CONHECIMENTOS DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO A RESPEITO DO CONCEITO DE RAIZ QUADRADA

9th Grade high school students knowledge regarding square root concept

Veridiana Rezende
Rozély Xavier Rosa

Resumo

Apresentamos neste trabalho os resultados de uma pesquisa realizada com 28 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do estado do Paraná. Para a realização da investigação, tivemos como objetivo principal identificar conhecimentos relacionados ao conceito de raiz quadrada, manifestados pelos sujeitos colaboradores da pesquisa. Os dados foram coletados pela professora regente da turma em horário convencional de sala de aula, e os alunos resolveram individualmente tarefas matemáticas, previamente elaboradas pelas pesquisadoras. A estruturação das tarefas, bem como as análises da pesquisa tiveram como respaldo a teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, que defende que a compreensão de um conceito ocorre na ação dos sujeitos e conforme as situações que eles vivenciam. As análises foram realizadas por agrupamento de respostas matematicamente correspondentes, com atenção especial aos conhecimentos falsos manifestados nas respostas dos sujeitos. Sempre que possível, os conhecimentos falsos manifestados pelos alunos foram modelados na forma de teoremas em ação, categoria de conhecimentos implícitos possíveis de serem manifestados pelos sujeitos, conforme definida por Vergnaud. Os resultados apontam incompreensões dos alunos a respeito do conceito de raiz quadrada, principalmente em relação às operações de adição e subtração entre radicais.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Campo Conceitual. Teorema em ação.

Abstract

It is presented in this paper the results of a survey done with 28 9^{th} grade high school students from a public school in the countryside of Paraná State. During the performance of the investigation we had as main goal the identification of knowledge related to the square root concept expressed by the subjects of the survey. The data was collected by the teacher in charge of the class during school time and also individually the students solved some math tasks created by the researchers. The structure of the tasks and the survey analysis were supported by the Conceptual Field Theory of Gérard Vergnaud who defends that the comprehension of a concept occurs in the action of the subjects and according to the situation they experience. The analyses were done by grouping the corresponding answer mathematically having special attention to the false knowledge expressed in the answers of the subjects. Whenever possible the false knowledge expressed by the students was shaped as theorem into action, category of implicit knowledge possible to be expressed by the subjects as defined by Vergnaud. The results show students lack of comprehension regarding square root, mainly about addition and subtraction operations between radicals.

Keywords: Mathematics teaching. Conceptual Field. Theorem into action.

Introdução

Apresentamos neste texto uma investigação relacionada aos conhecimentos de raiz quadrada, manifestados por alunos 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do estado do Paraná. Os resultados apresentados são decorrentes de uma pesquisa que se iniciou com o trabalho de iniciação científica e prosseguiu com o trabalho de conclusão de curso da primeira autora, sob orientação da segunda autora.

Observamos que o conceito de raiz quadrada é essencial para a compreensão de diversos outros conceitos matemáticos estudados durante o processo escolar, tais como: equações, inequações, funções, alturas de triângulos, pirâmides, trapézios, irracionais algébricos[1], lados de quadrados cuja área não se trata de um número quadrado perfeito, entre outros. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para a disciplina de Matemática (BRASIL, 1998) indicam que o conceito de raiz quadrada dever ser estudado a partir do 6° ano do Ensino Fundamental, e complementado nos anos seguintes da escolarização.

No entanto, na pesquisa realizada por Rezende (2013), embora tenha como foco os números irracionais, é perceptível, em vários momentos das análises, a incompreensão do conceito de raiz quadrada por alunos brasileiros e franceses, da Educação Básica e do Ensino Superior. Em uma das tarefas propostas pela pesquisadora, que questionava sobre a existência ou não de um quadrado de medida de área 13 cm^2, dentre os 14 alunos do Ensino Fundamental e *Collège* entrevistados, 11 alunos alegaram que não existe um quadrado de medida de área 13 cm^2 porque não existe um número cujo quadrado resulta em 13, conforme ilustra a fala do aluno francês C4: *não... Porque não existe 13 na tábua de multiplicação... Nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo resulte em 13.* Falas como esta mostram a dificuldade dos alunos em compreender a existência de um número que é solução da equação do segundo grau $x^2 = 13$, bem como de se identificar $\sqrt{13}$ cm com a medida do lado do quadrado de área 13 cm^2.

