A MUDANÇA DE REGISTRO SEMIÓTICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS: O CASO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO[1]

Change of semiotic register in problems solving in context: The case of the right triangle trigonometry

Carolina Soares Rodrigues
Airton Carrião

Resumo

Este trabalho objetivou observar e analisar como os alunos de uma turma do Ensino Fundamental resolvem problemas contextualizados que envolvem conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Os dados foram coletados através de registros de observação, videogravações das aulas e consultas a materiais produzidos pelos alunos, e foram analisados sob a perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os resultados, em consonância com a literatura, apontam que a atividade de conversão de registros semióticos é uma etapa complexa da resolução dos problemas, sendo aquela em que os alunos apresentaram maiores dificuldades, constituindo-se em um momento importante da aprendizagem. Verificou-se também que as estratégias de resolução e o contexto da aula influenciam a escolha dos registros, bem como a forma de conversão.

Palavras-chave: Representações semióticas. Problemas contextualizados. Resolução de problemas.

Abstract

This study aimed to observe and analyse how students of an Elementary Education's class solve contextualized problems involving the concepts of right-angled triangle's trigonometry. The data were collected from observation notes, lectures video recordings and also by consulting the written materials produced by the students. Data were analysed by the perspective of the Representation Semiotics Registers theory. The results are in accordance with the literature suggesting that the activity of converting semiotic records is a complex stage of problem solving being the most critical to students thus becoming an important time of learning. It was also observed that resolution strategies and the context of the classroom influence the choice of records, as well as the conversion form.

Keywords: Semiotic representation. Contextualized problems. Problem solving.

Introdução

Um aspecto importante a ser considerado quando se trata da aprendizagem matemática são as estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos para resolver problemas, em especial problemas contextualizados. Percebe-se hoje, quer seja nos documentos oficiais ou nas produções acadêmicas, o quanto é importante promover um ensino de matemática que se preocupe com o desenvolvimento do raciocínio matemático e propicie ao aluno ganhar autonomia para utilizar seus conhecimentos em situações diversas, ou

[1] Este trabalho teve início com um projeto de Iniciação Científica realizado na Universidade Federal de Minas Gerais.

seja, uma educação matemática que vai muito além da mera exposição de conteúdos e resolução de exercícios. Ao mesmo tempo em que isso tem se tornado uma meta defendida por muitos educadores e documentos oficiais, sua operacionalização na sala de aula tem se mostrado um desafio. Entre os muitos aspectos a serem considerados em relação a essa questão, destacamos a importância de conhecer as ideias e estratégias dos alunos no momento de resolver problemas matemáticos contextualizados, o que pode trazer contribuições à compreensão do processo de ensino e aprendizagem. Outro problema, já bastante destacado da literatura, é o ensino de geometria, que tem desafiado professores e pesquisadores. Neste trabalho, buscamos identificar as dificuldades encontradas pelos alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas contextualizados envolvendo trigonometria no triângulo retângulo. Para isso, foram feitas observações do tipo etnográfico, com foco nos momentos em que os grupos de alunos resolviam esses problemas. Posteriormente, os episódios foram analisados tendo como principal referência a teoria de Raymond Duval, observando principalmente as transformações de registro semiótico, buscando compreender melhor como ocorreu os processos de conversão da linguagem natural para a simbologia matemática, mas também observando como o contexto da aprendizagem influenciou as estratégias de solução.

Referencial teórico

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, o critério central da escolha dos temas a serem explorados no ensino de matemática é a contextualização e a interdisciplinaridade. O sentido, aí dado, a contextualização, é o de se trabalhar com temas que possam

> [...] permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2006)

Essa orientação de se contextualizar o ensino de matemática, presente nos documentos oficiais, tem gerado várias interpretações de como isso pode se materializar na sala de aula tanto do ponto de vista da pesquisa como da prática pedagógica. Outra questão que surge, a partir dessa orientação, é o que pode ser considerado um problema contextualizado. Apesar de essas discussões serem extremamente ricas e necessárias para ensino de matemática, fogem ao escopo deste trabalho. Vamos aqui nos limitar a explicitar o que estamos entendendo por contextualização.

