TRANSIÇÃO COMPLEXA DO CÁLCULO TCC: ENGENHARIA DIDÁTICA PARA AS NOÇÕES DE SEQUÊNCIAS, SÉRIES E SÉRIE DE POTÊNCIAS

Complex transition of calculus: Didactical engineering for the notions of sequences, series and power series

Francisco Regis Vieira Alves

Resumo

O presente escrito apresenta a concepção e a descrição das duas fases iniciais (análises preliminares, análise *a priori*), com relativa ênfase à concepção de situações didáticas, num contexto de transição acadêmica. A referida transição diz respeito ao contato preliminar, com a teoria das funções na variável real e, após algum tempo, com o estudo das funções na variável complexa. Assim, de modo particular, o trabalho discute uma perspectiva de ensino, afetada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), para o conteúdo de sequências, séries e séries de potências de números complexos. Dessa forma, ao adotar o *design* de investigação proporcionado pela Engenharia Didática (ED), o trabalho visa indicar uma abordagem que busca enfatizar um papel privilegiado para a visualização, oportunizando, assim, melhor compreensão por parte dos estudantes no *locus* acadêmico.

Palavras-chave: Sequência. Séries e Séries de Potências. Engenharia Didática. Visualização. Ensino.

Abstract

This writing presents the design and description of the two early stages (preliminary and a priori analysis), with emphasis on the design of teaching situations, in a academic transition context. The mentioned transition with regard to the preliminary contact with the theory of functions in one real variable and, after, some time to the study of functions in complex variable. Thus, in particular, this paper discusses a teaching perspective, affected by the Didactical Theory Situations – DTS, relatively the subject sequences, series and power series in complex variable. Thus, by adoption of the research design provided by the Didactical Engineering – DE, the work aims to indicate an approach that seeks to highlight a privileged role for the visualization and, in this way, providing a better understanding to the students in the academic locus.

Keywords: Sequence. Series and Power series. Didactical Engineering. Visualization. Teaching.

Introdução

Reconhecidamente, o período de estudos acadêmicos envolvendo os conteúdos de Matemática proporciona uma série de entraves e dificuldades aos estudantes. Alguns assuntos, diante da escassez de trabalhos e investigações no âmbito do seu ensino e da sua aprendizagem, merecem atenção e uma vigilância constantes, apesar do contraste entre a grande quantidade de investigações, no campo da Educação Matemática, interessados no ensino do Cálculo, no primeiro ano de estudos acadêmicos, que se contrapõe ao caráter de aparente oblívio relativo ao ensino do Cálculo na variável complexa ou de Análise na variável complexa, que segue, inexoravelmente, nos anos subsequentes.

Assim, declaramos nosso interesse particular e manifestamos uma perspectiva didático-metodológica relacionada aos conteúdos de Análise Complexa (AC) e que, grosso modo, exigem dos estudantes a dedicação aos estudos envolvendo a teoria das funções na variável real e, num intervalo de alguns anos, o estudo da teoria das funções na variável complexa. Com o escopo de assinalar a natureza das relações envolvendo a transição para AC, exemplificamos o caso das noções de sequências, séries e séries de potências que desempenham papel fundante no referido *corpus* teórico.

Abaixo, pontuamos a mudança notacional envolvendo a noção de sequências de números reais para a noção de sequência de números complexos (Figura 1). Logo em seguida, identificamos a noção de séries de números reais que admitem sua generalização quando estudamos a noção de séries de números complexos. E, na última implicação '$\Rightarrow$', quando escrevemos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, fazemos referência a uma série de potências, na variável real. E, algum tempo depois, os estudantes entram em contato com as noções que indicamos por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (série de Taylor) ou $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$(série de Laurent) (ver Figura 1). O fato é que o período temporal (indicado pelas alterações notacionais) pode estender-se por alguns anos e proporcionar um extenso repertório de novas exigências aos estudantes.

Figura 1 – Quadro sistemático envolvendo a mudança notacional no caso de sequências, séries e séries de potências.

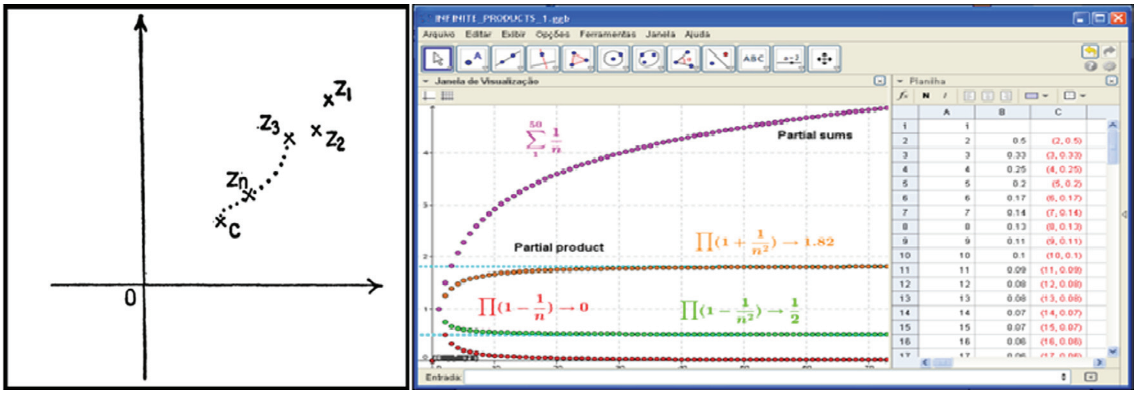
$$(x_n)_{n\in IN} \overset{TRANSIÇÃO}{\Rightarrow} (z_n)_{n\in IN} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overset{TRANSIÇÃO}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} z_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \overset{TRANSIÇÃO}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Fonte: o autor.

Com origem em uma apreciação açodada, poderíamos inferir que a única mudança significativa notacional na Figura 1 envolve, tão somente, a substituição da letra “x” pela letra “z”. O que não se mostra evidente se insere num bojo de inúmeras alterações, em decorrência da introdução da variável complexa. Nesse sentido, exemplificamos o expediente utilizado por Lederman (1960, p.49) com o escopo de realizar uma descrição geométrica da noção de convergência de uma sequência de números complexos.

Assim, com origem na Figura 2 (ao lado esquerdo), podemos estabelecer um pensamento comparativo sobre o uso da tecnologia no ensino de AC, quando relacionamos aos significados conceituais dinâmicos no cenário de aprendizagem da Figura 2 (ao lado direito). Nele, comparamos o comportamento gráfico-numérico da noção de séries de números reais com alguns produtórios (ALVES, 2012), por intermédio da previsão dos valores numéricos assumidos por suas respectivas reduzidas. Assim, patenteamos o papel da tecnologia com a função de proporcionar um entendimento não estático (BOSCHET; ROBERT, 1983; ROBERT, 1984), maior e globalizante sobre uma profusão de mudanças e alterações (ver Figura 2, lado direito), que exigem do nosso entendimento, no cenário que apreciamos na Figura 2.