Desse modo, nos motivamos a investigar conhecimentos de alunos da Educação Básica em relação ao conceito de raiz quadrada, com o olhar especificamente voltado para as operações básicas de soma, adição, subtração, divisão e potenciação, envolvendo raiz quadrada.

Para este estudo, nos fundamentamos na teoria dos campos conceituais do pesquisador e professor francês Gérard Vergnaud (2007), que dedicou parte de seus estudos ao ensino e aprendizagem de Matemática. Este pesquisador defende que a aprendizagem de um conceito ocorre ao longo da escolarização, e conforme o aluno vivencia diversas situações relacionada ao mesmo conceito. Afinal "[...] não é possível contornar a questão teórica do papel da experiência, pois é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações as quais ele deve se adaptar" (VERGNAUD, 2007, p.13).

Além disso, Vergnaud (1990) defende que para a compreensão de um conceito são necessários vários outros conceitos, propriedades, símbolos, representações, situações interligados no que o pesquisador denomina por campo conceitual. Por exemplo, o campo conceitual da raiz quadrada envolve uma vasta quantidade de conceitos matemáticos e situações cuja relação não pode ser esgotada. Apenas para ilustrar, citamos que o campo conceitual da raiz quadrada envolve as quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), a potenciação, a fatoração, as equações polinomiais, as funções, as figuras geométricas, as diferentes representações para a raiz quadrada, tais como as representações algébrica ($y = \sqrt{x}$, $y = (x)^{1/2}$, $y^2 = x$), numérica, gráfica, geométrica, etc.

Outro conceito chave na teoria dos campos conceituais, e que utilizamos nesta pesquisa, é o de teorema em ação, que se trata de conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos. Vergnaud (2007) defende que dificilmente os sujeitos explicitam com palavras todos os seus conhecimentos, muitos deles permanecem implícitos. Na perspectiva de Vergnaud, os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falso. Nesta pesquisa, demos atenção especial aos teoremas em ação falsos manifestados nas respostas dos sujeitos da pesquisa, pois, segundo Vergnaud

[1] Um número irracional é denominado de irracional algébrico quando é solução de alguma equação polinomial. Como exemplo de irracional algébrico citamos $\sqrt{2}$, que é solução da equação polinomial $x^2 - 2 = 0$.

(2007), um dos modos de se adquirir a compreensão de um conceito matemático é por meio da desestabilização destes teoremas em ação falsos manifestados nas respostas dos alunos.

Assim, justificamos a relevância da presente pesquisa que teve por objetivo investigar os possíveis teoremas em ação falsos, mobilizados por alunos de 1º ano do Ensino Médio, mediante resolução de tarefas matemáticas relacionadas à operações elementares (soma, subtração, produto, quociente, potência) envolvendo raiz quadrada. Seis meses após a primeira coleta de dados, relacionada aos conhecimentos dos alunos, elaboramos duas tarefas que foram implementadas aos mesmos alunos com a intenção de proporcionar uma possível desestabilização, mesmo que local, dos teoremas em ação falsos manifestados nas respostas dos alunos.

O conceito de raiz quadrada no currículo da educação básica brasileira

No sistema de ensino brasileiro, os documentos que norteiam o ensino de cada disciplina são denominados de Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN. Estes documentos consistem dos conteúdos disciplinares a serem estudados em cada ano escolar, além de apontarem direcionamentos e metodologias para os professores as utilizarem em sala de aula.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para a disciplina de Matemática (BRASIL, 1998), o conteúdo *raiz quadrada* deve ser ensinado oficialmente a partir do terceiro ciclo do Ensino Fundamental, que corresponde aos sexto e sétimo anos deste nível de ensino. Neste ciclo, os conteúdos são apresentados em quatro blocos: números e operações, espaço e formas, grandezas e medidas, tratamento da informação. Nos PCN (BRASIL, 1998), o conceito de raiz quadrada faz parte do bloco de conteúdos números e operações, sendo que o terceiro ciclo deve propiciar aos alunos a:

> [...] Compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado. Cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas e fazendo uso de calculadoras (BRASIL, 1998, p.72).