Silva e Santo (2004) apresentam quatro categorias para as formas de contextualização, a partir das relações que estabelecem com o cotidiano do aluno, com a história da matemática, com conteúdos de outras disciplinas ou com a própria matemática. Na primeira categoria, o conhecimento matemático é relacionado com a vida diária do aluno, e os autores defendem que não se deve partir do pressuposto de que todo conteúdo matemático precisa, necessariamente, ser ensinado com base em experiências do cotidiano, já que essa não é a única forma possível de contextualização. Na segunda categoria, temos a História da Matemática utilizada com fins pedagógicos, admitindo a Matemática como sendo um conhecimento situado no tempo e no espaço. A terceira forma de contextualizar é baseada na interdisciplinaridade, ao relacionar a matemática com outras disciplinas, mostrando sua contribuição no estudo de fenômenos sociais e naturais. Por último, o contexto de uma atividade matemática pode ser a relação entre diversos conteúdos matemáticos, como, por exemplo, a aplicação de operações algébricas para resolver problemas geométricos (SILVA; SANTO, 2004).

Nesta pesquisa, os problemas que apresentaram alguma dessas características foram considerados contextualizados e incluídos na nossa análise, mesmo que sejam problemas *artificiais*, ou seja, apresentam situações hipotéticas, improváveis de acontecer na realidade, ou pelo menos no contexto social dos alunos, ou excessivamente arranjados para se conformar ao objetivo didático; ou *fechados*, isto é, em que o aluno de antemão "identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático" (BRASIL, 2006, p.83). Essa opção foi feita devido ao fato de esses dois tipos de problemas serem frequentes nos livros didáticos e nas aulas que foram acompanhadas para fazer esta pesquisa. Dessa forma, ampliamos as possibilidades para os objetos de estudo, sem prejuízos para a qualidade da análise, já que nosso foco está na mudança de registro semiótico necessária para resolver problemas.

Durante a realização dessa análise, percebemos que deveríamos considerar também alguns aspectos presentes nos momentos de interpretação dos enunciados desses problemas, fatores que influenciam o processo de mudança de registro semiótico. Um ponto importante trata-se das características dos problemas. Skovsmose (2000) classifica as atividades matemáticas quanto às possíveis referências, que objetivam a produção de significados para os conceitos matemáticos por parte dos alunos. As questões matemáticas podem fazer referência estritamente à matemática, a uma semirrealidade (realidade construída) ou à realidade. De acordo com essa classificação, consideramos que os problemas dos quais estamos tratando neste trabalho fazem referência a uma semirrealidade. No caso dos problemas com referência à semirrealidade, Skovsmose (2000) argumenta que existem padrões de como se opera nessas situações, ou seja, existem alguns combinados, ou acordos, entre professor e alunos quanto à resolução dos mesmos. Assim, são admitidos pressupostos como: as informações necessárias à resolução estão inteiramente descritas no enunciado; as impressões sensoriais não são levadas em conta, mas sim apenas as informações quantitativas, e estas são exatas; o objetivo principal é encontrar a resposta. Dessa forma, há certos pressupostos implícitos, como esses citados acima, que estão presentes, e são necessários, ao se resolver esses problemas.