Figura 2 – Ledermann (1960, p.36) descreve o comportamento (estático) de convergência de uma sequência de números complexos e, ao lado direito, Alves (2012, p.4) discute o comportamento (dinâmico) gráfico-numérico de séries e produtórios de Números Reais.



Fonte: a pesquisa.

Para concluir, acentuamos o pensamento de Lederman (1960, p.44), que orienta como adquirir um entendimento geométrico para uma sequência de complexos $(z_n)_{n\in IN}$ convergente. Ele sugere plotamos os pontos no plano e, em seguida, avaliar o comportamento dos módulos: $|z_1 - c|, |z_2 - c|, |z_3 - c|, \ldots, |z_n - c|, \ldots$. O que, na maioria dos casos, se mostra tarefa fastidiosa e impraticável caso negligenciemos a tecnologia atual.

No próximo segmento, trazemos alguns elementos ou traços essenciais para uma proposta de Engenharia Didática (ED).

Engenharia Didática (ED)

Reparemos que, ao final da seção anterior, assinalamos o pensamento de Ledermann (1960, p.44) que, na verdade, expressa uma preocupação com o conteúdo a ser compreendido por outrem. Diante desses argumentos discutidos e outros que doravante apresentaremos, demarcaremos a seguinte problemática: no estudo de sequências de números reais (e complexos), séries de números reais (e complexos) e de série de potências, um ensino acadêmico que tende a enfatizar, tão somente, os aspectos lógico-formais envolvidos, pode proporcionar um entendimento de cunho restritivo aos estudantes (DANENHOWER, 2000). Tal problemática suscitará, doravante, uma questão de ordem investigativa.

Douady (1993, p.3) assinala que “todo o trabalho de construção, análise e previsão, repousa sobre um questionamento didático”. Antes de prosseguirmos, cabe pontuar que não temos a pretensão de responder (confirmar ou refutar) (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p.64), de modo empírico, qualquer questão de ordem investigativa. Entretanto, formulamos o seguinte questionamento: como descrever situações de ensino, relacionadas com as noções de sequências, séries e séries de potências, de maneira que a visualização ocupe função privilegiada, tendo como ênfase seu ensino?

Do ponto de vista do *design* de investigação adotado, assumimos a sistemática prevista pela ED (ARTIGUE, 1995; 1996; 2009; MARGOLINAS; DRIJVEERS, 2015). Oriundo de uma vasta tradição acadêmica da vertente francófona (ARSLAN, 2005; ARSLAN; LABORDE, 2003; BLOCH, 2006; DOUADY, 1995a; 1995b; LABORNE, 1997; MARGOLINAS, 2005; PERRIN-GLORIAN, 1992; ROBERT, 1983), de maior profusão nas décadas de 80 e 90, sabemos que a concepção de pesquisa em Engenharia Didática (ED) compara a forma de trabalho didático do professor com a maneira de trabalho do engenheiro que, para realizar projetos, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio (ARTIGUE, 1996; LABORDE, 1997). E, no que concerne aos momentos ou fases da investigação, distinguimos: as análises preliminares, análises *a priori*, a etapa da experimentação e introdução ao movimento de todo o aparato metodológico construído, *validação* e análises *a posteriori*. Por outro lado, restringir-nos-emos aos primeiros dois momentos previstos por Artigue (1996), qual sejam, as análises preliminares e a análise *a priori*.

Para concluir a presente seção, podemos vislumbrar a relevância dessa perspectiva *sui generis* de análise e investigação dos problemas envolvendo o binômio ensino-aprendizagem, quando observamos Brousseau ao mencionar que

> [...] o matemático não comunica seus resultados sob a forma que ele os encontra; ele os organiza, ele os fornece de uma forma mais geral possível, ele desenvolve uma 'didática prática' que consiste em colocar o saber sobre forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada e destemporalizada. (1989, p.14)

Entretanto, no âmbito do ensino, deparamos um caráter antagonista (MARGOLINAS, 1995, p.343) ao fato indicado no excerto anterior. Com efeito, na frente do ensino, registramos um trabalho no sentido inverso, posto que o professor deverá recontextualizar e repersonalizar o saber científico, isto é, realizar uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991) eficiente e planejada.

Análises preliminares

Dois elementos devem ser evidenciados nessa etapa, de acordo com Almouloud (2007, p.172), a saber: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. No que concerne ao item (i), de modo *standard*, no contexto acadêmico, no contexto da teoria das funções em uma variável real, os estudantes deparam o conteúdo de sequências de números reais e séries de números reais. Tais objetos são denotados, respectivamente por $\left(x_n\right)_{n\in IN}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. E, no âmbito da transição para a teoria das funções na variável complexa, registramos a generalização da noção de série de potências na variável real e, logo em seguida, na variável complexa que denotamos ainda por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, respectivamente. Ainda no ponto de vista da organização matemática do objeto, encontramos a noção de produtório de números reais, a qual admite a generalização quando passamos a lidar com números complexos e podem ser denotados por $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$, respectivamente.

No que concerne ao item (ii), para o seu entendimento ao decurso de uma ED, assinalamos um entendimento do ensino atual do objeto de interesse sem perdermos de vista que a ortodoxia hodierna que deparamos no ensino acadêmico, que tende tornar hegemônica a abordagem estruturante (BRIDOUX, 2012; CHAVEZ, 2014; CHOQUET, 1963) e formalista, possui raízes nas décadas passadas, sob influência bourbakiana (MARGOLINAS, 2005).

Nesse sentido, recordamos um estudo de ED, proposto por Robert (1984), com o intuito de identificar as concepções dos estudantes universitários, no primeiro ano de academia e contato com a noção de sequências numéricas. Dessa forma, sublinhamos duas concepções identificadas, de modo predominante, pela autora, a saber: (a) "representações dinâmicas" sobre a noção de convergência da noção de sequências numéricas; (b) "representações estáticas" sobre a noção de convergência da noção de sequências numéricas.

As primeiras são descritas pela autora como ações que envolvem representações de "convergência", "aproximação" e, essencialmente, como mencionado, em termos de ação. De outro modo, as representações estáticas envolvem representações da língua natural e a definição formal de convergência.

Análise *a priori*

A presente etapa, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas. Por intermédio de um apelo mnemônico, Brum e Schuhmacker (2013) indicam os elementos essenciais da fase atual, uma vez que "o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema" (ALMOULOUD, 2007, p.174). Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, expressar-se, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos" (ALMOULOUD, 2007, p.174).

Manifestamos, pois, um profundo interesse pela "determinação e seleção dos elementos que permitem os comportamentos dos estudantes e seu significado" (ARTIGUE, 1995, p.45). Por tal via, de modo sistemático e seguindo a tradição dos estudos dessa vertente, patenteamos uma parte descritiva e outra parte preditiva do presente aparato conceitual. Ademais, na análise *a priori* buscamos conceber "uma análise de controle dos significados" (DOUADY, 1995, p.44). Dessa forma, no que concerne à concepção, estruturação e planejamento das situações, na perspectiva de um caráter de complementaridade, largamente explorado em Didática da Matemática, adotaremos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1998), como metodologia de ensino. Ademais, temos um interesse semelhante ao descrito por Laborde (1995), ao evidenciar e sintetizar a perspectiva desenvolvida por Artigue (1984) em sua tese, quando comenta:

> Como evidencia em seu resumo Artigue (1984), no início de sua tese, o subsistema saber-aluno foi largamente estudado, desde o início da investigação, por meio de trabalhos consistindo dos alunos com tarefas cuidadosamente concebidas e modelizados seus procedimentos. (LABORDE, 1995, p.100)

Por fim, na etapa da *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que prediz Artigue (1995).

