O TEOREMA DE THALES AO LONGO DA HISTÓRIA: PERCEPÇÕES ENCONTRADAS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS DO SÉCULO XX

The Triangle Proportionality Theorem throughout History: Perceptions found in some textbooks of the Twentieth Century

Ana Carolina Costa Pereira

Resumo

A pesquisa visou investigar os livros didáticos de Matemática editados entre a última metade do século XIX e o século XX, no que diz respeito ao conteúdo dos corpos numéricos, focalizando a extensão do corpo dos números racionais para os reais. Nesse estudo, procurou-se observar como a geometria foi explorada nos livros didáticos para o tratamento dessa questão. Mais precisamente, tomando como base o teorema de Thales, que relaciona o tratamento geométrico e algébrico por meio de medidas, buscaram-se evidências no que diz respeito à questão da comensurabilidade. Para isso, selecionaram-se sete livros didáticos de Matemática editados no período em questão e analisou-se cada coleção, observando o tratamento geométrico que foi dado aos números reais, em particular, no teorema de Thales. Nessa análise, percebeu-se que a maioria dos livros didáticos selecionados na pesquisa apresentou o teorema de Thales remetendo a demonstração para o caso em que os segmentos eram comensuráveis. Porém, os dois primeiros livros analisados fizeram uma discussão na demonstração, tanto para o caso em que os segmentos eram comensuráveis quanto incomensuráveis. Foi possível perceber que, nesse período, o assunto foi perdendo a precisão nos manuais escolares analisados. Considera-se plausível que a ideia subjacente ao teorema de Thales – ligada às condições de proporcionalidade de segmentos isto é, medição de segmentos –, pode ser uma forma de introduzir os números reais positivos. Desse modo, enfatizar o tratamento de comensurabilidade de segmentos ao desenvolver a demonstração do teorema de Thales possibilita estabelecer uma relação com a construção dos números reais, acarretando uma possível proposta de tratamento para os números reais via medição.

Palavras-chave: Teorema de Thales. História da Educação Matemática. Números Reais. Ensino da Matemática.

Abstract

The research aimed to investigate the mathematics textbooks published from the last half of the nineteenth century and the twentieth century, with regard to the content of the numerical bodies, focusing on the body of the extension from the rational numbers to the real ones. In this study, we tried to see how the geometry was explored in textbooks for the treatment of this issue. More precisely, based on Triangle Proportionality Theorem, which relates the geometric and algebraic treatment through measures, we sought evidence with regard to the question of commensurability. For this, we selected seven math textbooks published during the period in question and analyzed each collection, noting the geometric treatment that was given to the real numbers, in particular, Triangle Proportionality Theorem. In this analysis, it was noticed that most textbooks selected in the research presented the Triangle Proportionality Theorem referring demonstration for the case that the segments were commensurate. However, the first two books analyzed made a discussion on the demonstration, for both the cases in which the segments were measurable and immeasurable. It was possible to observe that, in this period, the topic was losing accuracy in the analyzed textbooks. It is considered plausible that the idea behind the Triangle Proportionality Theorem – linked to the proportionality conditions of segments i.e., measuring segments – can be a way to introduce positive real numbers. Therefore, emphasizing the treatment of commensurability of segments to develop the demonstration of Triangle Proportionality Theorem enables to relate to the construction of the real numbers, leading to a possible proposal for treatment for real numbers via measurement.

Keywords: Triangle Proportionality Theorem. History of Mathematics Education. Real Numbers. Mathematics Teaching.

Introdução

Vários pesquisadores, entre eles Moreira e David (2004), Cobianchi (2001), Soares et al. (1999), têm trabalhado com a concepção de alunos e professores sobre o conceito de números reais, mostrando que esse tema é de fundamental importância para o desenvolvimento do pensamento numérico construído por eles.

No que se refere à racionalidade dos números reais, encontram-se diversas pesquisas envolvendo esse tema, porém um grande número delas exalta a importância e, ao mesmo tempo, a dificuldade no trabalho com os números irracionais, principalmente no que se refere ao enfoque geométrico.

Isso se comprova quando estudos relatam que alunos e professores têm uma visível dificuldade de entender e diferenciar os números racionais e irracionais (COBIANCHI, 2001). Podemos verificar sua importância nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998, p.16), em que há uma grande preocupação em reverter o estudo dos números irracionais, que se tem limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais.

Ainda hoje, em geral, o ensino dos números irracionais se resume a um conjunto de técnicas de resolução. Miguel (1994, p.55) afirma que:

> Tradicionalmente as passagens dos livros didáticos para a escola secundária referente a eles (os irracionais) reduzem-se invariavelmente a um amontoado de regras de operar com radicais que acabam por constituir-se, aos olhos dos estudantes, em conhecimentos pouco úteis, pouco desafiadores e desligados dos demais temas presentes nos programas de Matemática [...] contrastando com a elevada dosagem de imaginação, sutileza e ousadia que impregnaram sua produção histórica.

Os números irracionais percorrem na História da Matemática um longo caminho, iniciando na escola pitagórica, com o problema da incomensurabilidade, e estudado na teoria das proporções de Eudoxo (408a.C.-355a.C.), em que se utilizam apenas argumentos geométricos. Somente no século XIX, como parte do Movimento da Aritmetização da Análise, foi que matemáticos como os alemães Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918) formalizaram o conceito de número real. Talvez essa dificuldade de solucionar o problema tenha influenciado o atual ensino desse conceito.

Fischbein et al. (1995) ressalta que os números irracionais enfrentam dois principais obstáculos: a dificuldade de aceitar que duas grandezas podem ser incomensuráveis e que os números racionais não cobrem todos os pontos de um intervalo.

Dentro dos diversos motivos mencionados acima, acredita-se que o conceito de número irracional é intuitivamente difícil e um assunto ainda muito confuso para estudantes, principalmente se a relação entre os números irracionais e a incomensurabilidade for excluída do ensino. Daí a importância em se trabalhar com esse tema.

Consideramos que trabalhar com os números reais num enfoque geométrico pode promover um maior entendimento do conceito, no sentido de se trabalhar com entes, que, na visão do aluno, têm significado.

