CONSTRUINDO O CONCEITO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA POR MEIO DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Building the Concept of Arithmetic Progression through Problem Solving Methodology

Charles Bruno da Silva Melo
Eleni Bisognin

Resumo

Este trabalho teve por objetivo investigar as contribuições que a Metodologia de Resolução de Problemas propicia para o ensino e aprendizagem de progressão aritmética. Os participantes da pesquisa foram alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Candelária/RS. A pesquisa, de natureza qualitativa, teve como instrumentos de coleta de dados a observação participante durante o desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos, o diário de campo do pesquisador e a análise dos registros dos alunos. As atividades em sala de aula seguiram os passos da metodologia de Resolução de Problemas, sugeridos por Onuchic e Allevato (2009): preparação do problema; leitura individual e em grupo; resolução do problema; registro das resoluções no quadro; plenária; busca do consenso e formalização do conteúdo. Essas atividades foram organizadas visando a construção do conceito de progressão aritmética e tendo como referencial a teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito de Tall e Vinner (1981). Os resultados da pesquisa indicam que essa metodologia contribuiu para o aumento da capacidade de argumentação dos alunos durante as discussões, estabelecimento de relações entre as diversas situações apresentadas e as representações matemáticas, aprendizagem dos alunos a partir dos erros e acertos analisados na plenária e um trabalho colaborativo. A pesquisa aponta também, dificuldades dos alunos em alguns aspectos tais como: interpretação do enunciado das questões; descrição, por escrito, do raciocínio utilizado e o uso de uma linguagem matemática formal.

Palavras-chave: Progressão Aritmética. Resolução de Problemas. Imagem de Conceito. Definição de Conceito. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Abstract

This work aimed to investigate the contributions of the Problem Solving Methodology for the teaching and learning of arithmetic progression. The research participants were students of second year of a public high school from Candelaria/RS. The research, of qualitative nature, had as data collection tools the participant observation during the development of the activities performed by the students, the researcher's field diary and the analysis of the student's records. The activities in the classroom followed the steps of the Problem Solving Methodology suggested by Onuchic and Allevato (2009): problem preparation; individual and group reading; problem resolution; resolution registration on the blackboard; plenary; the searching of content consensus and formalization. These activities were organized aiming the construction of the concept of arithmetic progression, having as reference the theory of Concept Image and Concept Definition of Tall and Vinner (1981). The research results indicate that this methodology contributed to the increase of the students´ argumentation capacity during the discussions, the establishment of links among the various situations presented and the mathematical representations, the students' learning from the mistakes and rightness discussed in plenary, and the collaborative work. The research also points out the students' difficulties in some aspects such as: the understanding of the question wording; the written description of the reasoning used and the use of a formal mathematical language.

Key-words: **A**rithmetic progression. Problem Solving. Concept Image. Concept Definition. Teaching and learning of mathematics.

Introdução

Neste trabalho, apresentam-se resultados de uma pesquisa, de caráter qualitativo, cujo objetivo foi investigar as contribuições que a Metodologia de Resolução de Problemas oferece para os processos de ensino e aprendizagem de progressões aritméticas para alunos do segundo ano do Ensino Médio.

A escolha do tema fundamentou-se no fato de que os alunos apresentam muitas dificuldades relacionadas a esse conceito. Possivelmente essas dificuldades estão relacionadas com a forma como os conteúdos são desenvolvidos em sala de aula, *engessados numa visão técnica sem a preocupação com o pensar matemático, além da falta de contextualização. Em geral só são atribuídos, a esse conteúdo, fórmulas e processos mecânicos,* dificultando principalmente, a parte interpretativa, o que é essencial para o desenvolvimento dos conceitos.

Além disso, muitos professores utilizam livros didáticos, mas, muitas vezes não os exploram suficientemente e os conceitos são, normalmente, transmitidos na forma de definições, exemplos e exercícios e os alunos somente utilizam fórmulas memorizadas para resolução.

Neste trabalho procurou-se oportunizar aos alunos situações problema para construção de imagens de conceito sobre progressão aritmética tendo como referencial a teoria de Tall e Vinner (1981), sobre "imagem de conceito" e "definição de conceito". Como metodologia de ensino, para o desenvolvimento das atividades em sala de aula, foi utilizada a Resolução de Problemas para possibilitar ao aluno construir o pensamento matemático por meio da experimentação, da observação, do questionamento, e da própria reflexão de forma colaborativa com os colegas. Desse modo, o foco da pesquisa está na questão: *Que contribuições a Metodologia de Resolução de Problemas propicia para o ensino e aprendizagem de progressões aritméticas para os alunos do segundo ano do Ensino Médio?*

Para responder a esse questionamento, foi realizada uma experiência de ensino com alunos de uma turma de segundo ano do Ensino Médio na qual o pesquisador atua como professor. Os dados foram coletados a partir das estratégias utilizadas pelos alunos nas soluções apresentadas por eles durante o desenvolvimento das atividades e dos registros dos questionamentos e discussões realizados em sala de aula.

Metodologia de Resolução de Problemas

Embora o termo "problema" esteja bastante presente no cotidiano das pessoas que trabalham com Matemática, percebe-se que, atualmente, nem sempre seu uso vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado.

A prática de resolver problemas está relacionada historicamente a diversas áreas do conhecimento, porém somente nas últimas décadas vem sendo utilizada pelos educadores matemáticos.

> Problemas têm ocupado um lugar central no currículo da matemática escolar desde a Antiguidade, mas resolução de problemas não. Somente recentemente, educadores matemáticos têm aceitado a ideia de que o desenvolvimento de habilidades em resolver problemas merece atenção especial. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 1)

Problemas no currículo escolar podem ser encontrados nas antigas civilizações, como a babilônica, a egípcia e a grega. Corroborando ainda com Stanic e Kilpatrick (1989, p. 8), desde Platão tem-se a ideia de que, estudando Matemática, aprimora-se a capacidade de pensar, de raciocinar e de resolver problemas do mundo real. Para os autores, os problemas foram um elemento do currículo que contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio.

No Brasil, os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais assinalam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles, como um dos objetivos do ensino de Matemática; indicam a resolução de problemas como ponto de partida e discutem caminhos para a Matemática na sala de aula.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p.52).

