim
Barreto Filho e da Silva	2003	Sim	Exemplo forçado	Sim	Taxa de variação e limite	Máximos e mínimos (sem contexto)	Não
Smole e Diniz	2010	Não	Taxa de variação instantânea	Sim	Reta tangente	Cinemática; função derivada; máximos e mínimos	Não
Dante	2010	Não	Taxa de variação instantânea	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada	Não
Paiva	2013	Sim	Taxa de variação instantânea	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada	Não

Fonte: a pesquisa.

Porém, havia uma característica comum: o Cálculo é apresentado somente na 3ª série do Ensino Médio. E a consequência disso é que temas como funções e gráficos não ficam adequadamente conectados com o Cálculo, por já terem sido estudados há algum tempo. A cinemática, principal aplicação de derivadas em Física no Ensino Médio, também já teria sido estudada em séries anteriores. Portanto, mesmo com aqueles livros em que a forma de exposição se alinha à proposta desse trabalho, existe esse problema de incompatibilidade temporal, pois nosso objetivo é apresentar os conceitos ainda na 1ª série.

Dessa forma, a apresentação do Cálculo sempre nos últimos capítulos dos livros de 3ª série sugere que sua inclusão seja tratada como um mero complemento aos demais conhecimentos já oferecidos nos outros volumes. Nossa conclusão é que nenhum deles poderia ser adotado como livro-texto por quem se dispusesse a usar as ideias aqui propaladas.

Proposta de atividades para implantação do Cálculo

Propomos que a noção de derivada seja apresentada no primeiro ano do Ensino Médio, após a conclusão do estudo da função quadrática. Desse modo, seguindo o programa usualmente ministrado em Matemática nessa série, o aluno já terá tido contato com conjuntos numéricos, funções, função afim e quadrática e seus gráficos.

As atividades aqui propostas levarão em torno de um mês sendo trabalhadas, de maneira que devemos prover esse tempo de alguma forma. Logo, um ou mais assuntos deverão ser trabalhados com menos ênfase, ou até mesmo suprimidos.

Ao defender o retorno do Cálculo ao Ensino Médio, Ávila (1991, p.4) observa que "[...] a ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados".

Partindo dessa afirmação, procuramos avaliar quais tópicos poderiam ser abordados com menos detalhes a fim de permitir a inclusão da noção de derivada. Um desses tópicos é o que trata de funções e equações modulares; outro é o estudo inicial de funções. Em geral, perde-se muito tempo com diversas definições, tais como contradomínio, função injetiva e sobrejetiva, que são dispensáveis neste momento (ÁVILA, 1991).

É preciso considerar ainda o conteúdo de Física a ser usado como uma das motivações para a introdução da noção de derivada. Em geral, a cinemática é dos primeiros assuntos abordados no primeiro ano, mas não é pré-requisito para os demais tópicos de Física. Dessa maneira, ela pode ser deslocada dentro do programa de Física para o segundo semestre letivo, bastando que haja uma colaboração entre os professores de Matemática e de Física.

Em resumo: sugere-se apresentar a derivada após função quadrática, utilizando o tempo ganho com a redução daquele utilizado no início de funções e de funções modulares, e em acordo com o professor de Física, para que a cinemática não seja ensinada antes da derivada.

Neste trabalho, foi usado o programa GeoGebra; este pode, no entanto, ser substituído por outro que execute as atividades propostas. Mesmo em atividades em que um *software* não seja indispensável, recomendamos o seu uso pelas seguintes razões: apresentação mais rápida e limpa; gráficos mais precisos; facilidade para mostrar exemplos não previstos nas atividades; possibilidade de produzir animações para tornar a apresentação mais dinâmica e interessante para os estudantes.

Vale ressaltar que, apesar de as atividades estarem baseadas no uso do GeoGebra, a ideia é que o quadro tradicional seja livremente usado pelo docente de forma concomitante ao uso da tecnologia, para que possam ser feitas as observações que o professor julgar pertinentes no momento. Uma aula nunca é igual a outra, e o debate pode tomar caminhos completamente diferentes, dependendo dos questionamentos feitos pelos alunos de cada turma.

Gostaríamos de frisar que não é a intenção desse trabalho promover treinamento na utilização de *softwares* do tipo que recomendamos. Para aqueles professores que não têm domínio do assunto, ou para aqueles que apenas desejam aprender mais, indicamos o sítio oficial do GeoGebra, onde é possível fazer o *download*[1] gratuito do programa, assim como ter acesso a diversas utilidades, como tutoriais básicos e avançados e materiais já programados.