Construção e concepção de situações

De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p.4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância com as variáveis microdidáticas (responsáveis pela organização da sequência) eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle.

Ademais, recordamos que, num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (MARGOLINAS, 1995, p.344). E, ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela TSD, registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação didática (BROUSSEAU, 1986; 1988; 1998).

Situação didática I: decidir o comportamento de convergência/divergência da seguinte sequência de números complexos $z_n = \frac{(3+in)^2}{n^2}$.

Comentários: os alunos deverão reconhecer que $z_n = \frac{(3+in)^2}{n^2} = x_n + iy_n = \underbrace{\left(\frac{9-n^2}{n^2}\right)}_{\text{parte real}} + \underbrace{\frac{6}{n}}_{\text{parte imaginária}} i.$ Dessa forma, a atividade de produção de conjecturas, com arrimo da construção do *software GeoGebra*, deverá estimular o entendimento do comportamento de convergência/divergência dos termos que correspondem à parte real, bem como os termos que correspondem à parte complexa (concepção dinâmica sobre a noção).

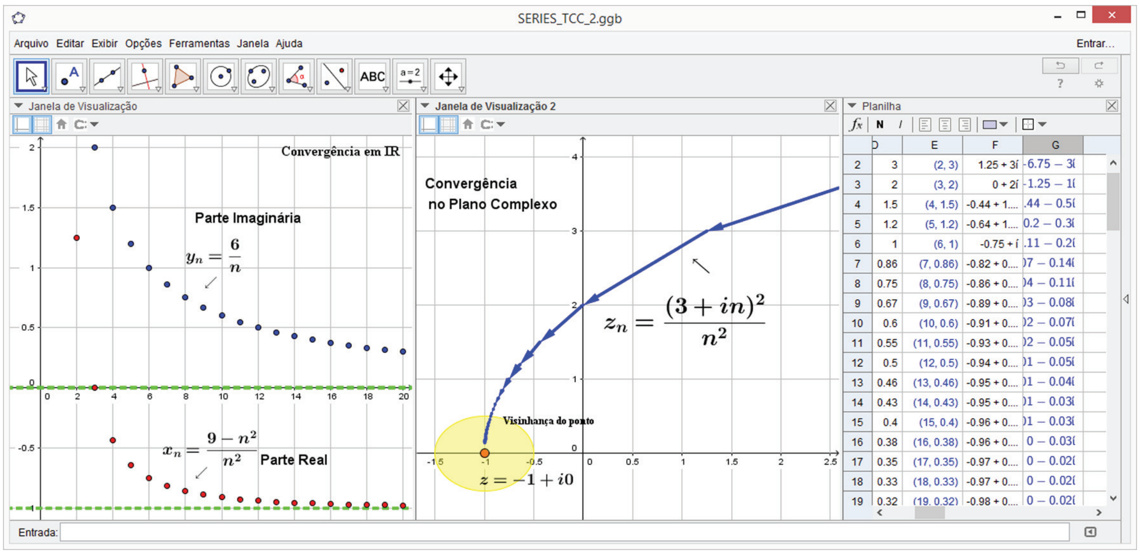
Situação de ação. As relações e os significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (ALMOULOUD, 2007, p.38). Isso posto, de início, o professor deve estimular os estudantes na investigação e visualização correspondentes aos dados exibidos na Figura 3. Com origem na mesma, ao lado esquerdo, os estudantes devem perceber o comportamento de decrescimento de dois conjuntos numéricos. O primeiro, na cor azul, foi designado no *software GeoGebra* por $(n, y_n) = \left(n, \frac{6}{n}\right) \in IR^2$. E, na cor vermelha, ainda ao lado esquerdo, na mesma figura, definimos os pares ordenados $(n, x_n) = \left(n, \frac{9-n^2}{n^2}\right) \in IR^2$, para $n \geq 1$.

Não por coincidência, os valores numéricos assumidos nas ordenadas devem corresponder à parte real e à parte imaginária da sequência de números complexos que indicamos há pouco por $z_n = \frac{(3+in)^2}{n^2} = x_n + iy_n = \underbrace{\left(\frac{9-n^2}{n^2}\right)}_{\text{parte real}} + \underbrace{\frac{6}{n}}_{\text{parte imaginária}} i$. Ora, num conjunto de saberes familiares aos estudantes, podem inferir que $\lim_{n\to\infty}\frac{9-n^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}-1=-1$ e que a reta $y=-1$ (na cor verde clara) constitui uma assíntota horizontal ao comportamento numérico da sequência anterior.

Pelo mesmo motivo, devem ser conhecedores de resultados fundamentais, como $\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=0$, e, dessa forma, o eixo real constitui outra assíntota ao conjunto numérico dos pontos (do plano) de sua parte real.

Por outro lado, na Figura 3, ao lado direito, os estudantes deverão perceber que, para valores grandes, de índices naturais, prevemos o comportamento de convergência/aproximação de certos vetores (na cor azul), que seguem determinada trajetória no plano. Devem identificar ainda que o conjunto desses vetores tendem, paulatinamente, a se "acumular", consoante a diminuição progressiva de seus comprimentos, cada vez mais, tornando-se próximos do vetor $z=-1+i0$.

Figura 3 – Com o uso do *software Geogebra*, visualizamos o caráter de convergência de sequências e séries de Números Reais e Complexos.



Fonte: o autor.

Situação de formulação. De acordo com a descrição fornecida, eles devem tomar $z_n=x_n+iy_n=\frac{(3+in)^2}{n^2}=\frac{9+6in-n^2}{n^2}=\frac{9-n^2}{n^2}+i\frac{6}{n}$ e, conhecendo uma regra operatória de limites, escrever: $\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{9-n^2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}i\frac{6}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-n^2}{n^2}+i\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\to-1+i0=z$. Não obstante, várias regras operacionais ou teoremas podem ser mobilizados sem que os estudantes saibam justificar a validez de suas decisões e ações!

Situação de validação. Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (ALMOULOUD, 2007, p.40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas a fim de obter a certeza das relações estabelecidas. Desse modo, o papel do professor pode atuar no sentido de conduzir os aprendizes a observarem que o modelo computacional se mostra fidedigno ao modelo matemático formal e, em dependência da evolução do grupo, demonstrações das propriedades mobilizadas na fase anterior podem ser apreciadas e revisitadas.