A ideia de medição de segmentos como forma de se introduzir números reais positivos, encontrada no trabalho de Baroni e Nascimento (2005), o qual propõe um tratamento para os números reais via medição, é considerada por nós como uma proposta concreta visando à melhoria do ensino dos números reais. Nesse estudo, os autores apresentam

> [...] a construção do modelo, de R+, baseado na medição de segmentos. Essa construção está antecedida pela elaboração da noção de proporcionalidade, no sentido de comensurabilidade, estando assim em concordância com o desenvolvimento histórico do tema. Conforme salienta Lebesgue, o processo de medição permite introduzir tanto os números que são ditos racionais quanto aqueles que serão ditos irracionais [...]. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.2)

Assim, em busca de conteúdos que oferecessem a oportunidade de explorar o aspecto geométrico dos números reais em nível do Ensino Fundamental, escolhemos um teorema-chave da Geometria Elementar: o teorema de Thales. Esse teorema pode ser usado para demonstrar o teorema fundamental na semelhança e, consequentemente, aparecendo na trigonometria, justifica as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo, na geometria espacial no tratamento das secções de um sólido por um plano paralelo à base, etc.

Pesquisas envolvendo o teorema de Thales numa abordagem algébrica/geométrica ainda são poucas. Haruna (2000), por exemplo, desenvolveu uma pesquisa sobre uma abordagem do processo de ensino e aprendizagem do teorema de Thales, analisando como se processa a apreensão do conceito por alunos da 8ª série do ensino fundamental,[1] levantando os obstáculos didáticos e epistemológicos, com o uso do computador.

A abordagem que se propõe com essa pesquisa, ao estudar o teorema de Thales, é importante para uma retomada ao conceito de números com uma conotação geométrica, promovendo um retorno às origens gregas.

Muitos dos textos de livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio aplicam esse conceito geometricamente, mas o apresentam com demonstrações incompletas quando estas envolvem números irracionais. Niven (1984), no seu livro *Números: Racionais e Irracionais*, retoma essa discussão referindo-se ao teorema de Thales:

> Muitos textos didáticos de Geometria, do 1º e 2º graus, apresentam demonstrações incompletas, quando estas envolvem números irracionais. A falha ocorre quando o resultado é demonstrado apenas para o caso racional, deixando o caso irracional inacabado. Isso acontece frequentemente com o seguinte resultado: Se três paralelas são cortadas por duas transversais [...]. (NIVEN, 1984, p.72)

Dessa forma, o livro didático representa o modo de conceber e praticar os ensinamentos propostos em um dado período. Ele também pode expressar teorias pedagógicas, implícitas, concebidas por cada autor, constituindo assim, não só um fenômeno pedagógico, mas também cultural, político, administrativo, técnico e econômico. Além de ser um objeto complexo dotado de múltiplas funções, a maioria, aliás, totalmente despercebida aos olhos dos contemporâneos (CHOPPIN, 2002).

Portanto, acredita-se que, ao tratar da evolução histórica da abordagem de alguns conceitos matemáticos, tomando como base o livro didático de Matemática, promove-se a análise de um dos recursos materiais mais utilizados pelos professores no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, tal análise histórica pode revelar mudanças significativas, ao longo das décadas, no que diz respeito à abordagem desses conteúdos.

[1] Atualmente, é considerado o 9º ano do Ensino Fundamental.

Por tudo isso, objetiva-se, com este artigo, realizar uma análise da evolução do teorema de Thales, observando os aspectos em que o conceito de comensurabilidade e incomensurabilidade estão inseridos na sua demonstração. Para isso, selecionaram-se alguns livros didáticos de Matemática editados entre a última metade do século XIX e o século XX. Não analisaremos os conceitos de número racional ou irracional contidos nos livros, mas a sua forma geométrica.

Escolha do período e dos documentos

O estudo proposto foi feito com livros didáticos de matemáticos editados entre a última metade do século XIX e o século XX. Acreditamos que o período escolhido para a seleção dos livros didáticos de Matemática é bastante significativo dentro da proposta inicial do nosso estudo, à medida que estamos tratando da "evolução" histórica da abordagem do conceito, que neste estudo é o teorema de Thales.

Assim, dentro do estudo de reconstituição da Matemática Escolar brasileira, consideramos o estudo histórico dos conteúdos como um meio de observar algumas mudanças na abordagem do conhecimento produzido, modificado ou não, pelas reformas e tendências na Educação Escolar.

Desse modo, a escolha do material, mais precisamente do livro didático, para a pesquisa não foi tarefa fácil, uma vez que existem inúmeros livros-texto de Matemática que são colocados à disposição do público consumidor pelas editoras, obrigado-nos a limitar a amostra para o estudo. Isso acontece quando trabalhamos com pesquisa historiográfica em que o manual escolar é a ferramenta principal de nosso estudo. Choppin (2002) considera que são mais frequentes pesquisas que trabalhem com os manuais "mais utilizados" em uma época. Para isso, relaciona quatro critérios relativos à quantidade na sua tiragem:

> É a associação de quatro critérios que podem, então lhe dar uma indicação sobre a difusão de um livro escolar: a duração da vida editorial (diferença entre as datas da última e da primeira edição), o número de edições declaradas (mas a estratégia dos diferentes editores não é idêntica e a realidade das edições anteriores não é sempre assegurada); o número das edições indicadas pelas bibliografias; e por fim, o número de exemplares conservados. (CHOPPIN, 2002, p.20)

Desse modo, levando em consideração os critérios propostos por Choppin (2002), condensamos nossa pesquisa em dois deles.

O primeiro critério que se levou em consideração foi o fato de que todos os livros didáticos pertencessem ao período proposto para a análise e estivessem direcionados ao Ensino Fundamental, uma vez que atualmente é nesse nível que encontramos o conteúdo trabalhado.

O segundo critério considerado foi o número de edições dos livros didáticos de Matemática e a duração de sua vida editorial. Consideramos que uma obra que teve muitas edições ou reimpressões revela sua importância em um dado período, assim como a popularidade da obra e do autor responsável pelo sucesso.

Definidos os critérios de seleção, restava-nos determinar os livros com os quais iríamos trabalhar (Quadro 1). De acordo com os critérios citados anteriormente, selecionamos os livros didáticos que constam da tabela que segue:

Quadro 1 – Relação de livros didáticos selecionados pelo autor por editora.