O conceito de raiz quadrada também é mencionado pelos PCN para ser estudado no quarto ciclo do Ensino Fundamental, que corresponde aos 8° e 9° anos, juntamente com os números irracionais. Para este momento de ensino, os PCN sugerem que o aluno "[...] conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso" (BRASIL,1998. p.83).

Ainda se relacionado aos números irracionais, os PCN indicam que:

> [...] O estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número 2. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de 2, por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, 3, 5 etc., poderia seguir-se ao caso particular de 2 (BRASIL, 1998, p.106).

Além disso, para os 8º e 9º anos estes documentos mencionam o estudo específico de *radiciação* e operações com raiz quadrada, esclarecendo que:

> O conceito de radiciação está associado ao conceito de potenciação e pode ser introduzido por problemas como o da determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado. Por exemplo, a resolução de um problema que solicite a construção de um quadrado que tenha mesma área de um retângulo com as dimensões 4 e 5 é oportuna para que

> se discutam algumas questões relacionadas à radiciação e à ampliação do sentido numérico. Esse problema poderá ser resolvido pela equação $x^2 = 20$. Nesse caso, aceita-se $x = \sqrt{20}$, abandonando a outra raiz, que é $x = -\sqrt{20}$, pois x representa a medida de um lado do quadrado. O aluno no terceiro ciclo, que provavelmente não conhece a existência dos irracionais, poderá encontrar a solução desse problema, utilizando a calculadora para obter um resultado aproximado. Para ampliar a compreensão sobre o conceito de raiz quadrada, é interessante que os alunos façam estimativas antes de obter a raiz utilizando a calculadora (BRASIL, 1998, p.113-114).

Notamos que durante o processo escolar é possível identificar outros conceitos que necessitam explicita ou implicitamente do conceito de raiz quadrada. Como exemplo, citamos a raiz quadrada relacionada ao teorema de Pitágoras, cálculo das áreas de figuras planas, equações e inequações de grau maior ou igual a dois, alturas de triângulos, pirâmides, trapézios, números irracionais, dentre outros.

Assim, considerando que a raiz quadrada deve ser estudada a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, e que seu estudo deve, de acordo com os documentos curriculares nacionais, se aprimorar ao longo do Ensino Fundamental, optamos por desenvolver uma pesquisa com o objetivo de investigar os conhecimentos de alunos, que cursavam o primeiro ano do Ensino Médio, de um colégio público do interior do Paraná, no que se refere às operações sobre raiz quadrada: adição, subtração, multiplicação e divisão. Nossa pesquisa foi fundamentada na teoria dos campos conceituais, conforme descrito a seguir.

A teoria dos campos conceituais e o conceito de raiz quadrada

A teoria dos campos conceituais nos forneceu alicerce para compreender os conhecimentos manifestados pelos alunos colaboradores desta pesquisa, principalmente os conhecimentos equivocados manifestados por eles, bem como para percebermos a necessidade de se estudar um conceito por meio de um campo conceitual, conforme definido por Vergnaud, como sendo:

> [...] ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2007, p.29).

Sendo assim, notamos que a teoria dos campos conceituais aponta para a necessidade de entendimento de vários conceitos para a compreensão de um único conceito. Na matemática, além de conceitos, existem símbolos, teoremas, propriedades e várias representações necessários para a compreensão dos objetos matemáticos. Por exemplo, a compreensão do conceito de raiz quadrada está relacionada com a compreensão das operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), potenciação, fatoração, números reais, função, equação do segundo grau, entre outros. Além disso, sua representação pode se dar de variadas formas algébricas $y = \sqrt{x}$, $y = (x)^{1/2}$, $y^2 = x$; na representação gráfica, representação numérica, representação geométrica ou língua natural (português).

Além disso, Vergnaud (1993) defende que um conceito não pode ser reduzido à sua definição, isso não significa que devemos minimizar a importância de se definir um conceito aos alunos, mas que apenas apresentar a definição de raiz quadrada, por exemplo, não é suficiente para que eles se apropriem desse conceito.