A partir dessas concepções, Onuchic e Allevato (2009) utilizam para o trabalho em sala de aula a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A palavra ensino-aprendizagem-avaliação expressa que o processo de ensino-aprendizagem deve ocorrer concomitantemente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como mediador e os alunos como partícipes dessa construção. E a avaliação contínua deve estar integrada a esse processo com o intuito de contribuir para a melhoria da aprendizagem na sala de aula.

Onuchic e Allevato (2009) apresentam nove etapas para organizar as atividades ao colocar em prática a Metodologia de Resolução de Problemas. Selecionar e/ou criar um problema visando à construção de um novo conceito, com o propósito de que o conteúdo matemático necessário para a resolução seja explorado. Posteriormente, pedir ao aluno que faça uma leitura do problema individualmente, em seguida uma nova leitura, agora em grupos. Se houver dificuldade na leitura, o professor pode auxiliar os alunos no esclarecimento de dúvidas.

Os alunos num trabalho cooperativo e colaborativo buscam resolver o problema. Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento, ele observa, analisa e estimula o trabalho colaborativo, bem como incentiva que os alunos utilizem os conhecimentos prévios e técnicas já utilizadas.

Com a chegada de cada grupo a uma resposta para o problema, representantes dos grupos são convidados a registrar, no quadro, suas resoluções. A partir desse momento, é feito o convite aos alunos para a discussão de diferentes resoluções registradas. O professor se torna guia e mediador das discussões.

Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas, busca-se chegar a um consenso sobre o resultado correto. Em seguida, é realizada a apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos.

Assim, o processo de ensino-aprendizagem de um conteúdo ou tópico matemático começa com um problema que apresenta aspectos-chave e técnicas matemáticas que devem ser desenvolvidas na busca por respostas ao problema dado. A avaliação do conhecimento dos alunos é feita continuamente durante a resolução do problema.

Todo esse conjunto de ações propicia que o professor reestruture sua prática docente, de modo que ele passa a compreender seu papel, não simplesmente de transmissor, mas de incentivador, facilitador e mediador das ideias apresentadas pelos alunos, de modo que essas se tornem produtivas, levando à construção do pensamento matemático e por consequência, à geração de novos conhecimentos.

> O professor pesquisa quando escolhe ou cria problemas adequados à construção de novo conhecimento

> sobre um determinado tópico do programa, daquela determinada série; quando seleciona, entre muitas, as estratégias mais adequadas à resolução daquele problema; quando planeja às questões-chave para conduzir os alunos, numa reunião planária com a classe toda, na análise dos resultados apresentados e chega ao consenso sobre os resultados obtidos; ele pesquisa quando prepara a melhor formalização dos novos conceitos e novos conteúdos construídos a partir do problema dado. (ONUCHIC, 2008, p.82)

A Metodologia de Resolução de Problemas também propicia que os alunos sejam investigadores perante uma situação, um problema, de forma a compreender e questionar.

> Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução. (ONUCHIC, 2008, p. 83)

A utilização dessa metodologia vai ao encontro das finalidades previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) para o que se espera do aluno do Ensino Médio, cujos objetivos são: compreender os conceitos, procedimento e estratégias matemáticas; aplicar seus conceitos matemáticos a situações diversas; analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes; desenvolver a capacidade de raciocínio e resolução de problemas; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas; expressar-se oral escrita e graficamente em situações; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos; reconhecer representações diferentes de um mesmo conceito e o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Essa metodologia gera o debate, a interação e a descoberta por parte do aluno, sem que ele seja refém de fórmulas e soluções sugeridas pelo professor, desenvolvendo uma aprendizagem com significado.

Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Os termos "imagem de conceito" e "definição de conceito", desenvolvidos por David Tall e Shlomo Vinner, indicam que grande parte dos conceitos que se emprega cotidianamente nem sempre estão formalmente definidos. Primeiramente, aprende-se a reconhecê-los por meio da experiência e a empregá-los em contextos apropriados. Posteriormente, esses conceitos podem sofrer mudanças e serem redefinidos, tanto em seus significados ou em suas interpretações com ou sem o rigor da definição precisa.

Entretanto, no que se refere à Matemática, o mesmo homem que interpreta o meio que vive e suas expressões, interpreta Matemática, e assim cada um cria uma ideia acerca de uma definição. Sendo assim, essas podem ser diferentes variando de indivíduo para indivíduo, e podem ser ou não coerentes com a definição formal proposta pelos matemáticos. Tall e Vinner (1981) comentam que:

> Comparado com outras áreas de empreitada humana, Matemática é usualmente considerada como uma matéria de muita precisão em que conceitos podem ser definidos seguramente para fornecer uma fundação firme para a teoria matemática. As realidades psicológicas são sutilmente diferentes." (p. 151).

Com relação à construção de conceitos matemáticos, normalmente, o professor faz uso exclusivo de definições formais, o que, segundo Vinner (1983), pode causar problemas na aprendizagem do aluno.

Em se tratando de um conceito matemático, Tall e Vinner (1981), afirmam que este não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como referência única a sua definição formal. Os autores afirmam que para a definição formal ser plenamente compreendida pelo aluno, é preciso que ocorra uma familiarização precedente com o conceito em questão, desenvolvida a partir de uma exploração tendo como base impressões e experiências variadas.

Apesar de defenderem que é possível não utilizar a definição formal como ponto de partida para a construção de um conceito, Vinner (1991) afirma que não se pode ignorar a necessidade de, mais tarde, o aluno conhecer as fórmulas, justamente pela sua utilidade nas resoluções de situações que as envolvam.

Ainda, de acordo com Vinner (1991),

> [...] quando vier a decidir sobre a pedagogia de ensino de matemática tem-se que levar em conta não apenas como se espera que os alunos vão adquirir o conceito matemático, mas também, e talvez mais significativamente, como os alunos realmente adquirem esses conceitos. (p. 67)

Para Tall e Vinner (1981), conceito é como um símbolo ou nome que auxilia na sua manipulação mental. Porém a estrutura cognitiva que envolve um conceito é bem mais ampla que apenas a manipulação de um nome. Os pesquisadores utilizam o termo “imagem de conceito” para descrever a estrutura cognitiva ligada a um determinado conceito e a definem:

> Usaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total associada a este conceito, que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.” (TALL e VINNER 1981, p. 152)

Por exemplo, a imagem de conceito de um aluno sobre um objeto matemático pode englobar diferentes características. Conforme os autores, essa imagem sofre modificações de acordo com as experiências vivenciadas pelo aluno no que diz respeito ao conceito desse objeto. Essas experiências ocorrem sob a forma de problemas propostos, questões a serem respondidas e toda atividade desenvolvida pelo indivíduo.