Cód.	Título da obra	Autor	Editora	Edição[2]	Ano[3]
L1	*Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea*	C. B. Ottoni	Francisco Alves	10ª edição	1904
L2	*Elementos de Geometria*	FIC[4]	F. Briguiet & Cia	Sem edição	s/d
L3	*Curso de Mathematica*	Euclides Roxo, Cecil Thiré e Júlio Cesar de Mello e Souza	Francisco Alves	13ª, 9ª, 6ª, 6ª edições	1940-1942
L4	*Matemática – Curso Moderno*	Osvaldo Sangiorgi	Companhia Editora Nacional	15ª, 3ª, 5ª, 4ª edições	1960-1963
L5	*Matemática – Curso Ginasial*	Ari Quintella	Companhia Editora Nacional	70ª, 56ª, 57ª, 59ª edições	1968-1970
L6	*A conquista da Matemática*	Giovane e Castrucci	FTD	Sem edição	1985
L7	*Matemática*	Imenes e Lellis	Scipione	1ª edição	1999

Fonte: elaborado pela autora.

Na tabela, os códigos L1, L2, L3, L4, L5, L6 e L7 referem-se à maneira como os livros serão tratados.

Descrição do percurso

Num primeiro momento, selecionaram-se os livros didáticos de Matemática que foram utilizados no estudo, segundo critérios mencionados anteriormente. Esses livros foram encontrados em bibliotecas, acervo do Grupo de Pesquisa em História da Matemática de Rio Claro/SP e acervos pessoais. Com os livros em mãos, fizemos um estudo detalhado das obras, olhando para os seguintes aspectos: importância da obra para sua época e a importância do autor e sua biografia.

Na segunda parte, foi feito um estudo longitudinal para melhor contato com a obra. Focalizou-se esse estudo na ficha catalográfica, estrutura, a forma apresentada dos conteúdos, exercícios, e situamos o conteúdo analisado. Com essa primeira leitura, inicia-se a análise do conteúdo, teorema de Thales, utilizando os seguintes critérios:

- Identificar os conceitos utilizados na demonstração, remetendo a esses conceitos quando necessário;
- Observar a demonstração do teorema para o caso particular e o caso geral;
- Observar o uso do conceito de comensurabilidade de grandezas na demonstração, caso seja exposto;
- Exemplos de aplicação do resultado do teorema;
- Exercícios e atividades propostas.

Na terceira etapa, foi realizada uma síntese de cada análise do livro didático, para converter esses resultados brutos em dados significativos no contexto da pesquisa.

E, no quarto momento, foi feita a interpretação dessas sínteses para tentar responder à pergunta da pesquisa.

Análise dos livros didáticos de Matemática

A obra *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea* (L1) teve a primeira edição em 1853. Ela possui uma estruturação clássica, ou seja, apresentação da teoria, seguida de exemplos numéricos. Não há exemplos propostos para o aluno. Esse fato só mudou com a chegada da produção escolar de livros didáticos, ocorrida no final do século XIX.

O conteúdo analisado na obra L1 encontra-se no parágrafo, "Das linhas proporcionais", situado no livro segundo, "Da extensão em um plano", páginas 117 a 125. Nessa seção, o autor expõe três teoremas que servem de base para a seção seguinte, "Das figuras semelhantes".

Ao analisar L1, não encontramos, explicitamente, o título "teorema de Thales"; porém,

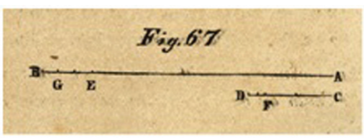
[2] Edição das obras que foram utilizadas para a análise da pesquisa. As obras que contêm mais de uma edição estão relacionadas com livros seriados: 1º, 2º, 3º, 4º ano ou série.

[3] Ano das obras que foram utilizadas para a análise da pesquisa.

[4] A sigla F.I.C. que significa *Frères de l'Instruction Chrétienne*, refere-se a uma Congregação Cristã espalhada por toda a França, originária da Congregação dos Frères Ploërmel, que organizou grandes obras didáticas nas várias áreas do conhecimento.

identificamos o segundo teorema como o correspondente ao teorema hoje apresentado na maioria dos livros didáticos: “Se um feixe de paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes, que estão sobre a reta, são diretamente proporcionais”.

A seção 89 aborda o conceito de segmentos comensuráveis, utilizando-os na demonstração do segundo teorema. Vejamos como está trabalhado, no livro:

> **89.** *Determinar a medida commum de duas linhas rectas, e a relação numérica entre ellas.*
>
> **1º.** Para achar a medida commum:
>
> Applique-se (por meio de um compasso) o *comprimento da menor recta sobre a do maior quantas vezes nella se contiver.*
>
> Se não ficar novo resto, a menor linha é a medida commum. Se o houver:
>
> *Applique-se o comprimento do resto sobre o da linha menor quantas vezes for possível.*
>
> Se não ficar novo resto, será o primeiro a medida comum; no caso contrário:
>
> *Applique-se o 2º resto sobre o 1º, o 3º sobre o 2º e assim se continue até chegar a um resto que se contenha no procedente, número exacto de vezes.* O último resto é a medida commum.
>
> **2º.** Querendo também achar a relação numérica das linhas dadas será preciso, ao passo que se emprega o processo graphico precedente, representar os resultados numericamente; esta segunda parte da resolução do problema servirá também de demonstração à primeira.
>
> Para fixar as ideias, sejam, as rectas AB, CD
>
> 
>
>
> E supponha-se que a menor CD coube 3 vezes na maior AB com o resto EB; então AB = 3CD + DF
>
> Cabendo o resto EB duas vezes em CD com o resto DF, CD = 2EB + BG
>
> O 2º resto DF applicado sobre o 1º EB cabe 2 vezes e resta BG; logo, EB = 2DF + BG.
>
> Finalmente, cabendo BG 3 vezes exactas em DF, DF = 3BG.
>
> Este último valor substituído nos precedentes produz
>
> $EB = 2 \times 3BG + BG = 7BG$
>
> $CD = 2 \times 7BG + 3BG = 17BG$
>
> $AB = 3 \times 17BG + 7BG = 58BG$
>
> Logo o ultimo resto BG cabe em AB 58 vezes, em CD 17 vezes exactamente; logo BG é medida commum das duas linhas. A relação numérica é
>
> $$\frac{AB}{CD} = \frac{58GB}{17GB} = \frac{58}{17}$$
>
> A perfeita analogia entre este processo e o do *maior divisor commum* em Arithmetica prova que o resultado achado é a *maior medida commum* as duas linhas.
>
> **90.** *Determinar a medida commum a dous arcos do mesmo circulo ou de círculos iguaes e a sua relação numérica.*
>
> Será o processo exactamente o mesmo do número antecedente, uma vez que se possa applicar a grandeza de um arco sobre a de outro. Ora, isto se consegue tomando com o compasso o comprimento da corda, porque cordas iguaes determinam iguaes arcos (n.868). É portanto escusado repetir a operação que não differe da precedente. (OTTONI, 1904, p.86 a 88)