Além desses aspectos relacionados à referência dos problemas propostos, outro fator que teve grande importância nos momentos de resolução foram as formas de leitura e interpretação dos enunciados. Malta (2004) defende a importância da linguagem para o aprendizado e, consequentemente, a necessidade de desenvolvimento por parte dos alunos da capacidade de leitura e expressão do próprio raciocínio. Como aponta Carrião (2008), aprender Matemática é aprender um vocabulário especializado; a falta de domínio deste vai caracterizar uma situação em que os alunos não darão os significados, a menos de forma satisfatória, ao que foi intencionado. As dificuldades de leitura e registro dos alunos podem ter relação ao fato, apontado por Carrião (2008), de os professores não estarem atentos, ou desconhecerem, esse tipo de dificuldade, não relacionando isso à falta de domínio da linguagem utilizada na aula de Matemática. Essa questão também é destacada por Almouloud (2004), que cita fatores geradores de obstáculos na aprendizagem de geometria, que podem ser de origem epistemológica, didática ou linguística. Nesse último caso, estão envolvidos aspectos como o pouco hábito de leitura por parte dos alunos e dificuldades em: decompor definições e propriedades matemáticas, interpretar um problema, explicar um raciocínio e argumentar com vocabulário apropriado (ALMOULOUD, 2004). Duval (2012) também aponta a importância da questão discursiva, que tem papel fundamental na apreensão dos conceitos, e será sobre sua perspectiva que discutiremos a seguir.

A questão da mudança de registro semiótico tem chamado a atenção de vários pesquisadores em Educação Matemática no Brasil, principalmente a partir da década de 1990, tendo como referência principal o trabalho de Raymond Duval. De acordo com esse autor, existem diferenças entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e pelos outros domínios, devido a três características principais da atividade matemática: (1) as representações semióticas são extremamente importantes, e os signos são utilizados não só para representar, mas também para fazer transformações (substituir alguns signos por outros); (2) o paradoxo cognitivo no que diz respeito ao acesso aos objetos matemáticos (é necessário distinguir o objeto representado da sua representação semiótica, mas a única forma de ter acesso a esse objeto é através da sua representação); (3) existe uma grande variedade de representações usadas em matemática, e muitas vezes são utilizados dois ou mais tipos de registros que representam um mesmo objeto (DUVAL, 2006).

As representações semióticas são classificadas em quatro tipos: língua natural; sistemas de escritas numéricas, algébricas e formais; figuras geométricas; gráficos cartesianos (DUVAL, 2003). Em relação às transformações das representações semióticas, Duval (2009) as atribui a dois tipos de operações cognitivas distintas: o tratamento que é uma operação cognitiva que promove a transformação do registro de representação dentro de um mesmo sistema semiótico, ou seja, é interna a um sistema e obedece a suas regras; a conversão que é uma operação cognitiva que promove a transformação da representação de forma que há mudança no tipo de registro, ou seja, os registros de saída e de chegada são de sistemas semióticos diferentes. Por exemplo, resolver uma equação é realizar um tratamento dentro do registro algébrico, e fazer a representação gráfica de uma função é fazer a conversão do registro algébrico para o gráfico.

Segundo Duval (2006), para que a compreensão em matemática seja possível, é necessário que o aluno consiga distinguir o objeto representado do conteúdo da representação, o que envolve coordenação de diferentes registros que representam um mesmo objeto. Por isso, são tão importantes as tarefas de conversão nas atividades matemáticas.

> É apenas pela investigação de variações de representação no registro fonte e variações de representação no registro alvo, que os alunos podem ao mesmo tempo perceber o que é matematicamente relevante em uma representação, realizar sua conversão em outro registro e dissociar o objeto representado do conteúdo de sua representação. (DUVAL, 2006, p.125. Tradução nossa)

Também é importante que as atividades contemplem a inversão na direção da conversão, ou seja, inverter o registro fonte com o registro alvo, o que muda radicalmente o problema a ser resolvido (DUVAL, 2006). Neste trabalho, vamos concentrar nossa análise em processos de conversão que acontecem em um sentido: da linguagem natural para a figura.

Duval destaca ainda que, para analisar o processo de conversão, é necessário levar em consideração o fenômeno da congruência semântica entre dois registros de representação pertencentes a sistemas semióticos distintos. A congruência semântica é associada ao custo cognitivo e existirá se atender a três critérios:

> Duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. (DUVAL, 2009. p.69)

Trata-se de uma situação de congruência, por exemplo, a conversão da frase: *um número acrescido de 12 unidades resulta no dobro do mesmo número*, para a equação: $x + 12 = 2x$, porque há uma correspondência direta entre as unidades significantes:

Quadro 1 – Correspondência entre as unidades significantes em um exemplo de conversão.