Atividades

Recomendamos que se inicie com a apresentação de uma motivação para este estudo: um problema físico relevante deve ser mostrado para justificar a busca por respostas a certas perguntas, as quais surgem naturalmente. Demos a essa motivação o nome de Atividade Zero, pois não faz parte exatamente do conteúdo que desejamos expor. Em seguida, tópicos relacionados à derivada são apresentados em outras atividades.

Atividade Zero: a motivação

Consideremos um móvel que se desloca com velocidade constante. O gráfico que indica o deslocamento total em função do tempo é bastante simples, dado por uma reta. Porém, a dificuldade do problema cresce quando a velocidade deixa de ser constante. Imaginemos uma situação em que um automóvel parta do repouso com aceleração constante. O gráfico do deslocamento em função do tempo agora não é mais uma reta e sim uma parábola. Ainda somos capazes de determinar a velocidade média desse automóvel em qualquer intervalo de tempo. Como a velocidade variou durante o percurso, cabe então a seguinte pergunta: "Qual foi a velocidade do automóvel em um dado instante de tempo?".

Responderemos a essa pergunta com o estudo da derivada, que se relaciona com os conceitos de taxa de variação e de reta tangente ao gráfico de uma função. A derivada possui inúmeras aplicações, sendo que algumas são

[1] http://www.geogebra.org

bastante acessíveis aos alunos do Ensino Médio. Apresentaremos a seguir um conjunto de atividades para que os alunos da 1ª série do Ensino Médio possam apreender o conceito de derivada. A presente escolha de estruturar a proposta de forma que a divisão seja feita por atividades, e não por aulas, ocorreu para que o planejamento não fique engessado e torne-se mais fácil para o professor adaptá-lo às especificidades de suas turmas.

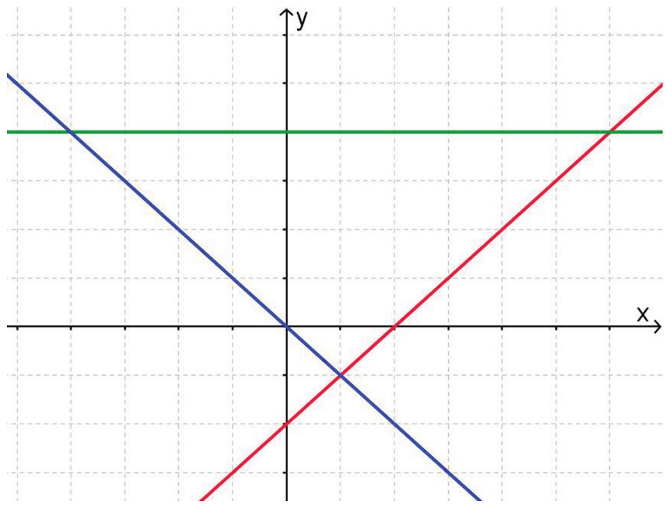
Atividade 1: noção de linearidade local

O objetivo aqui é introduzir a noção de linearidade local. Para essa atividade, o uso de um *software* como o GeoGebra é essencial, uma vez que não há como simular com precisão, no quadro, as aproximações e afastamentos que serão feitos nos gráficos.

Segundo Tall (1991, p.105), torna-se mais fácil apresentar a ideia intuitiva de derivada "[...] usando a noção de 'linearidade local' – que uma função derivável é precisamente uma que 'parece linear' quando uma pequena parte do gráfico é ampliada". Diversos gráficos serão mostrados com o objetivo de, após a revelação das escalas iniciais, construir o conceito de reta tangente a uma curva. A partir de uma breve introdução, pode-se exibir, através do GeoGebra, somente a curva vermelha da Figura 1. A ideia é apresentar o gráfico sem revelar as escalas usadas nem a lei da função, uma vez que é exatamente isso o que pretendemos explorar com os alunos.

A curva vermelha da Figura 1 é o gráfico da função quadrática definida pela expressão $y = 0{,}5x^2 + 0{,}999x - 0{,}001$, com a devida ampliação para que fique com esse aspecto. A lei e a natureza da função não devem ser reveladas aos estudantes antes do momento adequado.

Figura 1 – Gráficos de funções de 1º, 2º e 3º graus com ampliação.