Sendo assim, é fundamental que se coloque o aluno em contato com diferentes tipos de representações e elementos sobre determinado objeto matemático, para que ele possa formar uma imagem de conceito rica, além de propiciar um significado mais claro para a formalização de um conceito.

> A interação entre os diferentes tipos de representação propicia um entendimento matemático mais profundo sobre os conceitos. Quando a imagem de conceito de um estudante se torna mais ampla, ele adquire uma concepção mais rica e abrangente do conceito matemático (ATTORPS, 2006, p. 111).

Conforme Escarlate (2008, p. 20), os elementos que colaboram para a formação de imagens de conceito podem ser “figuras, tabelas, diagramas, gráficos ou qualquer outro objeto matemático de natureza visual ou não, desde que esteja relacionado de alguma forma com o conceito em questão para o indivíduo.” O autor acrescenta ainda que existem muitos outros atributos nesse processo e isso irá depender do tipo de “experiências que o indivíduo terá e de como ele irá interagir com dada abordagem sobre o assunto” (ESCARLATE, 2008, p. 21).

Além disso, é necessário chamar atenção para o fato de que não só as experiências de caráter matemático exercem influência na formação da imagem de conceito. As experiências externas à Matemática ou ao processo de aprendizagem do conceito, como experiências do dia-a-dia, também podem moldar a imagem de conceito. Assim, de acordo com Giraldo (2004), a imagem de conceito é individual. Ela não é estática, sofre transformações de acordo com o desenvolvimento do indivíduo.

Tall e Vinner (1981) chamam de fatores de conflito potencial as oposições entre as imagens que um indivíduo traz consigo ou em relação a essas imagens e novos conceitos a ele apresentados, no qual destacam, ainda, a ideia de imagem de conceito evocada como uma parte da imagem de conceito que é ativada num momento particular.

Dessa maneira, fica evidente que a imagem de conceito é uma particularidade subjetiva de um indivíduo, não fazendo sentido falar em imagem ligada a determinado conceito de maneira geral. Segundo os autores, a aprendizagem da definição formal de um conceito requer o estímulo e o desenvolvimento anterior de uma imagem de conceito que seja essencialmente rica.

Sobre definição de conceito os autores colocam que ela é determinada como,

> [...] uma reconstrução pessoal feita pelo estudante. É então o tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem. Se os conceitos definição lhe são dados ou construídos por si mesmo, podem variar de tempo em tempo. Dessa maneira, um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que aceito pela comunidade matemática (TALL e VINNER, 1981, p. 153).

Esta sentença pode tanto ser meramente decorada como aprendida de forma mais significativa pelo aluno. Pode também ser uma construção pessoal do próprio aluno, ou seja, uma forma de palavras usadas por ele para explicar o conceito do seu ponto de vista, utilizando para isso sua imagem de conceito. Assim, a definição de conceito pode ou não coincidir com a definição formal correspondente.

Para que isso ocorra, basta que o indivíduo tenha uma definição de conceito calcada na sua própria imagem de conceito e que esta seja pobre. Por outro lado, uma definição de conceito decorada do livro, logo consistente com a definição formal, pode fazer parte de uma imagem de conceito inteiramente pobre ou até inexistente. Uma imagem de conceito rica pode ser considerada como sendo aquela que inclui muitas propriedades, experiências e impressões sobre um determinado conceito.

A teoria exposta sinaliza que a compreensão adequada de uma definição formal demanda uma imagem de conceito bem construída. Giraldo (2004) comenta que:

> Da mesma forma que uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda a definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não e necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui uma definição de conceito incorreta. Em resumo, uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes. Assim sendo, esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes. (p. 18).

Nesse trabalho são apresentadas situações-problema que propiciam ao aluno diferentes representações que favorecem a construção de imagens de conceito de progressões aritméticas.

Metodologia da Pesquisa

A partir do embasamento teórico, foram elaboradas atividades que tinham como propósito, primeiramente, identificar padrões e desenvolver o conceito de sequência, para construir o conceito de progressão aritmética.

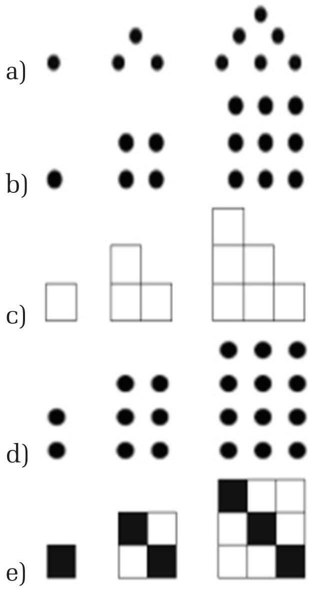
A pesquisa foi aplicada em uma turma de 23 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual, do município de Candelária/RS, na qual o pesquisador e primeiro autor desse trabalho, atua como professor. Os alunos foram agrupados em cinco grupos, nomeados pelas cinco vogais, A, E, I, O e U.

Após a realização de cada atividade foi reservado um espaço para discutir e socializar as respostas dadas nas questões propostas, fazendo com que cada grupo expusesse e sanasse eventuais dúvidas ainda existentes de acordo com os passos preconizados pela metodologia de Resolução de Problemas. O levantamento de dados deu-se a partir dos registros feitos pelo professor e pelos registros das atividades desenvolvidas pelos alunos.

Análise dos Resultados

A primeira atividade tinha por objetivo estimular a construção de imagens de conceito acerca de sequência e a identificação de padrões.

Atividade 1 – Observe as sequências de desenhos a seguir, descubra e descreva o padrão de formação em cada uma delas, determinando o seu próximo termo.