Um número	***acrescido de***	***resulta em***	***dobro do mesmo número***
X	$+ 12$	$=$	$2x$

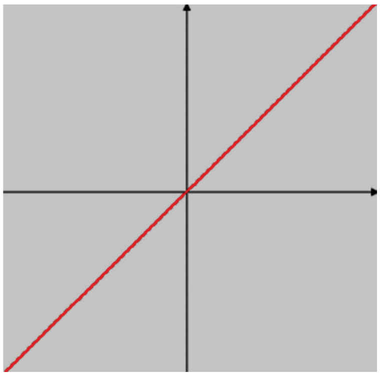
Fonte: autores.

À medida que um ou mais dos critérios citados não são atendidos, o nível de congruência diminui. Um exemplo de não congruência seria converter a frase: *volume de um cubo obtido a partir do aumento de 20% nas arestas de um cubo de aresta medindo a*, na expressão: $(1,2a)^3$.

De acordo com Duval (2009), o grau de não congruência é o que provoca a dificuldade na tarefa de conversão, o que pode ser agravado no caso de desconhecimento de um dos registros envolvidos na conversão. Para realizar a conversão o aluno precisa identificar as unidades significantes nos registros de saída e de chegada, que podem ser de naturezas diferentes de acordo com cada registro: as linguagens formais possuem unidades discretas, as figuras e os gráficos cartesianos possuem unidades não separáveis, e a língua natural apresenta possibilidades diferentes de classificação funcional de suas unidades (DUVAL, 2009). A representação de uma determinada reta, por exemplo, em cada um desses tipos de registros, ilustra como as unidades significantes são diferentes em cada um deles:

- Na representação através da equação y = x, três símbolos são utilizados, cada um pode ser entendido como uma unidade significante.
- Na representação gráfica, não é possível segmentá-la em unidades significantes.

Figura 1 – Representação gráfica da reta.



Fonte: autores.

- Na representação através da língua natural, há diversas possibilidades: "conjunto dos pontos cuja ordenada é igual à abscissa" ou "reta que é bissetriz dos quadrantes ímpares" ou "reta de coeficiente angular igual a 1 e que passa pela origem", entre outras. Nesses casos, uma unidade significante pode ser uma palavra ou um agrupamento de palavras.

Assim, visto que as atividades de conversão compreendem processos complexos e têm fundamental importância na compreensão dos objetos matemáticos, Duval (2003) aponta a importância de se pesquisar a aprendizagem matemática observando nas produções dos alunos os processos de mobilização de vários registros semióticos e a conversão de representações, que são aspectos específicos dessa área do conhecimento.

Com já foi dito, este trabalho tem como foco problemas contextualizados envolvendo trigonometria, que podemos incluir no campo da Geometria, principalmente neste caso que se trata da trigonometria no triângulo retângulo. O estudo desse campo tem características próprias que o distinguem das demais áreas da Matemática, Duval aponta que a resolução de um problema de geometria "exige uma forma de raciocínio que implica referência a uma axiomática local, mas que se desenvolve no registro da língua natural" (2012, p.29). Dessa forma, ela exige uma forma de expressão que vai ser intermediária entre a língua natural e as línguas formalizadas. A figura geométrica vai desempenhar um papel complexo na atividade cognitiva, dependendo do papel que ela tem na atividade matemática. Por outro lado, Duval (2012) afirma que "a heurística de problemas de geometria refere-se a um registro de representações espaciais que originam formas de interpretações autônomas. Entre essas interpretações, distinguiremos: as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras" (p.120).