Assim, no L1 se percebe que o assunto, embora não se intitule teorema de Thales, é demonstrado tanto para o caso comensurável quanto para o caso incomensurável. A concepção de grandezas geométricas é trabalhada na forma de comparação de dois segmentos para o caso comensurável. Para o caso de segmentos incomensuráveis, o autor trabalha com as aproximações sucessivas de uma série de “números comensuráveis[5]” em que cada um é mais próximo do que o antecedente do valor que se procura determinar. Nota-se que, apesar da falta de exercícios, características dos livros didáticos desse período, o autor tem a preocupação de trabalhar com problemas resolvidos,

[5] Nesse livro, o autor refere-se a números comensuráveis à relação numérica entre duas grandezas comensuráveis.

atividades que englobam construção. Contudo, esses exercícios envolvem somente o caso em que os segmentos são comensuráveis.

Os livros da *F.I.C.* (L2) surgiram no final do século XIX, traduzidos e adaptados por Eugênio de Barro Raja Gabaglia (1862-1919). Os didáticos da *F.I.C.* são também adotados para os cursos do antigo primário, ginasial e colegial (Clássico e Científico). Esses livros já eram escritos visando ao uso pelos alunos, incluíam exercícios gradativos, exercícios com resposta final, sem resposta, resumos etc. (VALENTE, 2000). O livro *Elementos de Geometria* chegou a ser reeditado até meados da década de 1950, chegando à 14ª edição, de 1954, mostrando sua aceitação no campo educacional.

Ao analisar o livro L2, percebe-se que o assunto teorema de Thales, embora não seja nomeado dessa forma, é apresentado como um teorema das linhas proporcionais. A demonstração é feita para o caso particular, em que é possível encontrar uma medida comum para os segmentos. No problema 203, que pede para "achar a medida comum de duas linhas dadas", o autor trata do conceito de segmentos comensuráveis. Vejamos como está exposto o problema 203:

> O systema é análogo ao que se emprega na Arithmetica para achar o Máximo commum divisor entre dois números dados: applica-se a pequena linha *a* sobre a grande *b* tantas vezes quanto for possível; o resto transporta-se sobre a pequena linha, o novo resto sobre o resto precedente; e assim por diante, até não se achar mais resto.

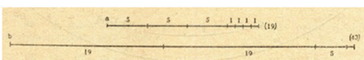


Fig. 150

> A ultima linha assim applicada é a medida commum procurada, Ella serve para estabelecer a razão que existe entre as duas linhas; por exemplo, no caso acima esta medida commum, que está marcada com o algarismo 1, contem-se 19 vezes na pequena linha *a*, e 43 vezes na grande *b*. Podemos, pois dizes que *a* é os 19/43 de *b*. (FIC, 1923, p.69)

Os exercícios não são aplicações diretas do resultado. Encontram-se vários problemas envolvendo diversos conteúdos explorados nesse livro, sempre um relacionado com outro, não tendo, portanto blocos de exercícios de um único assunto.

Em seguida, vem uma observação referente a linhas incomensuráveis, como aquela à qual não é possível encontrar uma medida comum, remetendo-se ao exemplo da razão da diagonal para o lado do quadrado de medida um. A observação é apresentada com utilização, para construção, com régua e compasso, objetivo da seção de problemas de construção geométrica. Veja-se esta observação:

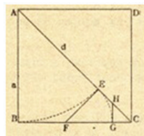
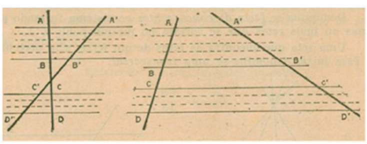


Fig. 151

> **204. Observação**. *Linha incomensurável*. Por mais longe que se leve a operação, é possível que nunca se chegue a ter um resto que esteja contido exactamente no resto precedente; neste caso, as linhas são *incomensuráveis*, isto é, não têm medida commum. É o que há de acontecer procurando-se, por exemplo, a *razão da diagonal para o lado do quadrado.* Para ter a medida commum de AB e de AC, appliquemos, por exemplo, AB sobre AC, descrevendo do ponto A como centro, com AB como raio, um arco BE. A diagonal AC contém AE mais um resto EC que se deve aplicar sobre o lado do quadrado; para isso levantemos uma perpencicular EF à diagonal; as retas FB, FE são iguais entre si como tangentes traçadas do mesmo ponto (nº 191, I); demais o triângulo CEF é rectangulo isósceles, porque o ângulo C é igual a 45º; portanto
>
> CE = EF = FB
>
> Transportando FE de F para G, temos pois:
>
> BC = BG + GC, isto é BC = 2EC + GC
>
> Assim o lado do quadrado é igual a duas vezes i primeiro resto CE mais uma parte de CG, que se deve comparar com CE; ora, esta operação é análoga áquella que acabamos de fazer para comparar CE e BC. Acharemos, pois que CE contém duas vezes CG mais um resto, e assim por diante; portanto *a diagonal e o lado do quadrado são linhas incomensuráveis.* (veja-se também nº 272). (FIC, 1923, p.69-70)

A coleção *Curso de Matemática* (L3), de autoria dos professores Euclides Roxo (1890-1950), Cecil Thiré, Júlio César de Mello e Souza (Livraria Francisco Alves), desempenhou um importante papel no Movimento de Modernização do Ensino de Matemática no Brasil. A coleção é organizada em cinco volumes, dos quais o livro do 1º ano não teve participação do autor Euclides Roxo.