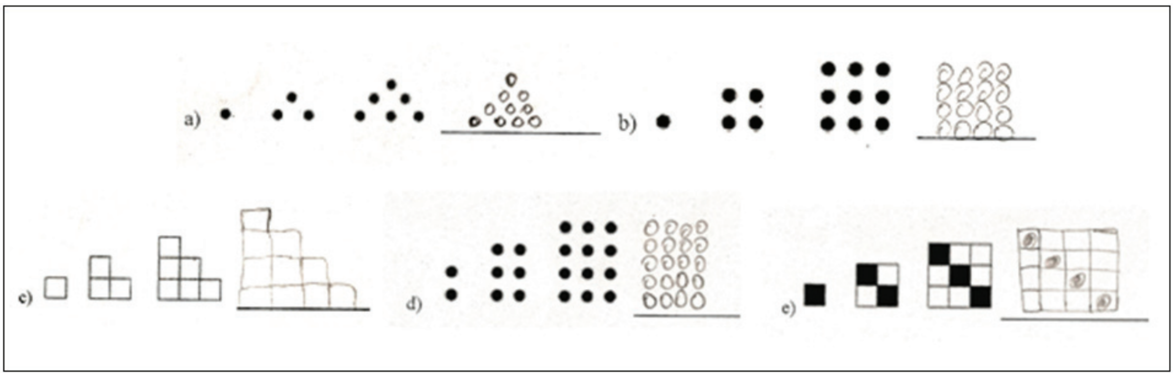


Inicialmente a atividade foi distribuída aos grupos já formados e cada grupo fez uma leitura individual e posteriormente em conjunto. Durante esse processo pode-se observar que a maioria dos alunos não sabia como trabalhar em grupo, pois enquanto alguns alunos estavam analisando a questão e fazendo conjecturas, outros esperavam a indicação do professor. Com a intervenção deste, os alunos começaram a traçar estratégias de solução, porém não sabiam como justificar seu raciocínio por escrito. O professor auxiliou os grupos por meio de questionamentos, na tentativa de estimulá-los a superar essa barreira.

Após a realização da atividade, foi solicitado que um representante de cada grupo fosse ao quadro explicar como foi o processo de resolução.

A solução apresentada pelos grupos foi idêntica, mas o que enriqueceu o processo foram os diferentes raciocínios utilizados para se chegar a essa conclusão. A resolução mais adequada estabelecida por meio do consenso, depois da plenária, é representada pelo registro do grupo O, na Figura 1.

Figura 1 – Solução da atividade 1 elaborada pelo grupo O.

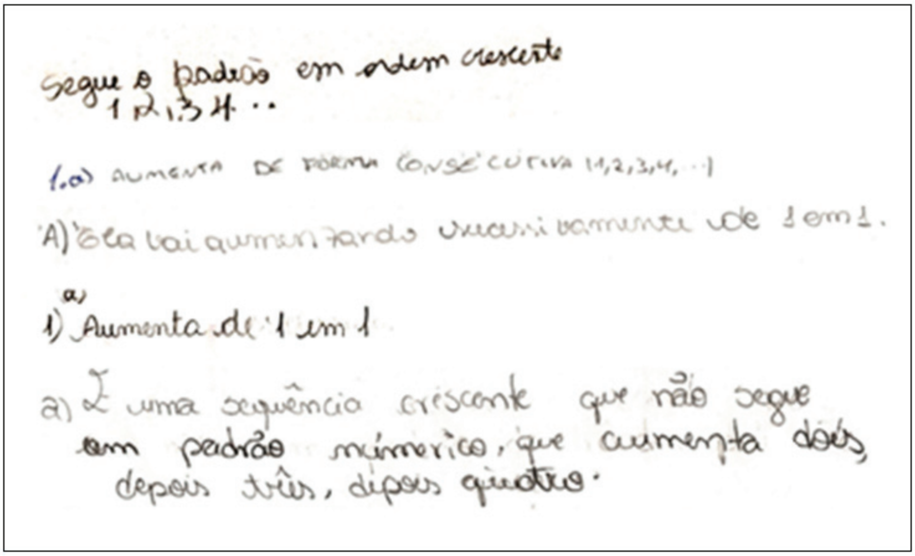


Fonte: dados da pesquisa.

Na plenária, a preocupação foi identificar se os grupos conseguiram mobilizar imagens de conceito referentes a sequências para encontrar as soluções. Nessa situação, todos os desenhos representavam uma sequência numérica crescente com padrões diferentes, relacionando o número de objetos do desenho em cada estágio. Diante disso, nota-se nos registros na Figura 2, que aparecem palavras como: aumenta; ordem crescente; consecutiva e sucessivamente.

Essas palavras remetem a características dos desenhos apresentados, que por sua vez, são características de sequências. É possível constatar que houve a mobilização de imagens de conceito sobre sequência, por parte dos alunos, pois fizeram a associação entre estágio do desenho com o número de elementos do mesmo.

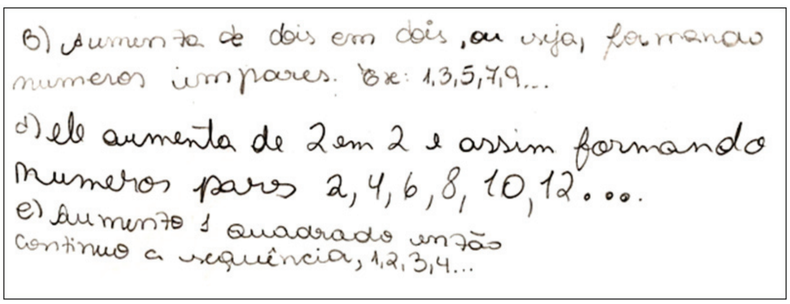
Figura 2 – Soluções dos grupos para a letra *a* da atividade 1.


Segue o padrão em ordem crescente
1, 2, 3, 4 ..
1.a) AUMENTA DE FORMA CONSECUTIVA (1,2,3,4,...)
A) Ela vai aumentando sucessivamente de 1 em 1.
a)
1) Aumenta de 1 em 1
a) É uma sequência crescente que não segue um padrão numérico, que aumenta dois, depois três, dipois quatro.

Fonte: dados da pesquisa.