As orientações didáticas, segundo Duval (2012), não distinguem claramente as apreensões perceptiva, operatória, discursiva, porém essa distinção, segundo o autor, é importante para compreender a forma de desenvolvimento do raciocínio exigido na resolução de problemas de geometria. Já que em uma atividade matemática, a figura "é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais" (DUVAL, 2012, p.120/121). Dessa forma, existe o conflito entre uma interpretação centrada apenas nos objetos que se destacam na figura e uma interpretação orientada pelas hipóteses presentes no enunciado, que nem sempre são explicitas na figura.

Segundo Duval, "os alunos se apegam, na grande maioria, à apreensão perceptiva" (2012, p.124). Dessa forma, ao resolver um problema, eles utilizam a figura produzida como referência, abandonando o enunciado, não realizando, assim, a interpretação discursiva da figura. Essa atitude é que vai fazer com que os problemas "acessíveis a estes alunos são aqueles cujos enunciados são semanticamente congruentes à figura construída ou a construir" (DUVAL, 2012, p.124-125).

Concordamos com Flores e Moretti (2006), os quais consideram que a utilização de figuras na resolução de problemas de geometria exige um "aprender a ver e a ler" essas figuras; porém, deve-se ir além da percepção imediata da figura, olhando-a de outros modos, sob outras configurações, além da "correspondência da figura e o texto, possibilitando, enfim, a exploração heurística" (FLORES; MORETTI, 2006, p.7). É através da apreensão discursiva que vai ocorrer a congruência entre a figura e o enunciado do problema, pois, segundo Duval, "a mesma figura, do ponto perceptivo, pode, deste modo, ser uma figura geométrica diferente, se modificamos o enunciado das hipóteses" (2012, p.133). Dessa forma, o apreendido nas figuras só será pertinente se estiver de acordo com o enunciado, implicando uma "subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva" (DUVAL, 2012, p.133)

A terceira forma de interpretação destacada por Duval é a apreensão operatória que, segundo ele, "é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis dessas modificações" (2012, p.125). Observar a apreensão perceptiva é importante devido à congruência semântica, que abre e fecha a porta de entrada da resolução de um problema, sendo que ela "permite dar um sentido dinâmico às características da figura, podendo-se, assim, fazer manipulações, física ou mental, sobre o todo ou parte da figura" (FLORES; MORETTI, 2006, p.7).

Nas observações, ficou-nos claro que, além da mudança de registro e das apreensões que apresentamos acima, a questão de interpretar um problema, explicar um raciocínio e argumentar com vocabulário apropriado, que já mencionamos citando Almouloud (2004), foi determinante na solução dos problemas. Para entendermos a questão do uso de um vocabulário adequado, recorremos a Carrião (2010).

Segundo Carrião, é o capital linguístico, usando o conceito de Bourdieu, que vai definir "a capacidade de utilizar as possibilidades oferecidas pela língua de avaliar praticamente as ocasiões de utilizá-las" (2010, p.22). É esse capital que vai proporcionar, ou não, o vocabulário adequado que aponta Almouloud (2004), possibilitando a apreensão semântica. O capital linguístico de um sujeito constitui-se nas suas interações sociais, na escola ou fora dela, estando sempre em construção. Porém, o conhecimento linguístico só funciona como capital em determinado meio social. Por exemplo, na aula de matemática, é o domínio de uma forma específica de discurso, próprio dela, que será reconhecido como legítimo. Dessa forma, o aluno deve compartilhar, além de um vocabulário adequado, pressupostos e valores com os demais participantes da sala de aula, para que a comunicação seja possível e que as atividades sejam desenvolvidas de maneira adequada.

A resolução de problemas com referência à semirrealidade, como já discutimos, depende não só da interpretação do enunciado, mas também do compartilhamento de pressupostos, que são determinantes para que o aluno possa fazer a apreensão linguística, e é nesse sentido que o capital linguístico dos alunos age de forma determinante.

A seguir descreveremos como foi realizado o trabalho, e como era o ambiente onde ele se realizou, para podermos contextualizar a análise que será apresentada posteriormente.