Fonte: a pesquisa.

Em seguida, as seguintes perguntas podem ser feitas:

1) Esse gráfico representa algum tipo de função que já estudamos?

O objetivo dessa pergunta é instigar os alunos a associar o gráfico a uma função afim, estudada recentemente. Com uma aproximação muito grande, o gráfico de fato se parece com uma linha reta, e essa provavelmente será a resposta mais frequente. Inclusive, é uma prática comum, e totalmente aceitável, desenharmos gráficos de funções afins à mão livre no quadro e desejarmos que os alunos o identifiquem como tal. A presença das linhas de grade no gráfico se justifica justamente para reforçar a falsa percepção de que se trata de uma reta.

2) Qual é a lei da função aqui representada?

As respostas a essa pergunta são certamente muito mais imprevisíveis do que as da pergunta anterior. Primeiramente, é algo impossível de ser respondido com as informações dadas. Em segundo lugar, mesmo que se soubessem informações sobre alguns dos pontos do gráfico e que se tratasse mesmo de uma função afim, esse problema envolveria uma parte computacional, e as respostas dificilmente seriam imediatas. Alguns alunos podem associar as linhas de grade com unidades, mas a intenção é que outros sejam capazes de perceber que não é possível responder a essa pergunta sem que se saiba em que escala se está trabalhando.

Continuamos a mostrar gráficos para reforçar a ideia de linearidade local. Apresentamos então a curva verde da Figura 1, que representa a função definida pela lei $y = x^3 + 0{,}002$. As mesmas perguntas feitas anteriormente podem ser repetidas nesse segundo caso, em que o gráfico se assemelha ao de uma função constante.

É interessante incluir ainda o gráfico de uma "verdadeira" função afim e repetir as perguntas antes de retirar a aproximação. Por exemplo, a função definida pela lei $y = -x$ presta-se bem à situação (curva azul da Figura 1).

Feita essa introdução, os três gráficos podem ser mostrados juntos, ainda com grande aproximação (Figura 1). Entretanto, as escalas dos eixos devem ser reveladas.

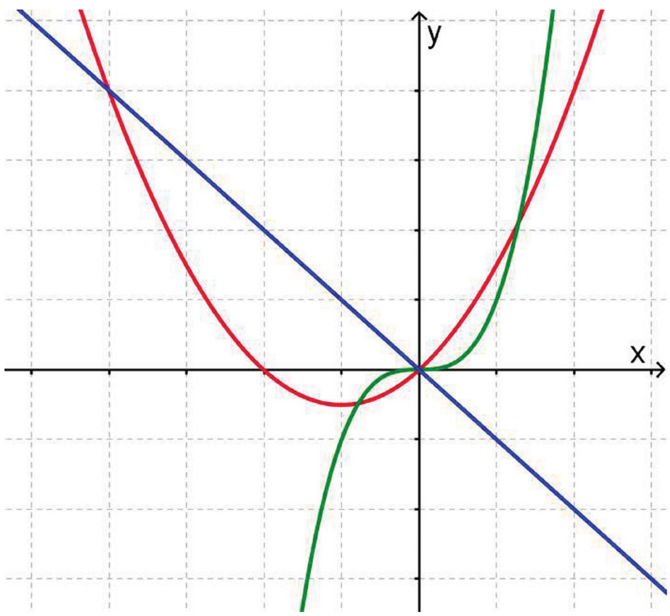
Nesse ponto, pode-se perguntar aos alunos se as leis das funções podem ser encontradas. Depois de conduzida uma discussão a respeito, as leis das funções cujos gráficos foram mostrados podem ser reveladas: $y = 0{,}5x^2 + 0{,}999x - 0{,}001$, $y = x^3 + 0{,}002$ e $y = -x$.

Deve-se chamar a atenção para o fato de a graduação dos eixos estar de 0,001 em 0,001. Não é conveniente retirar a aproximação ainda, mesmo que seja solicitado, pois não se poderia tirar proveito do próximo passo.

Nesse momento, mostra-se a Figura 2. São os gráficos das mesmas funções mostrados na Figura 1, porém não estão mais tão aproximados. Essa tela deve ser mostrada também já a partir dessa visão, sem tanto *zoom*. Vale ressaltar que no gráfico da Figura 2 a graduação dos eixos é de uma unidade.

Seria interessante, em seguida, colocar os três gráficos, com muita e com pouca aproximação, em janelas posicionadas lado a lado, a fim de os estudantes compará-los.