Para o referido pesquisador, conhecimento é uma questão de adaptação, afinal aprendemos e desenvolvemos em qualquer idade. Aprender é mais do que simplesmente ouvir, estar presente em uma sala de aula ou fazer exercícios repetitivos. Segundo Vergnaud (2007), para se ter uma boa aprendizagem, é preciso vivenciar diferentes situações, pois

> [...] não é possível contornar a questão teórica do papel da experiência, pois é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações

> as quais ele deve se adaptar seja uma experiência cotidiana ou uma experiência profissional (VERGNAUD, 2007, p.13).

Assim, ao estudarmos o conceito de raiz quadrada por meio de um campo conceitual, notamos que é preciso compreender diversas definições, conceitos, símbolos, esquemas, teoremas, além de vivenciar diversas situações presentes no campo conceitual da raiz quadrada.

Vergnaud (2003) atribui muita importância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas competências dos sujeitos, as que estão relacionadas aos conhecimentos implícitos. Segundo o pesquisador, não é apenas a resolução de um problema realizada pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo como eles resolvem e, principalmente, os conhecimentos implícitos manifestados pelos sujeitos ao resolver um problema. Segundo Rezende (2013),

> [...] os conhecimentos na forma explícita dos alunos podem ser dados na linguagem oral, escrita, diagramas etc, e por isso, geralmente, não é difícil percebê-los. No entanto, os conhecimentos implícitos nem sempre são possíveis de serem identificados, e demandam atenção e investigação por parte dos professores e pesquisadores, pois muitas vezes o aluno é questionado sobre o que o levou a escolher a operação correta e ele não sabe explicitar o motivo. Por exemplo, muitos alunos resolvem uma conta de divisão e manipulam o algoritmo e as regras corretamente, porém não sabem explicitar os conceitos e regras mobilizados (p.67).

Os conhecimentos que um sujeito dispõe, na ação, para resolver determinada situação, são denominados por Vergnaud de invariantes operatórios. Eles podem ser universais ou apenas localmente verdadeiros. Estes conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não.

De acordo com Vergnaud (2009), os invariantes operatórios são modelos preciosos para se descrever a conduta do sujeito, e são diferenciados em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação: "Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação" (VERGNAUD, 2009, p.23). Os conceitos em ação e os teoremas em ação são de naturezas distintas. Os primeiros não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, eles apenas são pertinentes ou não para a situação. Já os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos.

Vergnaud (1990) ressalta que os teoremas em ação não são verdadeiros teoremas matemáticos, e nem conceitos em ação são conceitos reconhecidos cientificamente. Eles são categorias de pensamento construídas pelos sujeitos na ação e nem sempre são explicitáveis por eles.

Para Vergnaud (2007, p.23), "um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação". O pesquisador defende que "[...] dificilmente os sujeitos explicitam com palavras todos os seus conhecimentos, muitos deles permanecem implícitos" (p.13). Assim, "os teoremas-em-ação são definidos como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou sequência de operações, para resolver um problema" (VERGNAUD, 2007, p.16).

Aproveitando o exemplo citado anteriormente retirado da pesquisa de Rezende (2013), juntamente com as análises da pesquisadora, podemos dizer que quando um aluno nega a existência de um quadrado de medida de área $x^2 = 13$, dois teoremas em ação podem falsos podem estar implícitos nas respostas dos alunos, *Seja* $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ *existe se e somente se a é quadrado perfeito*; *Se* $p \in R_+$ *não é quadrado perfeito então não existe* $x \in R$ *tal que* $x^2 = p$. Ressaltamos que estes dois teoremas em ação falsos, bem como tarefas relacionadas a medidas de áreas e lados de figuras geométricas, como exemplo o quadrado, se fazem presentes no campo conceitual das raízes quadradas.

Outro princípio da teoria dos campos conceituais consiste em propor situações possíveis de desestabilizar os conhecimentos falsos dos alunos, e propor situações que possibilitem o desenvolvimento de esquemas (VERGNAUD, 2003).

De acordo com Vergnaud (2003), o conhecimento se adapta e se desenvolve com o tempo e em função das situações que o sujeito enfrenta, sendo reelaborado a cada nova situação enfrentada. Ao se deparar com situações novas, os sujeitos mobilizam seus conhecimentos prévios, os reformulam e tentam adaptá-los à nova situação. Conhecer novas situações conduz a ampliar os conhecimentos presentes no dado campo conceitual.