Quanto à identificação dos padrões pode-se notar que alguns grupos já conseguiram, a partir dos desenhos, construir sequências numéricas envolvendo os padrões, como é o caso do grupo O, nas letras *b*, *d*, *e* apresentadas na Figura 3.

Figura 3 – Relação entre padrões e a formação de sequências realizadas pelo grupo O.


B) Aumenta de dois em dois, ou seja, formando numeros impares. Ex: 1,3,5,7,9...
d) ele aumenta de 2 em 2 e assim formando numeros pares 2,4,6,8,10,12...
e) Aumenta 1 quadrado então continua a sequência, 1,2,3,4...

Fonte: dados da pesquisa.

Essa associação entre os padrões e a formação de sequência demonstra que a atividade levou os alunos a estabelecer conjecturas, e comprová-las ou refutá-las, a partir dos padrões de regularidade observados. Essa é uma das competências a serem desenvolvidas para se chegar à formalização do conhecimento matemático, como prevê o PCNEM (BRASIL, 2002). Observou-se, também, que a mudança de registros, do desenho para a linguagem escrita nas justificativas, propiciou a construção de diferentes imagens do conceito.

A segunda Atividade 2, a seguir, teve como propósito introduzir o conceito de progressão aritmética.

Atividade 2 – Escreva nas lacunas o número de pontos correspondentes a cada elemento da sequência a seguir.

3, ____, ____, ____,____

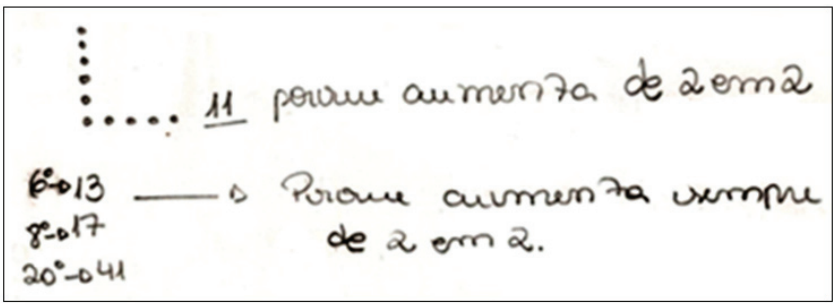
Analisando a sequência obtida, responda:

a) Qual é o próximo elemento dessa sequência? Faça o desenho.
b) Quantos pontos terá o 6º elemento dessa sequência? E o 8º elemento? E o 20º elemento?
c) Que padrão de regularidade você observou na construção dessa sequência numérica?
d) Como você pode escrever o n-ésimo elemento dessa sequência?

Após a leitura individual e em grupo, os alunos partiram para a solução, de modo que durante esse processo não houve muitos questionamentos. Concluíram rapidamente que a sequência era 3,5,7,9 , 11, e assim por diante.

Para a resolução dos demais itens da atividade, os alunos utilizaram a contagem, foram aumentando duas unidades em relação ao termo anterior. Esse comportamento demonstra que ocorreu a mobilização de imagens de conceito já que eles passaram a utilizar uma mesma estratégia e a observar mais atentamente um padrão. Os alunos se mostravam mais atentos e participativos, pois estavam aprendendo em ação, uma vez que eles precisavam pensar e realizar conjecturas para solucionar as questões e, por consequência, dar continuidade à solução do problema. Durante a plenária, foi possível averiguar que todos os grupos resolveram da mesma forma. Na Figura 4, é mostrado o registro feito grupo U.

Figura 4 – Resolução apresentada pelo grupo U.



Fonte: dados da pesquisa.

Na continuação desta atividade perguntava-se que padrão de regularidade existia na construção dessa sequência numérica. Categoricamente, os grupos afirmaram que sempre aumentava de dois em dois e essa sequência seria formada somente por números ímpares. A partir dessa constatação, é possível afirmar que os alunos estão mais atentos ao comportamento de uma sequência, sendo assim, estão recorrendo às imagens de conceito construídas, a partir de raciocínios dedutivos estabelecidos na atividade anterior.

A última questão dessa atividade (questão d) desafiava os alunos a buscar uma generalização e mudar do registro gráfico para um registro algébrico.

O professor estimulou a construção de imagens de conceito sobre esse tópico. Inicialmente foi solicitado aos alunos a construção de uma tabela relacionando os termos da sequência com suas posições. Após a construção, solicitou que observassem o que ocorria a cada etapa. Por meio dos desafios propostos para os grupos, eles analisaram que a cada etapa eram somadas duas unidades em relação ao elemento anterior e, a partir disso, ocorreu o seguinte diálogo:

Professor: E se eu quisesse saber o centésimo termo dessa sequência? Vocês iriam somar de dois em dois até chegar ao centésimo termo?

Alunos: Ia dar muito trabalho.

Professor: Por isso precisamos saber como escrever o n-ésimo termo.

Nesse momento dois alunos, um do grupo A e outro do grupo O, levantaram hipóteses do que seria o n-ésimo termo, a partir da tabela construída.

Aluno A1: Então professor, é uma fórmula que relaciona a posição com o elemento da sequência?

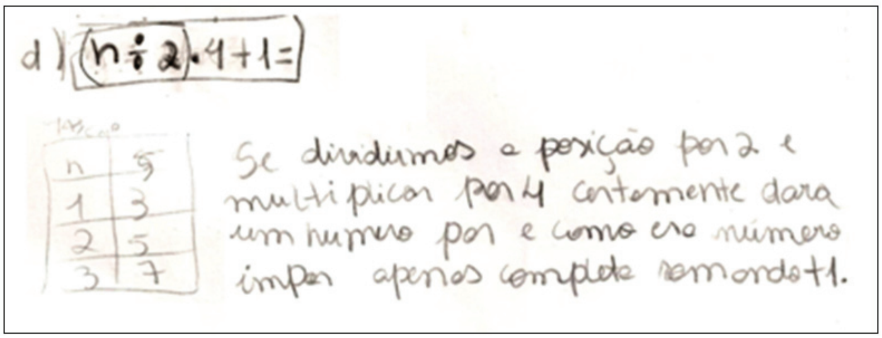
Aluno O1: É uma fórmula que posso calcular qualquer elemento da sequência?