Situação de institucionalização. Nesse momento, de modo mais visível, o professor deve assumir o papel proeminente na fase atual (ALMOULOUD, 2007, p.42), uma vez que a determinação da forma e do conteúdo do saber para o qual ele tenciona aderir um determinado estatuto oficial institucionalizado. O diferencial, nesse caso, diz respeito ao fato de que os conhecimentos formais mobilizados e as concepções adquiridas, através das relações estabelecidas com o *software* (ver Figura 3), deverão constituir o patrimônio local do grupo de estudantes, que envolveu a elaboração de um saber pelo grupo.

Situação didática II: decidir o comportamento de convergência/divergência da seguinte série de números complexos $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n+\cos(n\theta)i}{n^2}$, para $0\leq\theta\leq 2\pi$.

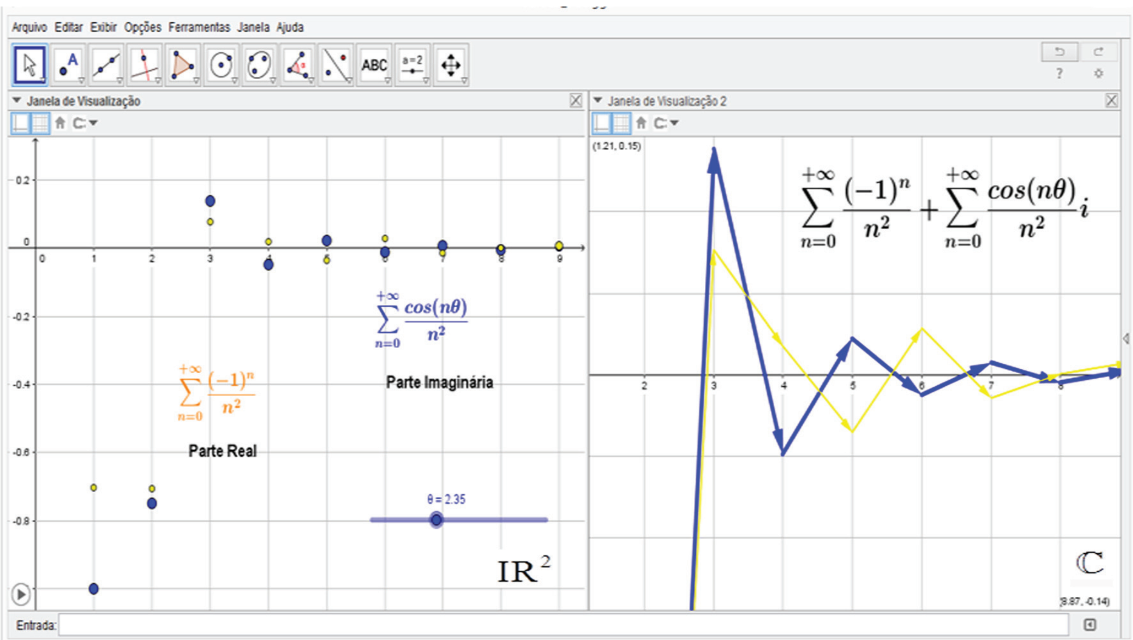
Comentários. os alunos deverão reconhecer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n+\cos(n\theta)i}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}i$. Ademais, quando o aluno se encontra em uma situação-problema, é necessário que "ele manifeste certa ideia sobre tal situação" (HOUDEBINE, 1991, p.2). Em nosso caso, as construções propostas com o *software* devem catalisar a produção das ideias que ensejamos colocar em jogo.

Situação de ação. É esperado que os alunos reconheçam que $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}}_{\text{parte real}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}}_{\text{parte imaginária}}\cdot i$. Logo em seguida, com recurso na Figura 3, poderemos proporcionar ao estudante uma apreciação, de cada parte separada, da expressão anterior. Com efeito, quando considerarem a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, poderão notar que suas reduzidas, de ordens particulares, tendem a assumir valores decrescentes (vetores na cor amarela).

De modo similar, quando considerarem a parte imaginária, designada aqui por $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}$, com a variação $0\leq\theta\leq 2\pi$, devem assumir variação de direções cada vez menores (vetores na cor azul).

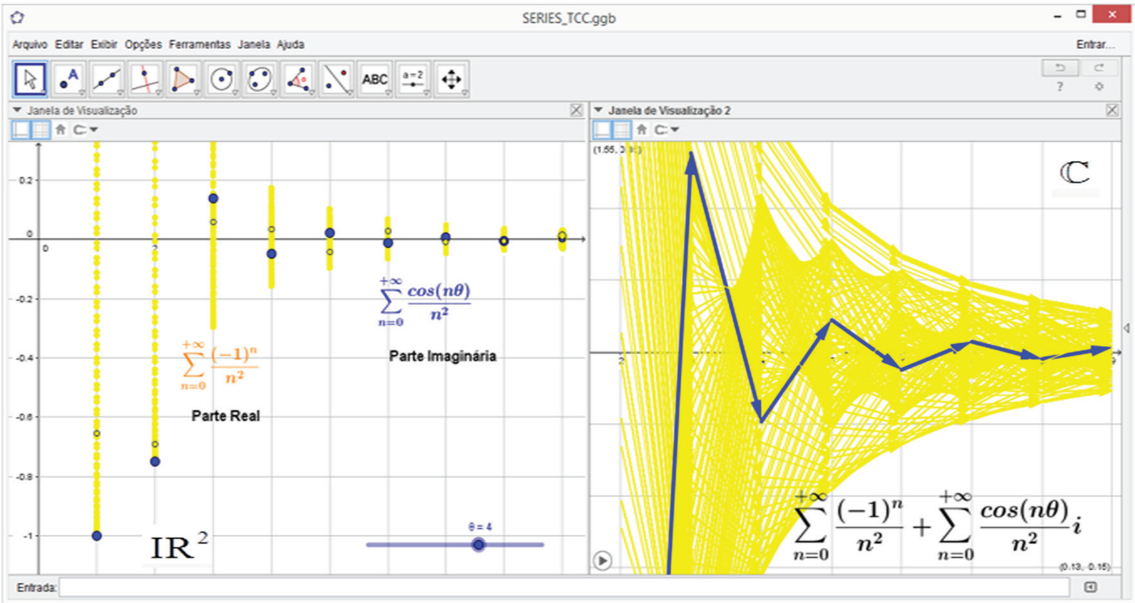
Assim, quando os alunos passam a considerar a soma $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}i$, sua natureza geométrica deverá ser alterada, ao passo que, nesse momento, com origem no lado direito das Figuras 4 e 5, passam a lidar com vetores (na cor amarela e na cor azul). Por outro lado, cabe advertir que "o aluno não buscará realizar uma representação a mais complexa possível. Ao contrário, aplica um princípio de economia [...]" (HOUDEBINE, 1991, p.7). Assim, cabe ao professor estimular a produção e mobilização de representações adequadas e adiar o princípio da economia para as fases ulteriores!

Figura 4 – Com o uso do *Geogebra*, visualizamos e comparamos os padrões na variável real (lado esquerdo) com a variável complexa (lado direito).



Fonte: o autor.

Figura 5 – Com o uso do *Geogebra,* visualizamos o "rastro" de convergência de séries de números complexos na fase de ação.