Na análise da coleção L3, percebe-se que o assunto é apresentado com uma propriedade do feixe de paralelas. A demonstração do teorema é realizada apenas para o caso particular do teorema, motivo retratando na observação quando envolvem grandezas incomensuráveis, em que, nas concepções dos autores, na prática não podemos verificar esses tipos de grandezas. Vamos verificar o teorema das linhas proporcionais que, na coleção, é exposto como uma propriedade do feixe de paralelas:

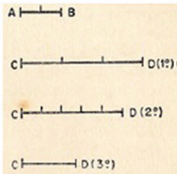
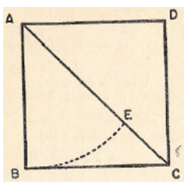
> Um feixe de paralelas intercepta, sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.
>
> **DEMONSTRAÇÃO**
>
> Consideremos um feixe de paralelas cortado pelas transversais AD e A′D′.
>
> Tomemos dois segmentos quaisquer AB e CD da primeira transversal e os segmentos A′B′ e C′D′ correspondentes da segunda.
>
> 
>
> Queremos demonstrar a relação:
>
> $$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$
>
> Vamos supor que uma unidade comum, u, está contida 5 vezes em AB e 3 vezes em CD. Temos:
>
> AB = 5u
>
> CD = 3u
>
> Podemos escrever:
>
> $$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}\ (R)$$
>
> Tracemos, pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD, paralelas ao feixe.
>
> O segmento A′B′ ficará dividido em 5 partes iguais e o segmento C′D′ em 3 partes iguais, de acordo com o estabelecido em o nº 24, cap. XVI.
>
> Temos, portanto:
>
> $$\frac{A'B'}{CD}=\frac{5}{3}\ (R')$$
>
> Das relações (R) e (R′) tiramos:
>
> $$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$ (ROXO et al., 1941, p.328-329)

Nos exercícios, encontra-se apenas uma atividade de fixação em que se aplica o teorema, trabalhando o caso de os segmentos serem comensuráveis com a unidade de medida. No geral, no que se refere ao teorema de Thales, os autores se apropriam de elementos que buscam a compreensão do conceito, sem muita formalidade.

A coleção Matemática: Curso Ginasial (L4), do autor Ary Quintella (1906-1968), é formada por livros didáticos pertencentes a uma época anterior tanto ao Movimento da Matemática Moderna no Brasil quanto ao período que alguns autores (THIENGO, 2001) chamam de Matemática Tradicional.

Ao analisar a coleção L4, verifica-se que o conteúdo é abordado de maneira a fundamentar os próximos capítulos (Linhas proporcionais no triângulo e Semelhança). Demonstra-se o caso particular do teorema, dando ênfase ao conceito de feixe de paralelas, provando que o teorema é válido não somente para três paralelas, mas para um número qualquer de paralelas. Não são abordados na demonstração conceitos de grandezas comensuráveis, sendo trabalhado esse assunto tanto no livro da segunda série ginasial quanto na quarta série ginasial.

O autor não utiliza, na demonstração do teorema de Thales, a definição de comensurabilidade de segmentos; todavia, achamos pertinente rever esses conceitos sob o olhar do autor. O conceito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis é exposto da mesma forma nos livros da 2ª e 4ª série ginasial; escolhemos, porém, o livro da 2ª série, unidade I, no capítulo referente ao cálculo com radicais, páginas 49 a 50, para mostrar com mais detalhes. O autor divide a demonstração em três casos, tomando AB como unidade e CD como o segmento a ser medido:

> Se desejarmos medir um segmento CD com a unidade AB (fig. 3), três casos podem ocorrer.
>
> 
>
> Fig. 3
>
> **PRIMEIRO CASO.** CD contém exatamente três vezes a unidade AB. A medida de CD é, então, o *número inteiro* 3.
>
> **SEGUNDO CASO.** CD não contém AB exatamente; porém, se dividirmos AB em duas partes iguais, verificaremos que uma dessas partes cabe exatamente cinco vezes em CD. A medida de
>
> CD é então o *número fracionário 5/2 ou 2 ½*.
>
> Nesses dois primeiros casos, dizemos que os segmentos AB e CD admitem *uma medida comum* ou são ***comensuráveis***.
>
> **TERCEIRO CASO.** Pode acontecer que CD não contenha AB e, por maior que seja o número de partes em que dividamos AB, nenhuma dessas partes fique contida exatamente em CD.
>
> É o que ocorre, por exemplo, com a diagonal e o lado do quadrado (fig. 4). A diagonal não contém o lado e nenhuma de suas partes alíquotas.
>
> 
>
>
> Neste caso diz-se que AB e CD não admitem *medida comum* ou são *incomensuráveis.*
>
> Outro exemplo de grandezas incomensuráveis nos é dado pela circunferência e o diâmetro. (QUINTELLA, 1960, p.49-50)

É interessante mencionarmos que, na definição de números racionais e irracionais, o autor faz uma relação com comensurabilidade de grandezas.

> Os números que representam a medida de grandezas comensuráveis com a unidade denomina-se ***números racionais.***
>
> [...]
>
> Quando a grandeza é incomensurável com a unidade, sua medida não pode ser expressa por um número inteiro nem fracionário. Torna-se, então necessária a criação de novos números. A tais números dá-se o nome de ***números irracionais***. (QUINTELLA, 1960, p.50)

Em seguida, expõe o exemplo da raiz quadrada do número 2, que, aproximando diversas sucessões de números decimais, consegue encontrar um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

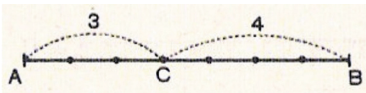
Nos exercícios, encontrados no final da unidade, prevalece a aplicação do caso particular do teorema. Depara-se, no decorrer da coleção, com apenas um exercício de aplicação do teorema de Thales, porém exercícios envolvendo teoremas das linhas proporcionais nos triângulos e semelhança de triângulos predominaram nessa seção, ainda que nesses conteúdos use-se o resultado do teorema de Thales.