Professor: Exatamente! Observem atentamente a tabela.

Nesse diálogo é possível analisar que esses alunos possuem uma imagem de conceito mais rica que os demais alunos da classe, quando se trata de aspectos algébricos. Essa percepção dos alunos também foi notada pelo professor em conteúdos anteriormente estudados. Na solução da questão, alguns grupos utilizaram a estratégia da tentativa de erro e acerto até encontrar o n-ésimo termo, mesmo o professor mediando e realizando questionamento que iriam levar à resolução. No momento da plenária, o grupo A escreveu a expressão 4(n/2) +1, para o n-ésimo termo e os grupos I e O escreveram de forma simplificada 2n+1.

Na Figura 5 é apresentada a solução do grupo A, na qual os alunos justificaram que utilizaram a estratégia de erro e acerto, porém observaram que, ao dividir a posição pela metade e multiplicar por quatro, iriam obter um número par, que era anterior ao termo da sequência, e como ela era ímpar, bastava-se somar um.

Figura 5 – Resolução do grupo A para o item d.

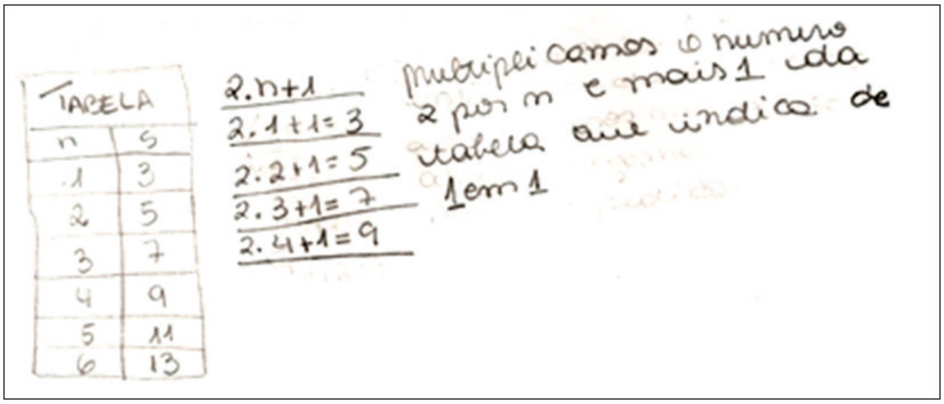


Fonte: dados da pesquisa.

A estratégia utilizada pelos grupos O e I foram iguais. Nesse caso, os alunos notaram que a sequência era de números ímpares, portanto era necessário que o resultado dos cálculos sempre fosse ímpar. Justificaram que, como o padrão era de dois em dois e multiplicando qualquer número por 2 resultaria sempre um número par, era necessário somar uma unidade para se obter um número ímpar.

Na Figura 6, é apresentado o registro do grupo I, semelhante ao do grupo O para a solução dessa questão.

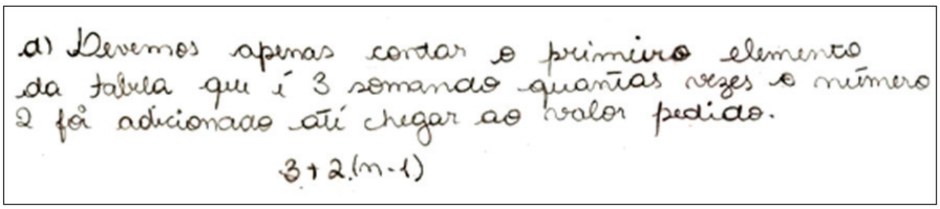
Figura 6 – Registro do grupo I para o item d.



Fonte: dados da pesquisa.

O grupo U chegou à expressão $3 + 2(n - 1)$, a partir da observação de que a sequência era de números ímpares, porém, iniciava no três a cada termo da sequência, era sempre aumentado 2 com relação ao termo anterior. Indicaram por n-1 o número anterior a n, como no registro na Figura 7.

Figura 7 – Resolução do grupo U para o item d.



Fonte: dados da pesquisa.

O grupo E não conseguiu chegar a uma conclusão, apenas copiou os registros feitos pelo grupo O, pois não sabiam explicar o pensamento realizado durante a plenária. Nesse caso, os alunos foram advertidos que não era o correto a se fazer, uma vez que comprometeria o seu próprio aprendizado. Apesar dos diálogos terem enriquecido a discussão, os alunos apresentaram dificuldades em registrar seus raciocínios por escrito. Isso demonstra que é necessário que o professor explore mais a escrita em linguagem formal e não apenas os cálculos. Os alunos conseguiram explicar claramente na forma oral o raciocínio utilizado. Pode-se perceber que eles atingiram um nível mais alto em relação ao aprendizado da identificação de padrões, pois conseguiram construir uma expressão para o n- ésimo termo a partir da observação do padrão da sequência. Nessa atividade os alunos apresentaram dificuldades, porém mobilizaram mais suas imagens de conceito para chegar à solução.

A plenária, momento em que todos discutiram suas estratégias de resolução, foi muito importante para a construção dos significados. É por meio da troca de ideias que os conhecimentos são compartilhados por todos e definida a validade dos exemplos e das conexões estabelecidas durante a apresentação dos resultados.

A Atividade3, a seguir, propicia ao aluno ir mais longe na construção do conceito de progressão aritmética.

Atividade 3 – Uma corda de um circo estava enfeitada com esferas e cilindros como mostrada a seguir:

a) Qual é o grupo de figuras que se repete?
b) Se forem utilizadas 30 esferas, quantos cilindros existirão? E quantos grupos?
c) Preencha a tabela abaixo. Explique o raciocínio usado.

Nº de grupos	Nº de esferas	Nº de cilindros	Nº total de objetos
1	3	2	5
		4	
	9		
4			

d) Escreva uma lei de formação para determinar o número de esferas e o número de cilindros.
e) Escreva uma lei de formação para determinar o número total de objetos.

Inicialmente, era questionado qual era o grupo que se repetia na corda. Essa atividade, os alunos não tiveram dificuldades em resolver. No registro feito pelo grupo U, Figura 8, os alunos nomearam as esferas como 'bolinhas' e os cilindros como 'quadradinhos'.