Fonte: o autor.

Situação de formulação. Com arrimo nas representações que indicamos por $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}$, os alunos deverão empregar os testes de convergência usuais, no contexto da variável real. Ora, no caso da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, os sujeitos devem distinguir seu termo geral $a_n=\frac{1}{n^2}$ e inferir que $a_n=\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

Devem compreender que a expressão correspondente $(-1)^n$, faz com que o resultado do valor numérico final das reduzidas (ver Figura 5) ora assumam valores positivos, ora assumam valores negativos, isto é, percebem o caráter oscilatório em seu valor numérico. Todavia, tal caráter oscilatório tende, gradativamente a diminuir (ver rastro dos vetores na Figura 5, na cor amarela).

Com origem em uma apreciação açodada, poderíamos inferir que a única mudança significativa notacional na Figura 1 envolve, tão somente, a substituição da letra "x" pela letra "z". O que não se mostra evidente se insere num bojo de inúmeras alterações, em decorrência da introdução da variável complexa. Nesse caso, o professor conduz os estudantes em comparar as propriedades geométricas e numéricas envolvendo as Figuras 4 e 5. Nelas, temos um "cenário de visualização" que correlaciona o comportamento na variável real e na variável complexa. Ademais, entre os teoremas que garantem a validez da operacionalização requerida na presente fase, podemos mencionar o teste para séries alternadas de Leibniz e as condições de convergência para um série geométrica que podem ser consultadas no compêndios de Análise Real (LEBL, 2011; GRAY, 2015; TASCHNER, 2005).

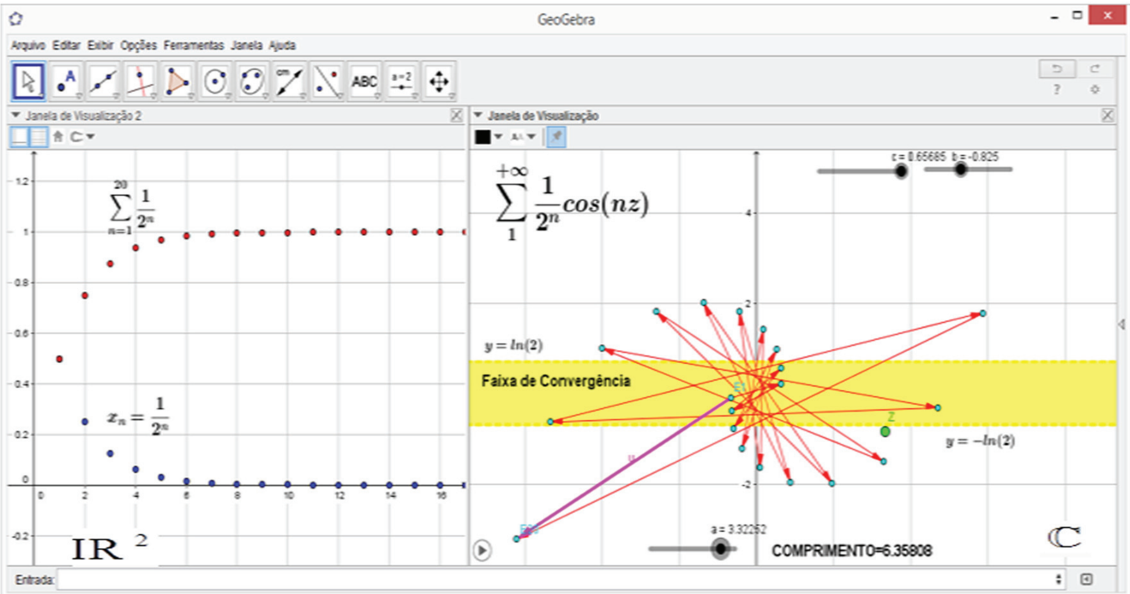
Situação de validação. Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (ALMOULOUD, 2007, p.40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes, com as informações e inferências empregadas na fase anterior, deverão reforçar as relações conceituais entre o modelo matemático formal e as estratégias escolhidas pelos aprendizes. Ademais, os argumentos de ordem formal e de ordem heurística devem constituir um conjunto de elementos a serem apreciados na fase de institucionalização da situação II.

Situação didática III: decidir o comportamento de convergência/divergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\cos(nz)$. Ademais, no caso de sua convergência, indicar uma função analítica $f(z)=u(z)+iv(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ que poderá ser definida a partir da mesma.

Comentários: espera-se que os alunos conheçam a formulação $\cos(nz)=\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}=\frac{e^{inz}}{2}+\frac{1}{2e^{inz}}$ e, assim, devem efetuar a decomposição $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{e^{inz}}{2}+\frac{1}{2e^{inz}})$. Por outro lado, o comportamento da referida expressão poderá ser relacionado com o comportamento da série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$.

Situação de ação. O apelo preliminar deverá ser apoiado nas construções dinâmicas que exibimos nas Figuras 6 e 7. Com efeito, visualizamos uma faixa (em 2D), na cor amarela. Outrossim, existe um ponto complexo móvel (na cor verde, Figura 7). Por outro lado, ao lado esquerdo, proporcionamos ao estudante uma apreciação do comportamento numérico da sequência de números reais $x_n=\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ e da série geométrica correspondente $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}1$.

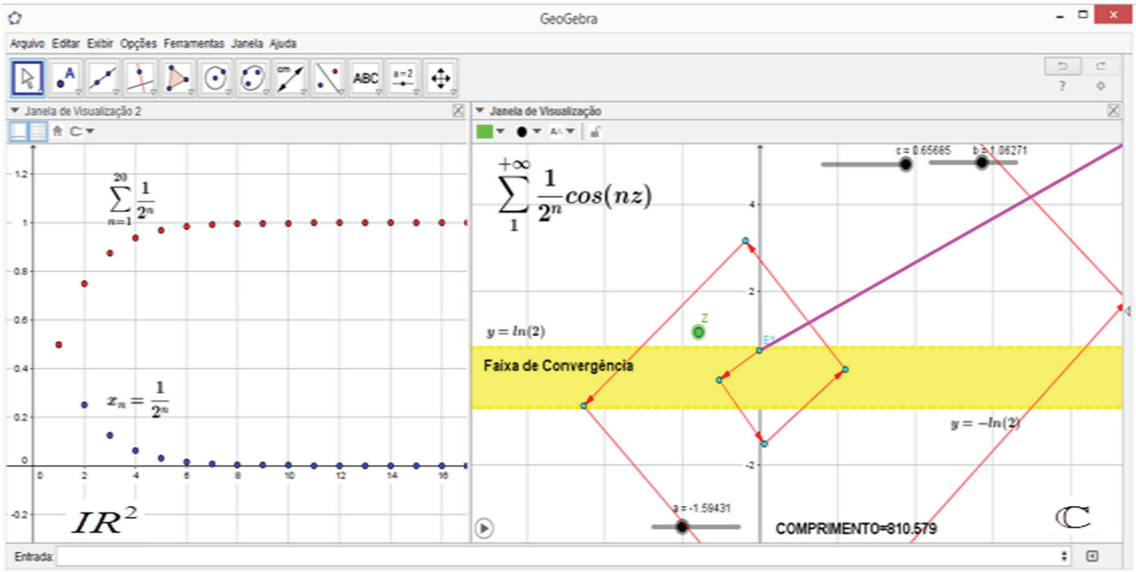
Figura 6 – Com o uso do *software Geogebra*, visualizamos o caráter de convergência de séries de potências numa “faixa” de cor amarela no plano.