Metodologia

Neste trabalho, buscamos observar os processos de conversão de registros realizados pelos alunos para resolver problemas contextualizados na aula de Matemática. Para tanto, o estudo de campo foi do tipo etnográfico, como proposta por Green et al. (2001). Essa opção foi feita devido a dois motivos principais. O primeiro é que a pesquisa etnográfica ajuda a compreender os significados que têm as ações e os eventos para as pessoas ou os grupos estudados (ANDRÉ, 1995). O segundo se deve ao fato de um dos pesquisadores ter mantido contato com a turma observada por quatro meses, como estagiária. Dessa forma, já existia uma convivência entre ela e o ambiente investigado, possibilitando a participação do cotidiano das aulas de Matemática, o que, segundo Cameron (2001), é uma condição para esse tipo de pesquisa. A presença do pesquisador, quando integrado ao cotidiano da sala de aula, altera muito pouco o andamento normal das atividades. Dessa forma, suas observações possibilitaram que fossem obtidas informações sobre como era a relação dos alunos com a mudança de registros na resolução de problemas, no cotidiano das aulas de Matemática.

A coleta do material a ser analisado deu-se através de registros de observação das aulas, da gravação de episódios em vídeo e áudio e de consultas a materiais produzidos por alunos, como atividades e provas. O contato com o campo ocorreu de agosto a novembro de 2011, e os registros das aulas foram autorizados de acordo com as exigências estabelecidas pela escola pesquisada e pelo Comitê de Ética da Universidade Federal de Minas Gerais.

Optamos por filmar as aulas devido a sua eficácia em registrar as interações em sala de aula. Powell et al. (2004) apontam a filmagem em vídeo como o menos intrusivo e mais inclusivo dos meios de estudar os fenômenos de sala de aula. O que estamos chamando de episódio é um recorte da interação observada em uma aula, que tem começo e fim definidos. Nesse caso, será o período em que os alunos discutem a resolução de um problema.

Após a realização de todas as observações e gravações das aulas, escolhemos os episódios que consideramos mais relevantes para fazermos a transcrição, tendo em tela nossa questão e o referencial de análise. A seleção dos cinco episódios que analisamos deveu-se principalmente ao fato de os problemas terem sido resolvidos em grupos, praticamente sem ajuda do professor ou de estagiárias, levando a várias discussões entre os alunos, o que nos fornece mais elementos para tentar entender suas ideias e os caminhos percorridos durante a resolução.

O objeto de estudo situado em seu contexto

A escola

O Centro Pedagógico da UFMG é uma escola de tempo integral, responsável pelo Ensino Fundamental de nove anos, organizado em Ciclos de Formação Humana. Adota o sorteio como forma de ingresso dos alunos, por considerá-lo a forma mais democrática. Assim, pode-se perceber que as turmas são heterogêneas, com grande diversidade cultural e socioeconômica entre os alunos. Outra característica importante é que a escola emprega um método de avaliação qualitativo, através de fichas avaliativas, em que vários aspectos da aprendizagem são descritos. As aulas, em geral, são desenvolvidas através de atividades em grupo. No caso da Matemática, a resolução de problemas é uma estratégia pedagógica bastante usada. A maior parte das aulas tem um clima tranquilo, baseado no respeito e no diálogo entre professor e alunos. Além disso, a escola situa-se no *campus* de uma universidade, possui uma boa estrutura física, e seus alunos têm acesso a um ambiente universitário, bem como a vários equipamentos culturais, como bibliotecas, apresentações artísticas, etc.

O professor

O professor que participou da pesquisa concluiu a Licenciatura em Matemática no ano de 2003. Posteriormente, fez especialização (término em 2005) e mestrado profissional (término em 2011), ambos em Educação Matemática. Durante esse período, adquiriu ampla experiência na docência: lecionou Matemática no ensino básico em escolas das redes estadual, municipal e privada. Também foi professor em um curso de licenciatura em Matemática e, posteriormente, do Ensino Médio e técnico em uma escola da rede federal. Iniciou seu trabalho no Centro Pedagógico da UFMG, em agosto de 2011, ingressando através da aprovação em concurso.