Figura 2 – Gráficos de funções de 1º, 2º e 3º graus sem ampliação.



Fonte: a pesquisa.

Neste ponto, cremos já haver condições de algum aluno afirmar que se trata dos mesmos gráficos, apenas com diferença nas aproximações. Caso os alunos não tenham ainda percebido isso, podemos revelar essa informação e manipular a aproximação do GeoGebra no gráfico da Figura 1 até que ele fique com um aspecto parecido com o da Figura 2.

A ideia é, após essa atividade com os gráficos, podermos passar aos alunos que muitas funções têm gráficos com essa característica: segundo Tall (1991, p.113), "se uma parte suficientemente pequena de um gráfico for fortemente aumentada, a maioria dos gráficos familiares parecem (localmente) lineares".

Atividade 2: conceito de reta tangente

O objetivo dessa atividade é introduzir o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto. Utilizaremos um computador, com o *software* instalado, conectado a um projetor.

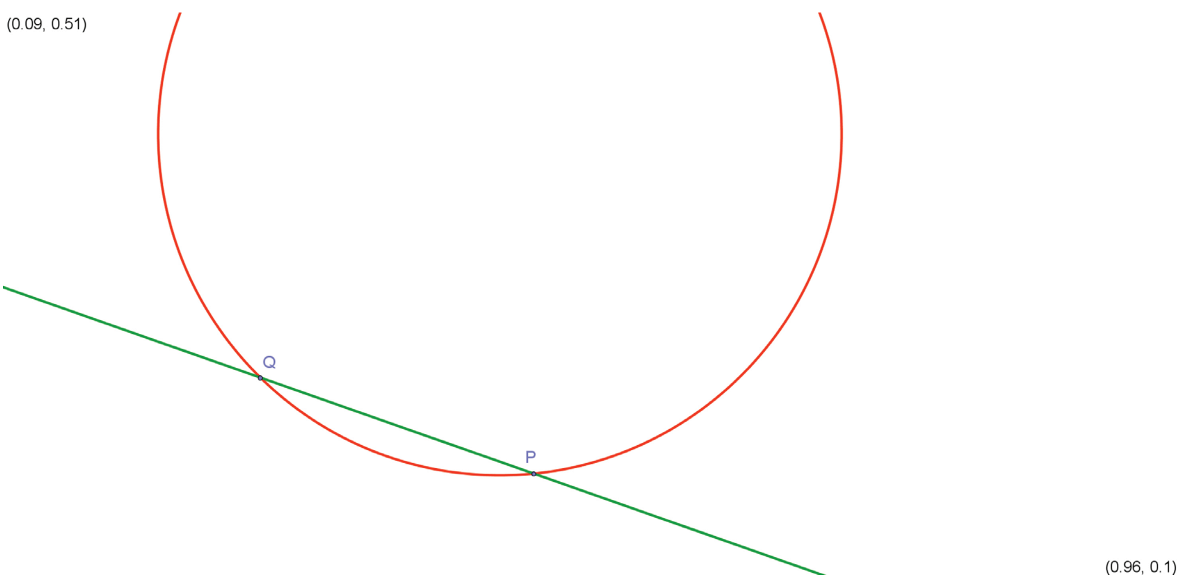
Podemos iniciar a atividade lembrando aos alunos a definição de reta tangente a uma circunferência. Porém, deve ser ressaltado que essa definição não se presta, em geral, para gráficos de funções. Nesse ponto, alguns exemplos poderiam ser dados para ilustrar.

Nossa ideia é mostrar que o conceito de reta tangente a um gráfico de função em um ponto está intimamente associado a uma vizinhança desse ponto; tal conceito é estritamente local.

O próximo passo é lembrar algo que foi visto na Atividade 1: muitos gráficos, quando devidamente aproximados, aparentam ser uma linha reta. Com isso, seremos capazes de fazer uma consideração sobre retas tangentes a um gráfico em um ponto: elas são, efetivamente, retas que tocam a curva apenas no ponto em questão (desde que o gráfico não seja uma linha reta numa vizinhança desse ponto), mas devemos considerar apenas uma vizinhança bastante pequena desse ponto (na verdade, tão pequena quanto seja necessário). Entretanto, isso não encerra a questão e não pode ser considerado como definição para reta tangente. Basta lembrar o caso da função modular.