Fonte: o autor.

Assim, ao lado esquerdo, na Figura 6, constatamos que o comportamento das contribuições numéricas de $x_n=\frac{1}{2^n}$ para $1\le n\le 20$ tende a decrescer e, no infinito, seu comportamento tende, “aparentemente”, a zerar. Ademais, quando os estudantes considerarem a série de números reais $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$, poderão relacioná-la com a série inicial $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz)=$. Por outro lado, quando realizarem uma exploração do respectivo comportamento, na fronteira (ver Figura 7) ou distante da faixa amarela (em 2D), devem perceber que o vetor resultante (na cor rosa) das reduzidas particulares tomadas nessa construção tende a aumentar, desordenadamente. Tal comportamento qualitativo deve estimular seu entendimento quando há divergência das correspondentes séries de potências.

Figura 7 – Com o uso do *software Geogebra*, visualizamos o caráter de divergência de uma série de potências no plano.



Fonte: o autor.

Situação de formulação. Segundo Almouloud (2007, p.38), uma das características dessa fase reside em "criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas". Reparemos, assim, que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{e^{inz}}{2}+\frac{1}{2e^{inz}}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}e^{inz}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}e^{-inz}$. Assim, poderão escrever ainda que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n$. A partir dessa constatação, deverão efetuar uma análise individual do comportamento de cada série de potências. Ora, no tocante ao procedimento de análise da expressão $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n$, quando comparada ao comportamento da série geométrica, devem identificar a condição $\left|\frac{e^{iz}}{2}\right|<1 \leftrightarrow \frac{\left|e^{i(x+iy)}\right|}{2}<1 \therefore e^{-y}=\left|e^{-y+ix}\right|<2$. Ou seja, determinam a região do plano complexo $e^{-y}<2 \leftrightarrow y>-\ln(2)$. E, pelo mesmo motivo, no caso da parcela $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n$, os estudantes deverão encontrar a condição de convergência, dando conta que $\left|\frac{e^{-iz}}{2}\right|<1$ e, decorrerá ainda que $e^{y}<2 \leftrightarrow y<\ln(2)$.

Situação de validação. Finalmente, a partir da constatação da convergência da série de potências anterior, restará aos estudantes verificar que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz) =$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{e^{iz}}{2}}{1-\frac{e^{iz}}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2e^{iz}}}{1-\frac{1}{2e^{iz}}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{2-e^{iz}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-iz}}{2-e^{-iz}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{iz}-1+2e^{-iz}-1}{4-2e^{iz}-2e^{-iz}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(e^{iz}+e^{-iz})-2}{5-2(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cos(z)-2}{5-4\cos(z)}=\frac{2\cos(z)-1}{5-4\cos(z)}\ ,|y|<,\ln(2)$$

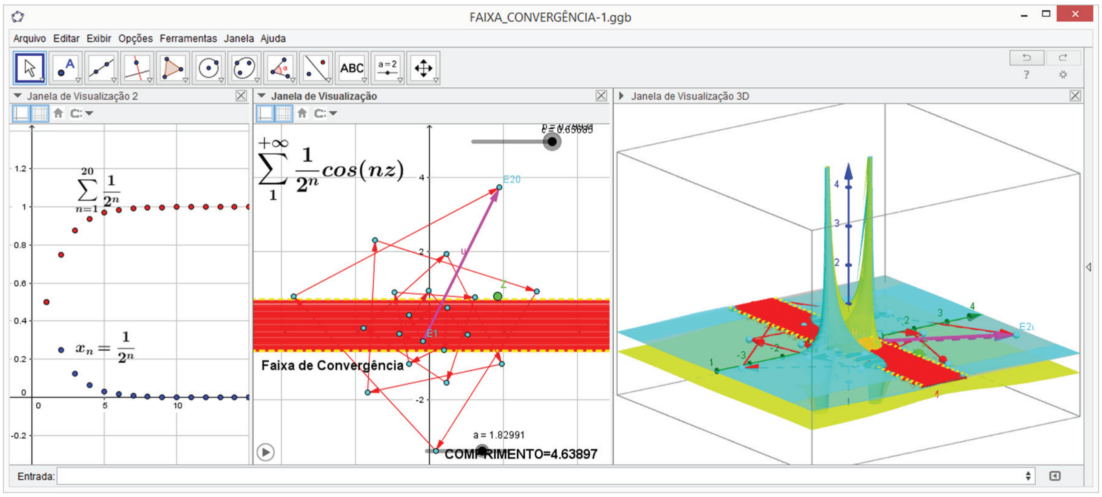
Assim, para responder ao questionamento anterior, os alunos deverão tomar a função $f(z)=\frac{2\cos(z)-1}{5-4\cos(z)}$, na região $z=x+iy,|y|<\ln(2)$. Nessa região, deveremos garantir a boa definição da função anterior. Assim, com o uso, numa perspectiva de complementaridade do *CAS Maple*, podemos fornecer aos estudantes a seguinte decomposição da função anterior $f(z)=\frac{2\cos(z)-1}{5-4\cos(z)}=u(z)+iv(z)=\mathrm{u}(x,y)+\mathrm{iv}(x,y)$ e, nesse caso, suas partes real e imaginárias devem ser indicadas por:

$$u(x,y) = \frac{(2\cos(x)\cosh(y)-1)(5-4\cos(x)\cosh(y))}{(5-4\cos(x)\cosh(y)^2+16sen(x)^2 senh(y)^2)} - \frac{8sen(x)^2 senh(y)^2}{(5-4\cos(x)\cosh(y)^2+16sen(x)^2 senh(y)^2)}$$

$$v(x,y) = -\frac{sen(x)senh(y)(5-4\cos(x)\cosh(y))}{(5-4\cos(x)\cosh(y)^2+16sen(x)^2 senh(y)^2)} - \frac{4(2\cos(x)\cosh(y)-1)sen(x)senh(y)}{(5-4\cos(x)\cosh(y)^2+16sen(x)^2 senh(y)^2)}$$