Desse modo, além de investigarmos, num primeiro momento, os conhecimentos falsos manifestados nas respostas dos alunos, que foram modelados na forma de teoremas em ação, num segundo momentos, para os mesmos alunos, duas tarefas matemáticas foram implementadas e elas tiveram a intenção de proporcionar momentos de desequilíbrios, reflexão e hesitação, de modo a oportunizar a desestabilização, pelo menos local dos teoremas em ação falsos, manifestados pelos alunos, sujeitos da pesquisa.

Para o presente trabalho, atribuímos atenção especial aos teoremas em ação falsos mobilizados pelos sujeitos da pesquisa, pois consideramos importante divulgá-los, para que professores possam dar atenção aos erros de seus alunos e lançar situações que possam favorecer a desestabilização dos erros e, por consequência, proporcionar a aprendizagem dos alunos.

Desenvolvimento e análises da pesquisa

Inicialmente elaboramos cinco tarefas sobre o conceito de raiz quadrada que foram aplicadas para 28 alunos do 1° ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Paraná. As tarefas foram elaboradas pelas autoras deste trabalho, e aplicadas pela professora regente da turma, em horário de aula convencional, no mês de abril de 2013. Os alunos registraram individualmente suas respostas em cada tarefa.

Para este trabalho, apresentamos as análises de quatro tarefas, dentre as cinco elaboradas, por considerar que não influenciaria na apresentação e compreensão dos resultados obtidos. As três primeiras tarefas foram elaboras com o intuito de analisarmos os conhecimentos dos alunos relacionados às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com radicais. As duas últimas tarefas tinham como finalidade extrair explicações escritas dos alunos em relação ao que eles compreendiam do conceito de raiz quadrada.

Para as análises, selecionamos as respostas semelhantes e separamos por casos, que consideramos como agrupamento de respostas matemáticas semelhantes. Sempre que possível, modelamos as respostas dos alunos na forma de teoremas em ação falsos.

A tarefa 1 solicitava que os alunos simplificassem o máximo as possível as seguintes operações com radicais: $\sqrt{6} + \sqrt{30}$; $\sqrt{15} - \sqrt{40}$; $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}}$; $(2\sqrt{5})^2$ e $\sqrt{27^3}$.

O quadro 1 apresenta o resumo dos grupos de respostas e possíveis teoremas em ação mobilizados nas respostas dos alunos.

Quadro 1 – resumo das análises das respostas dos alunos correspondente a tarefa 1

Análise das operações $\sqrt{6} + \sqrt{30}$ e $\sqrt{15} - \sqrt{40}$
Caso 1: Seis (06) alunos resolveram a operação com o auxílio da calculadora apresentando valor aproximado como resposta. Exemplo de resposta dos alunos: $\sqrt{6} + \sqrt{30} = 2{,}4 + 5{,}4 = 7{,}8$ Possíveis teoremas em ação falsos implícitos na reposta desses alunos: TAF1: Se a $\in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ pode ter finitas casas decimais. TAF2: Se a $\in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ é o número decimal exibido pelo visor da calculadora.
Caso 2: Dezoito (18) alunos resolveram a operação de modo incorreto. Exemplo de resposta dos alunos: $\sqrt{6+30} = \sqrt{36}$; $\sqrt{15-40} = \sqrt{-25}$. Possíveis teoremas em ação falsos implícitos nas repostas dos alunos: TAF3: Se a e b $\in R_+$ então $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. TAF4: Se a e b $\in R_+$ então $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$.
Caso 3: Dois (02) alunos não resolveram a operação, deixando em branco.
Caso 4: Dois (02) alunos realizaram outros tipos de erros.
Análise das operações $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}}$
Caso 1: cinco (5) alunos resolveram a operação com o auxílio da calculadora apresentando valor aproximado como resposta, e um (1) desse alunos admitiu somente o valor de uma das raízes. Exemplo de resposta dos alunos: $\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 2{,}4 \times 1{,}73 = 4{,}15$; $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}} = \frac{7{,}74}{1{,}73}$ Possíveis teoremas em ação falsos implícitos na reposta dos alunos: TAF1: Se a $\in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ pode ter finitas casas decimais. TAF2: Se a $\in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ é o número decimal exibido pelo visor da calculadora.
Caso 2: quinze (15) alunos resolveram a operação corretamente. Exemplo de resposta dos alunos: $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}} = \sqrt{20}$; $\sqrt{6} \times \sqrt{3} = \sqrt{18}$ Teoremas em ação verdadeiros implícitos na resposta dos alunos: TAV1: Se a e b $\in R_+$, então $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ TAV2: Se a e b $\in R_+$, então $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
Caso 3: quatro (04) alunos não resolveram a operação, deixando em branco.
Caso 4: quatro (04) alunos realizaram outros tipos de erros.