No geral, no que se refere ao teorema de Thales, a coleção tratou o assunto de forma a não se comprometer com conteúdos como comensurabilidade de segmentos. Seguiu um padrão formal, organizando suas demonstrações (hipótese, tese e demonstração) sem comprometer o proposto do livro, que á a aprendizagem do aluno.

A coleção Matemática – Curso Ginasial (L5), do autor Osvaldo Sangiorgi (1921-), é formada por livros didáticos pertencentes ao período de modernização de ensino de Matemática. Há, porém, variações nos anos de edição. Os quatro volumes estão estruturados em capítulos, e estes, divididos em partes, havendo, em alguns capítulos, apêndices de complementação do conteúdo.

Ao analisar a coleção L5, percebe-se que o assunto é abordado como uma das propriedades do feixe de paralelas, antecedendo o conteúdo de semelhança de triângulos. Sua prova concentra-se na demonstração do caso em que os segmentos são comensuráveis, não demonstrando o caso mais geral. Como os autores utilizam esse conceito de comensurabilidade de segmentos, na demonstração, fomos verificar esse conceito no livro.

O conteúdo analisado (teorema de Thales) pode ser encontrado no volume 4 da coleção, mais precisamente no capítulo três, intitulado "Semelhança", dentro da 1ª parte, que aborda os conceitos de razão e proporção de segmentos, feixe de paralelas e teorema de Thales, páginas 141 a 151. O capítulo inicia-se com o tratamento sobre razão de segmentos, abordando a definição e as observações referentes a segmentos denominados comensuráveis e incomensuráveis. Acompanhemos:

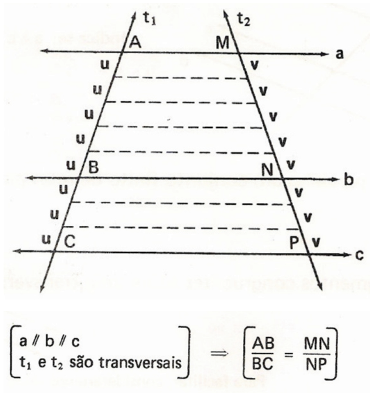
> Seja o segmento $\overline{AB}$ e um ponto C que divide em dois segmentos: $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, cujas medidas (na mesma unidade, cm, por exemplo) são respectivamente: 3 e 4.
>
> 
>
>
> Nestas condições, diz-se que o ponto C divide o segmento AB, *de A para B*, na *razão* 3 : 4 ou $\frac{3}{4}$. indicações:
>
> $\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{CB})} = \frac{3}{4}$
>
> ou usando a notação simplificada:
>
> $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3}{4}$
>
> NOTA: É mais cômoda, agora, a indicação de $m(\overline{AC})$ por AC e $m(\overline{CB})$ por CB, nos estudos que se seguem. Portanto, AC e CB estão representando *números reais*.
>
> Diz-se, também, que C divide o segmento AB, *de B para A;* na *razão* 4: 3 ou $\frac{3}{4}$, cuja indicação é, analogamente:
>
> $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3}{4}$
>
> OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Se a *razão* entre as medidas de dois segmentos é um *número racional,* os segmentos são denominados *comensuráveis.* No exemplo estudado os segmentos AC e CB são *comensuráveis,* pois:
>
> $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3}{4}$ (número racional).
>
> Se a *razão* das medidas é um *número irracional*, então os segmentos são denominados *incomensuráveis*.
>
> Assim, por exemplo, a *diagonal* e o *lado* de um mesmo quadrado, ABCD, são *segmentos incomensuráveis,* porque a *razão* de suas medidas (sempre na mesma unidade) é igual ao *número irracional* 2 , isto é:
>
> $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ (número irracional).
>
> De qualquer maneira, a *razão* entre dois segmentos é um *número real.* (SANGIORGI, 1968, p.141-142)

Em muitos momentos, o autor passeia no conceito geométrico e aritmético sem fazer conexão entre as ideias. Utiliza os termos razão e fração com o mesmo propósito, ao se referir à medida de dois segmentos. Para segmentos comensuráveis, diz que, se a razão entre as medidas de dois segmentos é um número racional, os segmentos são denominados comensuráveis, e se a razão das medidas é um numero irracional, então os segmentos são denominados incomensuráveis (SANGIORGI, 1968), fato que nos chamou atenção. Contudo, notamos certo refinamento no conceito de segmentos comensuráveis na demonstração do teorema, diferentemente do proposto no início do capítulo. Nos exercícios, Sangiorgi aplica de forma imediata o teorema de Thales, repetindo diversas vezes o processo em vários itens, sendo trabalhado apenas o caso que os segmentos são comensuráveis.

A coleção *A Conquista da Matemática* (L6), dos autores José Ruy Giovanni e Benedito Castrucci (Editora FTD), desde o início da década de 80 do século XX, vem sendo um enorme sucesso de vendas. Nesses mais de 30 anos, a coleção foi ganhando novas edições (atualizadas e reformuladas), sofrendo várias alterações em termos de capa, coautoria, concepções e exercícios, movidas pelas exigências do mercado editorial.

Na análise da coleção L6, percebe-se que o livro mantém um tratamento formal (hipótese, tese e demonstração), sendo apresentado o conteúdo linearmente. Os autores abordam conceitos como razão e proporção de segmentos, segmentos proporcionais e feixe de paralelas que antecedem a exposição do teorema de Thales. Com isso, a prova se reduz à demonstração do caso em que os segmentos são comensuráveis com uma unidade padrão, deixando uma observação que a demonstração também é válida para o caso geral, porém não é objetivo essa prova. Veja a demonstração do teorema de Thales:

> Um feixe de paralelas determina em duas transversais, quaisquer, segmentos proporcionais.



Demonstração

1. Suponha que AB e BC sejam comensuráveis e seja **u** a unidade padrão de medida. Logo: $\overline{AB} = 5u$ e $\overline{CD} = 3u \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5}{3}$.

2. Tracemos pelos pontos de divisão de AB e BC as paralelas à reta a = $\overleftrightarrow{AM}$ do feixe, que vão interceptar t2 em segmentos congruentes (v), de acordo com a propriedade do feixe de paralelas. Então: $\overline{MN} = 5u$ e $\overline{NP} = 3u \rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{5}{3}$.