A turma

De agosto a dezembro de 2011, a turma participante desta pesquisa foi acompanhada nas aulas de Matemática por duas estagiárias e, em algumas dessas aulas, também estava presente uma participante do Projeto Imersão Docente[2]. Assim, os alunos se habituaram a pedir ajuda frequentemente para resolver as atividades. Muitos pareciam inseguros, sempre perguntando como se fazia ou se estava certo o que foi feito. A partir disso, procuramos (professor e estagiárias) organizar melhor como seria feita essa ajuda, incentivando os alunos a tentarem agir por conta própria. Em vez de apenas mostrar como se faz o exercício ou problema, passamos a dar dicas e fazer perguntas.

Essa turma era do 9º ano, possuía 27 alunos e, durante o ano de 2011, teve três professores de Matemática. O terceiro professor deu aulas de setembro a dezembro, e foram as suas aulas que foram filmadas. Esse professor foi muito bem recebido pelos alunos, que gostou do

---

[2] Fazem parte desse projeto estudantes de licenciaturas, que acompanham as aulas de uma turma e realizam atividades de ensino de acordo com sua área de formação.

seu estilo de dar aula, e com isso passaram a se engajar mais nas atividades. Era necessário que ele muitas vezes chamasse a atenção devido a conversas sobre assuntos que não eram da aula e fizesse cobranças para o cumprimento das tarefas de casa, mas não havia problemas maiores em relação ao comportamento dos alunos.

As aulas

As aulas eram basicamente organizadas seguindo as etapas: apresentação do conteúdo, resolução de exercícios e/ou problemas (em aula e em casa) e correção com discussão das resoluções. Os alunos participavam, resolviam as atividades, trabalhavam individualmente, em duplas ou em trios. Nos momentos da correção, acompanhavam e discutiam o que era feito pelo professor no quadro, faziam muitas perguntas e apresentavam soluções diferentes. Em setembro, o professor começou fazendo uma revisão das relações métricas no triângulo retângulo, depois os alunos estudaram a propriedade da perpendicularidade da reta tangente com o raio da circunferência. Os alunos apresentaram muitas dúvidas sobre geometria, como, por exemplo: o que é trapézio, paralelogramo, triângulo isósceles; desconhecimento de propriedades de triângulos e quadriláteros notáveis. Aos poucos, começaram a se familiarizar com os conceitos, nomenclaturas, notações, propriedades. Em seguida iniciou-se o estudo sobre perímetro e área, de polígonos e circunferência.

Em novembro, as turmas começaram a estudar trigonometria no triângulo retângulo. O professor introduziu esse assunto utilizando uma apostila com atividades que trabalham a ideia de índice de subida como razão entre altura e afastamento, depois apresentou as definições das razões trigonométricas. Depois de os alunos resolverem os problemas da apostila, e o professor fazer a correção, eles fizeram vários exercícios do livro didático, usando a tabela trigonométrica dos ângulos de 1º a 89º e também dos chamados ângulos notáveis (sem usar aproximações para os valores, trabalhando com radicais). Surgiram muitas dúvidas, tanto nos cálculos com números decimais como com radicais, e, na medida do possível, o professor retomou alguns desses conceitos e procedimentos.

A última atividade sobre trigonometria no triângulo retângulo, realizada antes da prova, foi uma lista elaborada pelo professor com 11 problemas para que os alunos resolvessem em grupos, e são alguns momentos das resoluções desses problemas que analisaremos neste trabalho.

Essa aula trouxe algumas novidades (considerando-se o que foi visto durante período de observação): os alunos deveriam resolver as atividades sem a ajuda do professor ou das estagiárias, e organizaram-se em grupos maiores, o que trouxe algumas dificuldades em relação a lidar com o ritmo de aprendizagem de cada um. Além disso, houve uma mudança no estilo dos problemas. Na maior parte dos exercícios do livro que os alunos resolveram, mesmo aqueles com alguma contextualização, o enunciado incluía o desenho, e era necessário somente elaborar uma ou mais equações envolvendo razões trigonométricas para descobrir a medida de segmentos ou, eventualmente, de ângulos. Já na lista em questão, apareceram problemas contextualizados em que não era dado nenhum desenho e, portanto, se o aluno considerasse necessário, teria de elaborar um desenho partindo dos dados do enunciado.