Figura 8 – Solução do grupo U para a questão *a.*

8 A) as dois grupos repetem, ou seja, as bolinhas estão 3 em 3 Três vezes, e os quadradinhos de 2 em 2 duas vezes.

Fonte: dados da pesquisa.

No segundo item era solicitado quantos cilindros e quantos grupos teriam se fossem usadas 30 esferas. Nessa questão, os alunos não apresentarem dificuldades e responderam que teriam 20 cilindros e 10 grupos, pois para cada 3 esferas seriam necessários 2 cilindros e cada grupo possuía 5 objetos. O preenchimento do quadro (item c) auxiliou os alunos a explicarem o raciocínio utilizado, como mostra a Figura 9 que apresenta o registro do Grupo U.

Figura 9 – Solução do grupo U para o item *c.*

C) Fomos seguindo a sequência,
Exemplo: Numero de grupos:
1,2,3,4...
Numero de esferas:
3,6,9,12...
Numero de cilindros:
2,4,6,8...
Numero de total de objetos
5,10,15,20,25...

Fonte: dados da pesquisa.

Para determinar uma lei de formação para o número de esferas, de cilindros e o número total de objetos, os alunos justificaram que o preenchimento do quadro no item c, auxiliou na generalização e não encontraram dificuldades.

Todos os grupos registraram no quadro suas respostas, sendo possível constatar que o grupo I criou uma lei de formação para o número total de objetos dos grupos, inclusive especificando a quantidade de esferas e cilindros, mesmo tendo denominado de 'posição' em vez da quantidade de objetos. Essa representação feita pelo grupo é mostrada na Figura 10.

Figura 10 – Solução do grupo I para a letra *d.*

e) x= posição esferas
y= total
z= posição cilindros
$y = 3x + 2.z$

d) x= posição
y= nº de esferas
$y = 3.x$

x= posição
y= nº de cilindros
$y = 2.x$

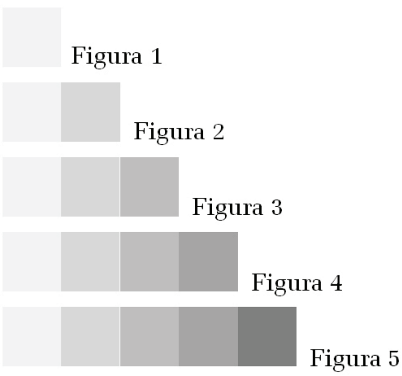
Fonte: dados da pesquisa.

Nas resoluções dessa questão, constatou-se que os alunos conseguiram utilizar o recurso do quadro do item c, como um forte aliado no processo de generalização, de modo que se pôde notar certo avanço na construção da lei de formação, uma vez que eles trabalharam mais entusiasmados, mais críticos e ativos na observação de padrões, o que é fundamental nessa etapa. Isso demonstra que estão mobilizando cada vez mais suas imagens de conceito e produzindo novos conceitos e estratégias com o intuito de solucionar problemas.

Após essa atividade, foi formalizado o conceito de Progressão Aritmética, razão de uma Progressão Aritmética e termo geral de uma Progressão Aritmética. Esse processo se deu de forma colaborativa entre os alunos e o professor, a partir de discussões e análises levantadas durante o desenvolvimento das atividades e da construção, feita pelos alunos, de imagens desses conceitos.

A Atividade 4, a seguir, teve como propósito construir o conceito de soma de uma Progressão Aritmética. Nessa atividade os alunos utilizaram material manipulável para ajudar na resolução.

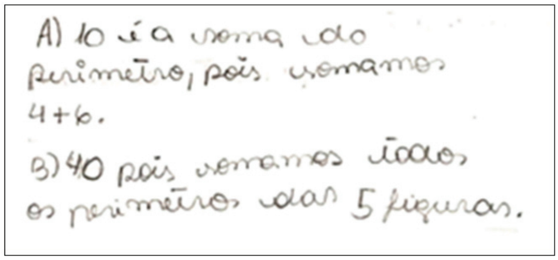
Atividade 4 – Analise as figuras a seguir:



a) Qual é a soma dos perímetros das duas primeiras figuras?
b) Qual é a soma dos perímetros das cinco primeiras figuras?
c) Encontre uma relação entre o número de figuras e a soma dos perímetros.
d) Descreva uma expressão para calcular a soma dos perímetros das n primeiras figuras.

Realizada a leitura da atividade, os alunos partiram para a resolução. Em ambas as questões, não houve dúvidas quanto ao enunciado e nem quanto à resolução. A plenária foi realizada de forma oral, quando os grupos justificaram que apenas somaram os perímetros das figuras, como é mostrado no registro do grupo U na Figura 11.

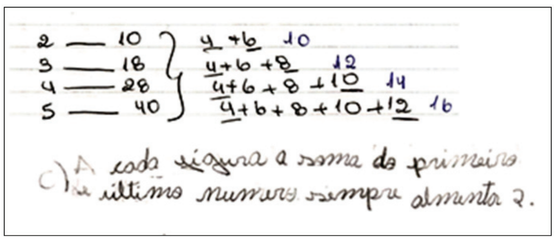
Figura 11 – Solução apresentada do grupo U para as letras *a* e *b*.


A) 10 é a soma do perimetro, pois somamos 4+6.
B) 40 pois somamos todos os perimetros das 5 figuras.

Fonte: dados da pesquisa.

O item seguinte solicitava aos alunos que estabelecessem uma relação entre o número de figuras e a soma dos perímetros. Nessa atividade, a maioria dos grupos notou que ao realizar a soma dos perímetros, os resultados estavam em progressão aritmética, conforme a sequência dos perímetros (4, 6, 8, 10, 12). Os alunos do grupo I e do grupo A observaram que a soma do primeiro e do último termo formavam uma progressão aritmética de razão 2, como descreveram em seus registros apresentados na Figura 12. Essa observação compartilhada no momento da plenária possibilitou que os demais alunos pudessem ter outro olhar referente à compreensão da expressão para a soma dos perímetros da n-ésima figura.

Figura 12 – Registros dos grupos I e A para a atividade *c.*


2 — 10 4+6 10
3 — 18 4+6+8 12
4 — 28 4+6+8+10 14
5 — 40 4+6+8+10+12 16
c) A cada figura a soma do primeiro e último numero sempre aumenta 2.