Passemos agora à tarefa de definir o que é a reta tangente a um gráfico em um dado ponto P. Para uma melhor análise, devemos primeiramente observar um gráfico e uma reta secante a ele, passando por P e por outro ponto Q (Figura 3).

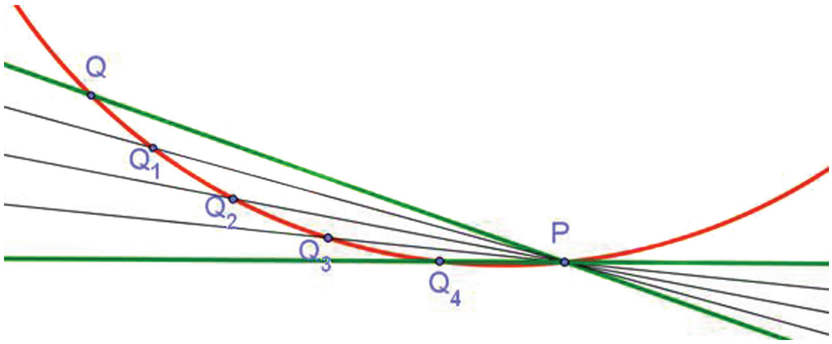
Figura 3 – Reta secante ao gráfico.



Fonte: a pesquisa.

Imaginemos, agora, tomarmos pontos cada vez mais próximos do ponto P (é possível fazer os estudantes imaginarem o ponto Q “movendo-se” para as proximidades do ponto P). Teremos sequencialmente algo como a Figura 4.

Figura 4 – Sequência de pontos.



Fonte: a pesquisa.

Podemos tomar pontos tão próximos do ponto P quanto desejarmos. De fato, queremos aproximar muito esses pontos de P, de forma que a reta pretendida será aquela que surge no limite quando essa sequência de pontos (Q_n) tende ao ponto P. Porém, há ainda duas condições a serem satisfeitas para que essa reta seja realmente a tangente procurada:

a) tal reta deve coincidir com aquela obtida por processo idêntico feito pelo outro lado do ponto P, com uma sequência de pontos se aproximando indefinidamente de P;
b) o ponto P deve efetivamente fazer parte do gráfico da função em questão.

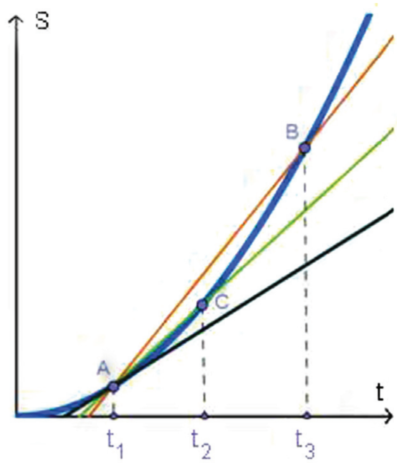
Buscando enriquecer essa experiência, é bastante interessante mostrar o processo acontecendo de forma animada, utilizando o GeoGebra: os professores com mais experiência no uso do *software* podem mover o ponto Q para mostrar o efeito desejado.

Atividade 3: a derivada

O objetivo dessa atividade é finalmente chegar à noção de derivada. O uso da tecnologia nessa parte pode auxiliar, mas não é essencial. Os gráficos, por exemplo, podem ser feitos à mão, caso seja necessário.

Na Atividade 2, chegamos ao conceito de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto. Isso nos conecta ao problema inicialmente proposto como motivação para esse estudo: o cálculo da velocidade instantânea. Como foi visto, a velocidade média pode ser calculada em qualquer intervalo de tempo com facilidade, uma vez que ela nada mais é do que a taxa de variação média da função no intervalo considerado. Pode-se observar que, para tal cálculo, é necessário traçar uma reta secante ao gráfico da função.

Figura 5 – A secante AB leva à velocidade média de t_1 a t_3. A secante AC leva à velocidade média de t_1 a t_2. A reta tangente à curva em A leva à velocidade exata no instante t_1.



Fonte: a pesquisa.

Nesse momento, uma pergunta pode ser feita aos alunos: que procedimento devemos seguir para calcular a velocidade em determinado instante? O gráfico da Figura 5 pode ser mostrado aos estudantes.