3. Comparando 1 e 2, temos: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$ onde AB, BC, MN, NP são proporcionais.

(GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985d, p.119)

Não foi encontrada na coleção a explicação sobre o conceito da comensurabilidade de segmentos, tratada na observação após a prova do teorema de Thales, o que pode proporcionar confusão conceitual ao aluno. Nos exercícios, notamos que muitos tratam apenas de atividades que envolvam segmentos comensuráveis, mostrando coerência com o que foi afirmado no texto. Entretanto, a maioria dos exercícios é realizada como uma aplicação imediata do resultado. Percebe-se, porém, uma tentativa de contextualização em alguns problemas.

A coleção *Matemática* (L7) é de autoria de Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcello Lellis, novos personagens no mercado de livros didáticos de Matemática. Eles foram influenciados pelas grandes discussões em torno do ensino da Matemática, principalmente a partir do lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, e pela avaliação dos livros didáticos promovida pelo MEC como parte integrante do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o que exigiu dos autores um ensino mais contextualizado.

Na análise da coleção L7, percebe-se que o assunto é abordado como uma propriedade do paralelismo de retas, em que, na demonstração do caso particular, os autores propõem uma prova empírica, a partir da medição com régua e compasso dos segmentos correspondentes. Para o caso mais geral, utilizam-se do conceito de semelhança de triângulos, tratado anteriormente (capítulo 1 do livro), deixando algumas dúvidas quanto ao processo de dedução para esse caso.

Entretanto, não mencionam o conceito de comensurabilidade de segmentos, isto é, a medição de grandezas geométricas não é trabalhada na coleção, justificando o uso de semelhança de triângulos na demonstração. Com relação aos exercícios propostos, notamos que a maioria privilegia a abordagem de novos conceitos e convida os alunos a descobertas, não usando a fixação. Encontramos alguns exercícios de aplicação imediata do teorema, porém, em um item do exercício 42, a aplicação do caso mais geral foi contemplada pelos autores.

No geral, o livro analisado mantém, no que se refere ao teorema da Thales, um tratamento bastante intuitivo, mostrando essa nova tendência no ensino de Matemática. No entanto, é necessário que o aluno seja capaz de perceber a diferença entre o rigor matemático e a mera intuição.

Resultados

A análise dos livros didáticos de Matemática constitui-se em uma rica fonte de informações sobre o próprio ensino de Matemática, pois esses livros fazem parte de todo um processo de ensino e aprendizagem, além de ser o instrumento pedagógico de maior utilização no cotidiano escolar. Preferimos estudar obras antigas e contemporâneas que tiveram grande importância no cenário nacional, obras essas maltratadas pelo tempo e às quais dificilmente, mesmo por meio de fontes seguras, teremos acesso ao contexto real em que foram concebidas.

Por isso, durante nossa pesquisa, optamos por acrescentar algumas características importantes das obras para sua época, como a estrutura dos textos e, quando possível, as notas de rodapé e a biografia dos autores.

Na análise dos livros didáticos, percebemos, também, várias mudanças durante o período selecionado. Podemos citar, por exemplo, a quantidade de exercícios, as ilustrações, a apresentação dos conteúdos, a estrutura das obras, etc. Foi possível perceber, também, a evolução da escrita da Matemática voltada para o ensino e as características de cada fase pela qual a educação vem passando.

No que se refere ao teorema de Thales, a nomenclatura utilizada nos livros didáticos referentes a ele, em relação ao teorema das linhas proporcionais, só se estabeleceu a partir de L5. No caso de L4, essa nomenclatura está relacionada ao teorema sobre triângulos semelhantes.

Com relação ao estudo da comensurabilidade de grandezas, os livros L1, L2, L3 e L5 estudam esse assunto no mesmo volume, em capítulos que antecedem a demonstração do teorema. O livro L4 aborda o assunto nos volumes da 2ª e 4ª séries ginasiais. Nos dois casos, é apresentado da mesma maneira. Embora a coleção L6 apresente, em sua demonstração do teorema, o termo incomensurável, nela não se encontrou a exposição desse conteúdo. E o livro L7 não utiliza o conceito na demonstração, portanto não o estuda.

Um fato importante a ressaltar é que as coleções L4 e L5 relacionam o estudo de comensurabilidade de grandezas com os números racionais e irracionais. Na obra L5, porém, o estudo é apresentado com certa confusão conceitual.

Quanto ao desenvolvimento do conteúdo analisado no primeiro manual escolar, L1, há, no desenvolvimento do teorema, preocupação em estudar tanto a comensurabilidade quanto a incomensurabilidade de segmentos. Uma característica desse manual é o formato de "volume único", isto é, o mesmo livro pode ser estudado em todos os níveis de escolaridade, justificando, talvez, o aparecimento completo da abordagem do assunto.

No livro L2, embora em volume único, o teorema não é demonstrado de forma completa, com prova, somente, do caso comensurável. A partir do período em que são editados livros seriados, no Brasil, desde o Movimento de Modernização do Ensino, todos os livros analisados, L3, L4, L5, L6, L7 apresentam a demonstração voltada apenas para o caso em que os segmentos são comensuráveis. Nesses livros, alguns autores fazem observações sobre o fato de o teorema ser aplicado ao caso em que os segmentos sejam incomensuráveis.

Na parte de exercícios, a maioria dos exercícios se resumem a aplicações diretas do resultado do teorema. Em todos os livros didáticos analisados, os autores apresentam atividades que possibilitam o estudo com segmentos comensuráveis; porém, apenas as obras L2, L3, L4 e L7 oferecem exercícios que possibilitam o estudo de segmentos incomensuráveis.

Veja-se, no quadro 2, uma síntese das análises dos livros didáticos de Matemática selecionados para esta pesquisa.

Quadro 2 – Síntese das análises dos livros didáticos de Matemática.

Características	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**L6**	**L7**
Nomeia com teorema de Thales o teorema das linhas proporcionais							
Estuda comensurabilidade de grandezas							
Demonstra o caso comensurável do teorema							*
Demonstra o caso incomensurável do teorema							*
Utiliza o(s) termo(s) comensurável(is) e/ou incomensurável(is) na demonstração							
Relaciona comensurabilidade a número racional e irracional							
Contém exercícios que possibilitam estudar segmentos comensuráveis							
Contém exercícios que possibilitam estudar segmentos incomensuráveis							

Fonte: elaborado pela autora.