Fonte: dados da pesquisa.

No último item os alunos deveriam estabelecer uma expressão para a soma das n primeiras figuras. Os grupos A, E e I , notaram que os resultados obtidos eram sempre o dobro da soma dos perímetros das figuras envolvidas, como representado no registro feito pelo grupo E, na Figura 13.

Figura 13 – Registro do grupo E para o item d.

2 – 10 | 4 + 6 = 10 . 2 = 20
3 – 18 | 4 + 6 + 8 = 12 . 3 = 36
4 – 28 | 4 + 6 + 8 + 10 = 14 . 4 = 56
5 – 40 | 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 16 . 5 = 80

Fonte: dados da pesquisa.

O grupo I utilizou a linguagem escrita para expressar sua conclusão pois não sabiam como representá-la algebricamente. Essa conclusão é mostrada na Figura 14, a seguir.

Figura 14 – Registro do grupo I para o item d.

d) Some o perímetro do primeiro e último termo, multiplica pelo tanto de termos que tem e por último divid por dois, chegando até a soma total.

$$\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa.

Na plenária, o professor auxiliou os alunos a construir uma representação algébrica para a expressão.

Nessa atividade, foi possível verificar que os alunos evoluíram com relação à mobilização de imagens conceituais na busca pela generalização. Essa evolução se deve à exploração de diferentes representações e ao trabalho de forma colaborativa, pois desse modo os alunos puderam discutir e apresentarem suas percepções referentes a cada situação problema, contribuindo com a busca coletiva pela solução. Observou-se que a estruturação algébrica de uma situação ainda gera nos alunos certa insegurança, já que não estavam acostumados a tal abordagem.

Pode-se concluir que o desenvolvimento dessas atividades propiciou a construção de imagens de conceito referentes à progressão aritmética, fugindo da perspectiva de que a Matemática está pronta e acabada, e oportunizou aos alunos construírem sua imagem definição, conforme sugerem Tall e Vinner (1981).

Considerações Finais

A partir do problema e das questões de pesquisa, esta investigação se propôs a trabalhar o conteúdo de progressão aritmética com a Metodologia de Resolução de Problemas. Essa nova forma de trabalhar o conteúdo, evitando um ensino com acúmulo de fórmulas *e sem a preocupação com* a compreensão do significado, necessitou o planejamento de atividades que favorecessem a construção de imagens de conceito a fim de que cada aluno pudesse construir a sua imagem definição, como proposto por Tall e Vinner (1981).

A utilização da Metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009) revelou-se eficiente ao longo do trabalho em sala de aula. A utilização dessa metodologia favoreceu a diálogo entre os grupos, propiciou ao professor instigar e desafiar os alunos no desenvolvimento das atividades para construir novos conceitos, organizar os debates, bem como provocar a participação deles em sala de aula. Todo este enlace faz com que o professor se torne um mediador na construção do conhecimento, deixando de ser um mero transmissor.

No início das atividades, alguns alunos questionaram a metodologia utilizada, pois esta exigia que tivessem que pensar e raciocinar constantemente para encontrar a solução, do mesmo modo que sentiram dificuldades em entender o funcionamento da dinâmica. Isto ocorre, pois normalmente, os conceitos são trabalhados a partir de definições, seguido de exemplos e exercícios, na qual o professor apenas transmite o conteúdo. Nessa experiência observou-se que essa ordem foi invertida, ou seja, as definições só foram construídas ao final das atividades, a partir da mobilização de imagens do conceito desenvolvidas a partir da utilização de diferentes representações.

Pode-se inferir, também, que as contribuições dessa metodologia para o ensino e aprendizagem desse conteúdo foram: aumento da capacidade de argumentação durante as discussões na plenária; estabelecimento de relações entre as representações matemáticas facilitando a compreensão do significado do conceito de progressão aritmética; possibilidade de os alunos aprenderem a partir do erro, uma vez que eles perderam o "medo de errar"; aprendizagem de trabalho de forma colaborativa, pois a turma era bem individualista e; melhor rendimento da turma nos resultados finais.

Nesse contexto, uma das etapas da metodologia que favoreceu a construção do conceito de progressão aritmética foi a plenária, realizada muitas vezes de forma oral e escrita, pois possibilitou aos alunos apresentarem suas estratégias, pensadas coletivamente, bem como a discussão para buscar uma solução de consenso. A plenária possibilitou, também, que os alunos avaliassem as diferentes respostas e percebessem onde tinham se equivocado ou como não tinham pensado naquela solução. Foi um processo de construção e reconstrução de imagens de conceito por parte dos alunos.

Os alunos sentiram algumas dificuldades ao trabalharem como essa metodologia, tais como: a interpretação dos enunciados; descrição das estratégias de solução e o uso da linguagem matemática formal. Apesar dessas dificuldades, a maioria dos alunos conseguiu se apropriar dos conceitos trabalhados, portanto, pode-se considerar que a Metodologia de Resolução de Problemas propiciou um ensino e aprendizagem com significado, do conceito de progressão aritmética por meio da construção de imagens de conceito desse conteúdo.

Referências

ATTORPS, I. *Mathematics teachers' conceptions about equations*. 2006. (Thesis in Applied Education). University of Helsinki. Disponível em: http://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/20050/mathemat.pdf?sequence=1. Acesso em: 22 out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Matemática). 3 ed. Brasília, 2000.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2002.

ESCARLATE, A. C. *Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral.* 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos computacionais:* O Caso da Derivada. 2004. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

ONUCHIC, L. R. Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: Seminário de Resolução de Problemas, 1., 2008, Rio Claro. *Anais eletrônicos.* Rio Claro: GTERP, 2008. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. *Boletim GEPEM,* Rio de Janeiro, v. 55, p. 1-19, 2009.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* Reston: NCTM, 1989. p. 1-22.

TALL, D & VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education and Technology*, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65-81.

Charles Bruno da Silva Melo- Mestre em Ensino de Matemática e professor da Educação Básica. E-mail: xarlesdemelo@yahoo.com.br

Eleni Bisognin –Doutor em Matemática e Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, RS. E-mail: eleni@unifra.br