Seria interessante tentar induzi-los a chegar a conclusões cada vez mais próximas da resposta para o problema: a velocidade instantânea será obtida levando-se ao limite o processo desenvolvido para se obter a reta tangente ao gráfico dado. Ou seja, como a velocidade média é dada por $\Delta S / \Delta t$, a velocidade instantânea é o limite da taxa de variação $\Delta S / \Delta t$, quando Δt tende a zero. Note que essa taxa de variação instantânea será exatamente a inclinação da reta tangente no ponto em questão.

Respondida essa pergunta, podemos passar aos estudantes a definição de derivada. A derivada de uma função em um ponto P de seu gráfico é exatamente a inclinação da reta tangente ao gráfico, se ela existir, nesse ponto P.

Esse trabalho se atém a derivadas de funções polinomiais, por terem cálculo fácil e por serem importantes para algumas aplicações pertinentes ao Ensino Médio.

Dados alguns exemplos de cálculo de derivadas em determinados pontos, é a hora de exercitar, junto com os estudantes, esse cálculo.

Nesse ponto, pode ser abordada a ideia de função derivada, o que vai gerar algumas regras para facilitar os cálculos. Algumas demonstrações fáceis e rápidas podem ser apresentadas. É importante que os alunos tenham contato com algumas contas mais formais, ainda que simples, além de toda a parte intuitiva envolvida neste trabalho. Sugerimos as seguintes:

- Proposição 1: a derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$.
- Proposição 2: a derivada de $f(x) = k$, $k \in IR$, é $f'(x) = 0$.
- Proposição 3: a derivada de $f(x) = ax$ é $f'(x) = a$.
- Proposição 4: a derivada de $g(x) = k \cdot f(x)$, $k \in IR$, é $g'(x) = k \cdot f'(x)$.

Duas últimas regras, importantíssimas, podem convenientemente ter suas demonstrações omitidas dos alunos:

- Proposição 5: a derivada de $f(x) = x^n$ é $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- Proposição 6: a derivada de $h(x) = f(x) + g(x)$ é $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Resposta à pergunta da Atividade Zero

Nesse ponto, com as ferramentas obtidas a partir das atividades anteriores, acreditamos que o professor tenha condições de usar os conceitos de derivada e de reta tangente para retornar à questão colocada na atividade motivadora e auxiliar seus alunos na obtenção da resposta.

A seguir, apresentamos um quadro resumindo as atividades apresentadas neste trabalho.

Quadro 2 – Resumo das atividades.

Atividade	Título	Objetivo
Zero	Uma motivação	Apresentação de um problema que forneça uma motivação para o início do estudo das derivadas.
1	Noção de linearidade local	Mostrar que certos gráficos aparentam ter a forma de uma linha reta, quando suficientemente ampliados.
2	Conceito de reta tangente	Introduzir o conceito de reta tangente a uma curva.
3	A derivada	Introduzir o conceito de derivada de forma intuitiva, sem apresentação formal de limites, utilizando a ideia de reta tangente desenvolvida na atividade anterior.

Fonte: a pesquisa.

Considerações finais

A noção de derivada permite que vários conteúdos de Física e de Matemática fiquem mais claros, ou muito mais interessantes e enriquecidos. Os conhecimentos necessários para o uso da derivada não são realmente difíceis, sendo, portanto, acessíveis a todos com um mínimo de base matemática.

O foco deste trabalho foi sugerir uma inclusão do Cálculo na Matemática do Ensino Médio de forma bastante introdutória e intuitiva. Procurou-se apresentar somente alguns aspectos importantes para a melhor compreensão de determinados assuntos e utilizar o bom senso na hora de escolher o que é realmente aplicável de forma simples. Consideramos que a maior parte do Cálculo é formada por conhecimentos avançados demais para o Ensino Médio e, mesmo nos casos em que o conteúdo não seja difícil, terá pouca aplicabilidade para o estudante.

Pensando no Ensino Médio como um todo, e não nos atendo apenas à 1ª série, nossa visão é a de que alguns tópicos poderiam ter seus tempos de exposição reduzidos, como o estudo de funções trigonométricas inversas, determinantes ou números complexos. Por exemplo, em uma pesquisa feita nos livros didáticos analisados, encontramos somente dois exercícios contextualizados sobre números complexos. É claro que o tópico tem suas aplicações, mas o fato de praticamente não haver problemas com contexto deixa bastante evidente o seguinte: as aplicações de tal tema não são geralmente acessíveis ao Ensino Médio.