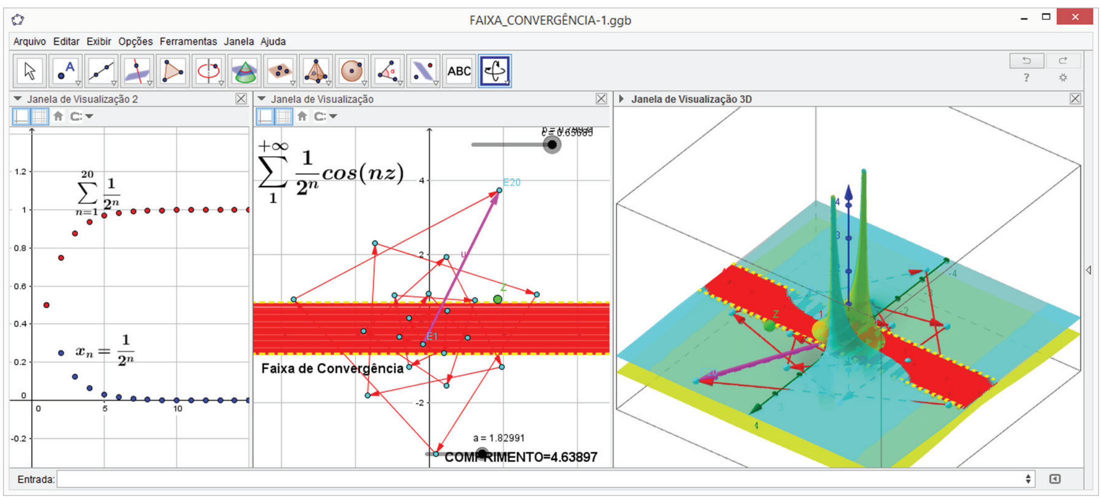
Logo em seguida, com o auxílio do *software GeoGebra*, poderemos proporcionar aos estudantes a exploração, de maneira concomitante, das três janelas de visualização! Em nossos trabalhos, temos referenciado um "cenário de aprendizagem" que proporciona/estimula o estudante na possibilidade de exploração de vieses particulares distintos e de modo concomitante. Com efeito, ao lado esquerdo, temos a visualização de seu quadro gráfico-numérico no espaço IR^2. Assim, as conjecturas sobre convergência/divergência estimulam o estudante na percepção de seu comportamento no plano (na coluna do meio). Por fim, todas as impressões devem resultar no entendimento das Figuras 8 e 9, ao lado direito, cujo comportamento pode ser observado no IR^3.

Figura 8 – Três janelas de visualização com recurso ao *software GeoGebra* e a identificação de uma faixa de definição (na cor vermelha) no espaço *IRxIRxIR.*



Fonte: o autor.

Figura 9 – Com o uso do *software Geogebra* visualizamos o caráter de convergência de uma série de potências (ALVES, 2012) no espaço *IRxIRxIR.*



Fonte: o autor.

Situação de institucionalização. Brousseau (1986, p.342) comenta que “a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]”. Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos (BOTTAZZINNI, 1986; GRAY, 2015; HAIRER; WANNER, 2008; MEDVEDEV, 1991) que determinaram sua aparição.

Desse modo, a ação do professor deverá depurar com o grupo uma síntese de todos os dados coligidos e aventados nas fases dialéticas anteriores. Vale recordar um momento de relativo antagonismo a ser enfrentado pelo *expert*. De fato, Margolinas (1995, p.342) recorda que as ações envolvendo a “devolução” designam “as ações do professor que visam encarregar os estudantes com responsabilidade de elaboração de estratégias de resolução para situações dadas”. Por outro lado, a mediação do professor deverá mostrar-se afetada pelo uso da tecnologia (ARTIGUE, 2003; 2009; 2012; 2013), de modo que, em cada fase correspondente anterior (ação, formulação, validação), que antecede o momento de institucionalização, deve ocorrer uma ação de devolução. Ou seja, em cada fase dialética anterior ocorrerá o reinvestimento da tarefa do estudante, por parte do professor, como garantidor de que a ação do grupo não fique restrita ao quadro analítico e adote a visualização como elemento facilitador e imprescindível em cada etapa de investigação (fato que auxilia para a apreciação de nossa questão de investigação).

Tal perspectiva deverá ser garantidora de que o aparato tecnológico não funcionará como simples apêndice ou acessório secundário no âmbito do ensino. Assim, o momento de antagonismo deve ocorrer na mediação final do professor, na medida em que “um conhecimento se revela verdadeiramente útil numa pequena instituição particular, e numa classe em que o professor poderá efetuar escolhas de revelação das relações do conhecimento com um saber científico de origem cultural e social” (MARGOLINAS, 1995, p.343).

Para concluir, recordamos que Brousseau fornece a indicação de elementos essenciais à *práxis* do professor, ao mencionar que é necessário “poder comparar, não apenas os resultados, mas também as condições nas quais eles foram obtidos e de modo que tais condições sejam reprodutíveis” (BROUSSEAU, 1986, p.3). Outrossim, o pesquisador esclarece a possibilidade de “reprodução” ou replicação no ensino de Matemática quando acrescenta ainda que

> Esta reprodutibilidade implica uma descrição, não ingênua, de todas as condições observadas, mas seletivas e que repousam sobre uma escolha pertinentes às variações possíveis de efeitos reconhecidos. A reprodutibilidade repousa, então, na compreensão dos fenômenos fundamentais, isto é do tecido de relações atestadas, constituindo a teoria e permitindo se escolher as condições de ensino, de explicar seus efeitos e de prevê-los. (BROUSSEAU, 1986, p.3)

Desse modo, a partir da perspectiva de Brousseau e o amparo científico proporcionado pela ED, aliada à metodologia de ensino TSD, defendemos que a descrição das situações anteriores são passiveis de aplicação, previsão e predição numa eventual etapa de experimentação (LABORDE, 1997, p.100).

Considerações finais

Abordamos a descrição das fases iniciais previstas por um *design* de investigação em Didática da Matemática que possibilita a obtenção de conhecimentos didáticos acerca de alguns conteúdos matemáticos, num contexto de transição que indicamos na Figura 1. Em nosso caso, recordamos que “o término da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para um população determinada de alunos” (DOUADY, 1995, p.62). Desse modo, apesar de circunscrevermos nossa discussão às duas etapas iniciais da ED, o aparato teórico-conceitual aqui descrito poderá ser testado/aplicado numa eventual etapa da experimentação.

Não podemos perder de vista as considerações de Laborde (1997, p.103) ao mencionar que a validação da ED consiste em “comparar os resultados de duas modelizações diferentes para o mesmo objeto". Dessa forma, com a origem em uma mediação metodológica afetada pelo uso da tecnologia, como evidenciamos nas situações didáticas aqui discutidas, sugerimos seu confrontamento com outras mediações, que detenham objetivos de um ensino ortodoxo acadêmico que insiste em envidar esforços didáticos apenas nos momentos da institucionalização dos saberes científicos.

Por outra via, a partir de algumas considerações com os *softwares* que exigem um determinado empenho metodológico do professor, temos a possibilidade de mobilizar conhecimentos produzidos a partir de uma dialética instalada por um grupo de alunos a respectivas relações e interações entre o professor e o conhecimento matemático científico. Nesse sentido, assumimos posição concorde com Rogalski (1990, p.7), quando prediz um rol de objetivos para o ensino de Matemática, entre eles: acostumar a classe com técnicas e problemas, o desconhecido; permitir instalar uma investigação sobre um problema; habituar a mudança de pontos de vista sobre os problemas.