A análise da pesquisa indica principalmente dois conhecimentos equivocados manifestados nas respostas dos sujeitos – o primeiro diz respeito a decimalização de números irracionais, que pode ser proporcionada pelo uso da calculadora. Este conhecimento equivocado é manifestado quando os alunos registram, por exemplo, $\sqrt{6} + \sqrt{30} = 2{,}4 + 5{,}4 = 7{,}8$. Outro conhecimento equivocado é notado no momento em que os alunos utilizam-se das igualdades $\sqrt{6+30} = \sqrt{36}$ e $\sqrt{15-40} = \sqrt{-25}$.

Assim, notamos que os resultados no quadro 1 indicam a possibilidade de quatro teoremas em ação falsos relacionado ao conceito de raiz quadrada presente nas respostas dos alunos. Ressaltamos que os teoremas em ação falsos TAF1 e TAF2, relacionados à decimalização de números irracionais e ao uso da calculadora respectivamente, também foram identificados nas respostas dos sujeitos da pesquisa de Rezende (2013), ou seja, trata-se de um conhecimento falso relacionado ao uso da calculadora e números irracionais que merece atenção por parte dos professores para colaborar com a desestabilização destes erros cometidos pelos alunos.

Um fato indicado nas respostas dos alunos, e que consideramos importante destacar, é que os alunos utilizam-se do conhecimento verdadeiro de radiciação relacionado às operações de multiplicação e divisão, e transpõem este conhecimento para as operações de adição e subtração. Isto é, a análise das respostas dos alunos indica que, para os sujeitos da pesquisa, se valem as operações $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ e $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, também valem as operações $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ e $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b}$, para a e b $\in R$, fato que não é verdadeiro. O fato de 18 alunos manifestaram este conhecimento equivocado, nos levou a modelar este conhecimento dos alunos na forma de teoremas em ação: TAF3: Se a e b $\in R_+$ então $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$; e TAF4: Se a e b $\in R_+$ então $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b}$.

Em relação às operações $(2\sqrt{5})^2$ e $\sqrt{27}^3$, a maioria dos alunos deixaram as respostas em branco, indicando que seus conhecimentos são insuficientes para resolver estas operações que envolvem raiz quadrada e potência.

A tarefa 2 questionava se é possível afirmar que a igualdade $\sqrt{(-2)^2} = (\sqrt{-2})^2$ é verdadeira, e solicitava que os alunos justificassem sua resposta. As análises das respostas dos alunos para esta tarefa, está apresentada no quadro 2.

Quadro 2 – resumo das análises das respostas dos alunos correspondente a tarefa 2.

Caso 1: quatro (4) alunos responderam de modo incorreto que a igualdade é verdadeira, justificando que as operações resultariam no mesmo valor. Exemplo de resposta dos alunos: sim, porque os dois têm o mesmo resultado.
Caso 2: seis (6) alunos responderam que a igualdade não é verdadeira. No entanto a justificativa para esta afirmação não foi apresentada de modo correto pelos alunos. Exemplo de resposta dos alunos: não, porque os sinais são diferentes.
Caso 3: dezoito (18) não responderam a questão, deixando a resposta em branco.

Notamos que a igualdade $\sqrt{(-2)^2} = (\sqrt{-2})^2$ não é verdadeira, pois a raiz quadrada não é definida para números negativos. Sendo assim, temos que por um lado vale a igualdade $\sqrt{(-2)^2} = 2$, mas por outro lado a expressão $(\sqrt{-2})^2$ não está definida para números reais negativos, justificando o fato que a igualdade $\sqrt{(-2)^2} = (\sqrt{-2})^2$ não é válida.