Vimos que a inclusão do Cálculo já foi uma realidade no Brasil. Na última vez em que foi excluído, por ocasião do movimento da Matemática Moderna, houve excesso de formalização da Matemática, o que deixou muitos tópicos com extensão e aprofundamento exagerados. Essa experiência deixou uma lição importante: seria inviável ensinar Cálculo nessas condições em um nível adequado à escola básica.

Apesar de o Cálculo não pertencer aos programas oficiais, já é algo animador que parte dos livros didáticos dediquem espaço a ele. Muito embora consideremos a abordagem equivocada em relação ao momento, a apresentação do conteúdo agrada na maioria dos casos recentes analisados: apenas derivadas, um pouco de limites e nada de integrais. A nosso ver, um ganho importante poderia ser conseguido com a troca da 3ª série pela 1ª série como hora da apresentação dos conceitos.

As aulas de derivada, organizadas em atividades, foram expostas da forma mais intuitiva possível. Foi feito um esforço para que tudo ficasse bastante simples e de fácil assimilação. Não é a intenção sujeitar os alunos a um estudo pesado e detalhado. Isso eles farão na universidade, caso se decidam por um caminho que cruze o do Cálculo.

Escolhemos trabalhar as aulas com a ajuda da tecnologia, ainda que tenhamos sido cuidadosos para não fazer dela uma condição *sine qua non* do processo de ensino. As atividades podem, e devem, ser modificadas de acordo com a necessidade do docente, conforme as especificidades de cada turma ou mesmo por gosto pessoal.

Nesse trabalho, nos propusemos a trilhar um caminho que não é perfeito, obviamente, mas que procura dar uma dose de contribuição para o ensino da Matemática e da Física. Entendemos a complexidade envolvida na busca de um ensino de melhor qualidade, principalmente devido às enormes desigualdades que possuímos em nosso país. No entanto, acreditamos que é possível criarmos mecanismos que estejam ao alcance da maioria dos docentes e que possibilitem uma melhora significativa no processo ensino/aprendizagem.

Referências

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2º Grau. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

______. Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n.60, p.30-38, 2006.

BARRETO FILHO, B.; DA SILVA, C. X. *Matemática aula por aula:* 3ª série. São Paulo: FTD, 2003.

BRASIL. Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=65346>. Acesso em: 15 fev. 2014.

______. Decreto nº 3.890, de 1 de janeiro de 1901. Approva o Codigo dos Institutos Officiaes de Ensino Superior e Secundario, dependentes do Ministerio da Justiça e Negocios Interiores. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=60451>. Acesso em 15 fev. 2014.

______. Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931. Dispõe sobre a organização do ensino secundário. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=40440>. Acesso em: 15 fev. 2014.

______. Decreto nº 21.241, de 4 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=32229>. Acesso em: 15 fev. 2014.

______. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>. Acesso em: 16 fev. 2014.

______. Lei nº 12.796, art. 26, de 4 de abril de 2013. Altera a Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2013/lei/l12796.htm>. Acesso em: 25 nov. 2015.

DANTE, L. R. *Matemática:* contexto e aplicações: volume 3. São Paulo: Ática, 2010.

GENTIL, N. et al. *Matemática para o 2º grau*: volume 3. 5.ed. São Paulo: Ática, 1996.

IEZZI, G. et al. *Matemática:* 3ª série, 2º grau. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1976.

______. *Matemática:* 3ª série, 2º grau. 9.ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

______. *Matemática:* ciência e aplicações, 3: ensino médio. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

HOHENWARTER, Markus. GeoGebra. Software de código aberto versão 4.0. Linz, Austria: International GeoGebra Institute, 2015. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 26 nov. 2015.

PAIVA, M. *Moderna Plus:* Matemática: Volume 3, 3.ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática:* ensino médio: volume 3. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. *Revista Horizontes*. Bragança Paulista, v.22, n.1, p.7-15, jan./jun. 2004.

TALL, D. *Intuition and rigour*: the role of visualization in the calculus. *Visualization in Mathematics*, M.A.A., Notes No. 19, p.105-119, 1991. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 12 maio 2014.

VALENTE, W. R. Euclides Roxo e a história da educação matemática no Brasil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.1, p.89-94, mar. 2005.

Augusto César de Castro Barbosa – Professor associado, Instituto de Matemática e Estatística – UERJ.

Cláudia Ferreira Reis Concordido – Professora associada, Instituto de Matemática e Estatística – UERJ.

Leandro Machado Godinho – Professor adjunto do Colégio Pedro II.