Os elementos indicados por Rogalski (1990) devem concorrer para a obtenção de respostas, ao menos provisórias, para a nossa questão de investigação. E, do ponto de vista de alguns dos nossos escritos, temos acentuado o caráter de relevância da atividade conjectural dos aprendentes, tendo em vista que, por intermédio da visualização e percepção de propriedades, possibilitamos a mobilização de um conhecimento tácito e local, de cunho intuitivo e com o estímulo heurístico (SCHOENFELD, 1985, p.22) para a abordagem de situações didáticas.

Referências

ALMOULOUD, Ag Saddo. *Fundamentos da didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Francisco. R. V. *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis* (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011. 339f.

ALVES, Francisco R. V. INSIGHT: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. *VYDIA Educação*, 32(2), 149-148, 2012.

ALVES, Francisco R. V. Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: The use of GeoGebra and the CAS Maple. *Acta Didactica Naposcencia*. 6(4), 2013.

ALVES, Francisco R. V. Engenharia didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 7(3), 148-168, 2014a.

ALVES, Francisco R. V. Técnica computacional para o ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – CT^2M. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 5(2), 1-9, 2014b.

ALVES, Francisco R. V. Aplicações no ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 3(2), 2014c.

ALVES, Francisco R. V. Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania*. 4(1), 1-10, 2014d.

ALVES, Francisco R. V. Visualização de Teoremas em Análise Complexa: exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo TCC. *Revista Sinergia – IFSP*, 16(1), 65-76, 2015.

ALVES, Francisco R. V.; BORGES NETO, H. Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 598-625, 2011.

ALVES, Francisco R. V; BORGES NETO, H.; ALVES DIAS, M. Implicações e aplicações da Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 5(1), 54-84, 2012.

ARSLAN, S.; LABORDE, C. Un outil favorisant l'interaction entre cadres: CABRI Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. LAGRANGE, J. B. et al. (Eds.). *Recherche Didactiques de Mathematiques*. Jun 2003, Reims, France, 1-10, 2003.

ARSLAN, S. *L´approche qualitative des équations differentielles en classe terminal´s: est-elle viable? Quels sont les enjeux et les consequences?* (these en didactiques de mathématiques). Grenoble: Université Josephe Fourier, 2005.

ARTIGUE, M. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. Les *Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques*, 8(1), 1-38, 1984.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiques. Brun, J. (Org.). *Didactiques de Mathématiques*, 243-264. LAGRANGE J. B. et al. (Eds.). Jun 2003, Reims, France. 1996.

ARTIGUE, M. Michèle. Ingénierie didactique. BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*. Paris: Délachaux et Niestle, 243-263, 1995.

ARTIGUE, M. Épistémologie et Didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, v.10, n.2, 241-286, 1990.

ARTIGUE, M. Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de La Asociación Venezolana*, v.X, n.2, 117-134, 2003.

ARTIGUE, M. Didactical design in Mathematics Education. Carl Winslow (Eds.). *NORMA08*, Copenhagen: Sense Publishers, Denmark, 7-16, 2009.

ARTIGUE, M. L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 3(3), 1-18, 2012.

ARTIGUE, M. L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(1), 1-15, 2013.

BLOCH, I. *Quelques apports de la Theorie des Situations a la didactique des Mathematiques dans l´enseignement secondaire et superieure* (habilitation de recherché). Aquitaine: IUFM, 2006.

BOSCHET, Françoise; ROBERT, Aline. Ingénierie didactiques sur les suítes numeriques après le baccallauréat. *Publications Mathématiques et Informatiques des Rennes*, nº 2, 1-26, 1983.

BOTTAZZINI, Umberto. *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag, 1986.

BRIDOUX, Stephanie. *Enseignement des premieres notions de topologie à L´Université*. (Thése de doctorat). Paris: Paris VII, 2012.

BROUSSEAU, Guy. *Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage, 5-66, 1994.

BROUSSEAU, Guy. Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q*. Montréal, 1988, 14-24, 1988.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7(2), 33-115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. BROUSSEAU, G. (Org.). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, 115-160, 1998.

BRUM, Wanderley, P.; SCHUHMACHER, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 6(2), 60-84, 2013.

CECÍLIA, S. F.; BERNADEZ, N. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

CHAVEZ, E. *Teaching Complex Numbers in High School*. (Dissertation in Natural Sciences). Louisiana: Louisiana State University. 66f, 2014.

CHEVALLARD. Yves. *La transposition didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition. 1991.

CHOQUET, G. *What is modern mathematics?* England: Educational Explorers Limited, 1963.

CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*. Second Edition. New York: Springer Verlag, 1978.

DANENHOWER, P. *Teaching and learning complex analysis in at two British Columbia Universities*. (Doctoral thesis). Canadá: Simon Fraser University. 308f., 2000.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (Org.). *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1-7, 1995a.

DOUADY, Régine. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. GOMEZ, P. (Org.). *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 61-97, 1995b.

DOUADY, Régine. Géométrie, graphiques, fonctions au collège. *Revista Eletrónica de investigación en educación e ciencias*, n.1, 1-7, 2008.

GRAY, Jeremy. *The Real and the Complex: A history of analysis in the 19th Century*, New York: Springer, 2015.

HOUDEBINE, Jean. La representation d´une situation-problème point de vue didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathematiques*, n.6, 1-23, 1991.

KRANTZ, S. G. *Complex Analysis: The geometric view*. New York: American Mathematical Society, 1990.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, 10(1), 97-112, 1997.

LINS NETO, Alcides. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LEBL, Jiri. *Introduction to Real Analysis*. San Francisco: Springer, 2011.

LEDERMANN, Walter. *Complex Number*. The Free Press, 1960.

MARGOLINAS, C.; DRIJVEERS, P. Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*, 47, p.893-903, 2015.

MARGOLINAS, C. Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27(3), p.343-360, 2005.

NEEDHAM, T. *Visual complex analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

PERRIN-GLORIAN, M. J. *Aires des surfaces planes et nombre decimaux, question didactiques liées aux élèves en dificulte au niveux CM-6*. (Thése de doctorat d´Etat), Didactiques des Mathématiques, Paris: Université Paris VII, 1992, 555f.

POLYA, G.; LATTA, G. *Complex variables*. Nova York: John Willey and Sons, 1974.

ROBERT, Aline. Ingenierie didactique sur les suítes numériques après le baccalauréat. *Cahiers blancs de Didactiques de Mathematiques*, n.4, 1-33, 1984.

ROGALSKI, Marc. Enseigner des Méthodes des Mathematiques. *Recherche em Didactiques des Mathématiques*, n.1, 1-10, 1990.

TASCHNER, Rudolf, *The continuum:* a constructive approach to basic concepts and real analysis. Viena: Vieweg & Sohn Verlag, 2005.

SCHOENFELD, Alan. H. *Mathematical problem solving*. London: Academic Press Inc, 1985.

STAHL, Saul. *Real analysis:* An historical approach. New York: John Willey and Sons, 1999.

Francisco Regis Vieira Alves – Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática em nível superior. Docente do departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE) e coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM). E-mail: fregis@ifce.edu.br