No entanto, nenhum dos 28 alunos do Ensino Médio que participaram da pesquisa justificaram corretamente a tarefa 2. De acordo com o quadro 2, percebemos que quatro alunos realizaram a operação inversa entre a raiz quadrada e a potenciação, contudo eles não levaram em conta o fato de que a raiz quadrada não é definida para números negativos. Seis alunos responderam que a igualdade não é verdadeira, porém suas justificativas não são corretas, como é o caso do aluno que respondeu que *a igualdade não é verdadeira porque os sinais são diferentes*.

Considerando estas respostas incorretas e o fato de que os 18 alunos deixaram a resposta em branco, podemos inferir a dificuldade que os alunos possuem com a interpretação e resolução de operações envolvendo potenciação e radiciação, principalmente quando envolve o sinal negativo.

A tarefa[2] 3 consistiu de uma contextualização elaborada com a intenção de perceber se os alunos reconhecem ou não o número $\sqrt{\pi}$ como um número real, conforme apresentada a seguir:

Tarefa 3: Kátia e Marcos estão prestando vestibular para ingressar na Universidade. Em determinado vestibular, eles se depararam com a seguinte questão: $\sqrt{\pi}$ é ou não um número real? Conversando sobre o vestibular, Kátia disse que tinha respondido que $\sqrt{\pi}$ é um número real e Marcos disse que $\sqrt{\pi}$ não é um número real. Para você, quem tem razão? Kátia ou Marcos? Justifique sua resposta.

[2] Dentre as cinco tarefas que fizeram parte do instrumento de pesquisa, apresentaremos neste texto os resultados de quatro tarefas: 1, 2, 4 e 5, por considerar que não influenciará na apresentação e compreensão dos resultados. No entanto, as tarefas foram reenumeradas, e serão apresentadas neste texto como sendo de 1 a 4.

Quadro 3 – resumo das análises das respostas da tarefa 3.

Caso 1: nove (9) alunos responderam que Kátia tem razão. Exemplo de resposta dos alunos: Kátia está certa porque $\sqrt{\pi}$ é um número real.
Caso 2: dezenove (19) alunos não responderam a questão, deixando em branco.

Os dados apresentados no quadro 3 nos mostram que dentre os vinte e oito (28) alunos, dezenove (19) não apresentaram nenhuma respostas a tarefa, o que nos leva a supor que os alunos não conhecem a natureza do número real $\sqrt{\pi}$. Além disso, considerando que π é um protótipo de número irracional, utilizado com certa frequência nas aulas de matemática e nos livros didáticos como exemplo típico de número irracional, o fato de 19 alunos deixarem em branco a tarefa 3 trata-se de um indicativo de que o fato de a raiz quadrada ser definida para todo número real positivo não tem sido levando em consideração pelos alunos.

A quarta e última tarefa também tratava-se de uma situação contextualizada e tinha a intenção de conhecer como os alunos interpretam o conceito de raiz quadrada:

Tarefa 4: Um extraterrestre, viajando em sua espaçonave precisou fazer um pouso forçado aqui na Terra. Ele pousou na casa de um menino que estudava raiz quadrada. O extraterrestre, que não conhece raiz quadrada, ficou curioso e pediu para o menino explicar o conteúdo que ele estava estudando. Se este menino fosse você, como você explicaria para o extraterrestre o que é o conceito de raiz quadrada?

Quadro 4 – Resumo das análises das respostas dos alunos referente à tarefa 4.

Caso 1: oito (8) alunos responderam a questão. Exemplo de resposta dos alunos: - A raiz quadrada é um número que multiplicando ele mesmo dá um valor; - A raiz quadrada é a que você usa para descobrir o valor mais é uma resposta aproximada da resposta; - É o número dividido por ele mesmo é por um dá o mesmo resultado; - Não se apegue, é muito difícil, volte pro seu planeta que é mais lucro.
Caso 2: vinte (20) alunos não responderam a questão, deixando em branco.