* Os autores dessa coleção, embora demonstrem o teorema para os casos particular e geral, não utilizam a teoria da comensurabilidade de grandezas em sua demonstração.

Com relação ao estilo da demonstração do teorema de Thales, todas as obras analisadas demonstram o caso em que os segmentos são comensuráveis de forma semelhante à apresentada no capítulo 3, páginas 39 e 40, com o uso do conceito de número da época dos pitagóricos.

Quanto ao estilo da demonstração para o caso em que os segmentos são incomensuráveis, há duas demonstrações diferenciadas: o autor Ottoni (1904), da obra L1, segue estilo semelhante ao de Niven (1984), apresentado no capítulo 3, páginas 45, 46 e 47.

Os autores Imenes e Lellis (1999), da colação L7, apropriam-se de conceitos de semelhança de triângulos para demonstrar o teorema para o caso geral.

Considerações finais

Nesse estudo, procurou-se observar como a geometria é explorada nos livros didáticos para o tratamento da ampliação do campo dos números racionais para os reais, mais precisamente tomando como base o teorema de Thales que relaciona o tratamento geométrico. Com isso, buscaram-se evidências no que diz respeito à questão da comensurabilidade.

Nos livros didáticos analisados, percebe-se que as demonstrações referentes ao teorema de Thales são apresentadas na maioria das obras apenas para segmentos comensuráveis com a unidade de medida.

Alguns livros estudados na pesquisa omitem o fato da existência da prova para segmentos incomensuráveis, o que pode implicar a permanência do pensamento em que somente as grandezas comensuráveis foram utilizadas historicamente. Encontramos, porém, livros que desenvolvem demonstrações utilizando outros conceitos, como, por exemplo, o livro[6] que trabalha com as aproximações sucessivas de uma série de "números comensuráveis" para a prova de segmentos incomensuráveis. Em outro exemplo,[7] desenvolve-se a demonstração para o caso em que os segmentos são incomensuráveis utilizando-se o conceito de semelhança de triângulos, porém não é mencionado o conceito de comensurabilidade de segmentos, melhor dizendo, medição de grandezas geométricas.

Embora atualmente seja conhecida a demonstração completa para o teorema de Thales, são poucos os livros didáticos de Matemática que abordam essa demonstração. Dessa forma, é possível crer que a ideia subjacente ao teorema de Thales, ligada às condições de proporcionalidade de segmentos, isto é, medição de segmento, pode ser uma forma de introduzir números reais positivos. Comentamos anteriormente que no trabalho de Baroni e Nascimento (2005) encontra-se uma proposta de tratamento para os números reais, via medição, a qual pode ser considerada uma proposta concreta visando à melhoria do ensino dos números reais.

Desse modo, enfatizar o tratamento de comensurabilidade de segmentos ao desenvolver a demonstração do teorema de Thales possibilita estabelecer relação com a construção dos números reais.

Acredita-se que enfatizar a análise dos livros didáticos de Matemática trabalhando especificamente o teorema de Thales, além de resgatar o estilo da escrita das obras antigas e modernas dessa área, também irá mostrar a evolução de como esse conteúdo era exposto nos livros didáticos no Brasil ao longo de um período de tempo. Pretendemos, assim, que essa análise possa ser importante como um estudo da evolução do conceito do ensino de Matemática Escolar no Brasil, no que diz respeito às abordagens dos casos de comensurabilidade de segmentos.

Assim, por meio de análise, procurou-se resgatar o caminho percorrido pela escrita da Matemática e do teorema de Thales no período em que os livros didáticos foram produzidos, focando as relações entre os aspectos geométricos e algébricos.

Referências

BARONI, R. L. S.; NASCIMENTO, V. M. do. *Um tratamento, via medição, para os números reais*. São Paulo: SBHMat, 2005. (Coleção História da Matemática para Professores).

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília. MEC/SEF, 1998.

CHOPPIN, A. O historiador e o livro escolar. *História da Educação*. ASPHE/FaE/UFPel, Pelotas, n.11, p.5-24, abr. 2002.

[6] *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea*, Ottoni, 1904.

[7] *Matemática*, Imenes e Lellis, 1999.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de continuidade e números reais:* Matemática, descobertas e justificativas de professores. 2001. 433f Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

FIC, *Frere Ignace Chaput. Elementos de Geometria.* Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia, 1904.

FISCHBEIN, E; JEHIAM, R; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, New York, v.29, p.29-44, 1995.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática.* São Paulo: FTD, 1985.

HARUNA, N. C. A. *Teorema de Thales:* uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 2000. 230f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

IMEMES, L. M. P.; LELLIS, M. C. T. *Matemática.* São Paulo: Scipione, 2003. 270p.

MIGUEL, A. Reflexões acerca da Educação Matemática Contemporânea. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo: SBEM, n.2, p.53-60, 1994.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. *Boletim de Educação Matemática,* Rio Claro, n.21, p.1-19, 2004.

NIVEN, I. *Números: Racionais e Irracionais*. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

OTTONI, C. B. *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1904.

QUINTELLA, A. *Matemática – Curso Ginasial*. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1968.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; SOUZA, J. C. de M. *Curso de Mathematica.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1924.

SANGIORGI, O. *Matemática – Curso Moderno*. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1963.

SOARES, E. F.; FERREIRA, C. C.; MOREIRA, P. C. Números Reais: concepções dos licenciados e formação matemática na licenciatura. *ZETETIKÉ*, Campinas, v.7, n.12, p.95-117, 1999.

THIENGO, E. R. *A Matemática de Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi:* um estudo comparativo. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal Espírito Santo, Vitória, 2001, 153f.

VALENTE, W. R. Positivismo e matemática escolar dos livros didáticos no advento da república. In: *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, n.109, mar., p.201-212, 2000.

Ana Carolina Costa Pereira – Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Coordenadora do Curso de Matemática da Universidade Aberta do Brasil. Professora adjunta da Universidade Estadual do Ceará.