Em relação às respostas para esta tarefa observamos que a maioria dos alunos (vinte alunos) não responderam a questão. Os oitos alunos que responderam a esta atividade apresentaram explicações incorretas para o conceito de raiz quadrada, manifestando conhecimentos falsos relacionado, por exemplo, a aproximação de valores, conforme mostra a fala de um dos alunos: *A raiz quadrada é a que você usa para descobrir o valor mais é uma resposta aproximada da resposta*. Implicitamente, este aluno pode estar se referindo ao fato de teclar na calculadora a raiz quadrada de um número irracional e o valor considerado tratar-se de uma aproximação com apenas algumas casas decimais. Outras respostas deixam transparecer que os alunos não compreendem o conceito de raiz quadrada ou o consideram de difícil compreensão, como é o caso do aluno que diz: *Não se apegue, é muito difícil, volte pro seu planeta que é mais lucro*.

Considerações finais

Os resultados desta pesquisa mostram que embora o conceito de raiz quadrada seja estudado desde o sexto ano do Ensino Fundamental, e retomado em diversos momento da escolarização, alunos do 1º ano do Ensino Médio manifestam conhecimentos equivocados em relação a este conceito.

Nossas análises mostram que os principais conhecimentos errôneos manifestados pelos sujeitos desta pesquisa dizem respeito às operações de adição e subtração de radicais; em relação a identificar a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito com um número decimal, com finitas casas decimais mostradas no visor da calculadora; o não reconhecimento de que a raiz quadrada não está definida para números negativos; não identificar a existência da raiz quadrada de um número irracional como o número π, um protótipo de número irracional, e não saber explicar o conceito de raiz quadrada.

Considerando estes conhecimentos errôneos manifestados nas respostas dos sujeitos colaboradores da pesquisa, e considerando a frequência de respostas em cada um dos casos de erros mencionados, foi possível modelar as respostas dos alunos em quatro teoremas em ação falsos que se referem a conhecimentos implícitos nas respostas dos alunos: TAF1: Se $a \in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ pode ter finitas casas decimais; TAF2: Se $a \in R_+$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ é o número decimal exibido pelo visor da calculadora; TAF3: Se a e $b \in R_+$ então $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$; e TAF4: Se a e $b \in R_+$ então $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$, sendo que os TAF1 e TAF2 já foram indicados nas respostas dos sujeitos da pesquisa de Rezende (2013).

Contudo, notamos que o conceito de raiz quadrada e suas operações é essencial para a compreensão de diversos outros conceitos matemáticos estudados no decorrer dos anos escolares, tais como área de figuras planas, volumes de sólidos, elementos de figuras geométricas tais como altura de pirâmides e triângulos, equações e inequações, funções, números irracionais e reais, teorema de Pitágoras, entre outros.

Desse modo, sugerimos a divulgação dos resultados desta pesquisa, sobretudo dos teoremas em ação falsos, para que os professores possam ficar atentos ao desempenho de seus alunos durante a aprendizagem do conceito de raiz quadrada, e possam propor tarefas que propiciem aos alunos perceberem seus erros, oportunizando aos alunos a desestabilização de conhecimentos equivocados, e proporcionando aprendizagens.

Referências

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*. Matemática, Brasília: MEC/SEF, 1998.

REZENDE, V. *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses:* um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino. (Tese de doutorado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In. *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.* Org. BITTAR, Marilena, MUNIZ, Cristiano Alberto. Editora CRV, Curitiba, 2009.

______. *A Aprendizagem Matemática na Perspectiva dos Campos Conceituais* - O que é Aprender, Capítulo 01, p.13-52, 2007.

______. A gênese dos campos conceituais. In. *Por que ainda há quem não aprende?* Org. GROSSI, Esther Pillar. 2ª edição. Editora Vozes, Petrópolis, 2003.

______. La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

______. Teoria dos Campos Conceituais. In Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*, p. 1 - 26. Rio de Janeiro,1993.

Veridiana Rezende - Doutora pelo Programa de Pós – graduação em Educação para a Ciências e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, professora adjunta do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Unespar – Câmpus de Campo Mourão, rezendeveridiana@gmail.com.

Rozély Xavier Rosa - Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná. Mestranda pelo Pós – graduação em Educação para a Ciências e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, rozelyxavierrosa@gmail.com.