Os grupos de alunos

Os episódios que vamos analisar envolvem dois grupos de alunos que estavam resolvendo os problemas propostos na última lista citada acima. Os dois grupos observados serão descritos abaixo, estamos utilizando pseudônimos para preservar a identidade dos alunos envolvidos:

Grupo 1: Cláudio, Marina, Ana, Daniel, Túlio.

Esse grupo trabalhou de forma um pouco fragmentada. Cláudio não interagiu muito com os outros, Marina e Ana conversavam mais entre si, assim como Daniel e Túlio, e depois compartilhavam com o grupo todo. Eles se mantiveram concentrados na tarefa proposta, conseguindo resolver grande parte da lista de problemas na aula.

Cláudio geralmente resolvia sozinho os problemas, às vezes pedia ajuda ao professor ou às estagiárias, mas não tinha muitas dificuldades. Resolvia as atividades rapidamente, era um dos primeiros da turma a terminar.

Marina e Ana quase sempre faziam as atividades juntas, sem muitas dificuldades. Conversavam pouco e às vezes pediam ajuda. Não costumavam se manifestar durante a correção dos exercícios.

Daniel e Túlio quase sempre faziam as atividades juntos. Daniel faltava a várias aulas (devido a questões de saúde) e tinha muitas dificuldades. Pedia ajuda a Túlio, ao professor ou às estagiárias em praticamente todas as atividades, era inseguro em relação ao que fazia. Em geral, Túlio o ajudava, mas também pedia ajuda várias vezes.

Grupo 2: Sabrina, Tiago, Carla, Bianca, Júlio, Marcos.

Esse grupo trabalhou de forma ainda mais fragmentada que o primeiro. Carla e Bianca se comportavam como uma dupla, não participaram das conversas do grupo, resolviam tudo mais rapidamente. Sabrina também resolvia os problemas mais rapidamente, conversando mais com Tiago. Júlio e Marcos acabaram ficando um pouco isolados e conversaram mais entre si, mas em alguns momentos a discussão acontecia entre todos os quatro últimos alunos citados. Marcos fez algumas cobranças para que o grupo esperasse para resolver os problemas juntos, mas isso não aconteceu. Percebe-se que as meninas estavam em um ritmo muito diferente dos meninos.

Sabrina e Tiago eram namorados, quase sempre faziam as atividades juntos. Sabrina tinha facilidade em aprender matemática, apresentava um desempenho muito bom nas provas, ajudava Tiago e outros colegas também. Tiago não tinha muitas dificuldades, conseguia acompanhar o ritmo de Sabrina, porém, com cobranças dela. Os dois sempre participavam das correções dos exercícios.

Carla não tinha muitas dificuldades com as atividades, que costumava fazer individualmente. Pedia ajuda várias vezes, ficando muito desanimada quando errava ou quando não sabia fazer alguma coisa.

Bianca também não tinha muitas dificuldades com os exercícios, costumava pedir ajuda e tinha uma participação significativa nas discussões durante as aulas.

Júlio era um aluno disperso. Não ficava em silêncio durante as atividades, conversava sobre outros assuntos e até cantava. Mas conseguia acompanhar razoavelmente o que acontecia nas aulas e fazia os exercícios juntamente com os colegas.

Marcos também era disperso, muito inquieto. Apesar da sua facilidade com a matemática, nem sempre fazia todas as atividades, porque andava pela sala, trocava de lugar, conversava com os colegas. Também pedia ajuda várias vezes, quase sempre para confirmar que estava resolvendo o exercício corretamente.

Essas características descritas acima certamente refletiram na dinâmica dos grupos, nas suas formas de resolver os problemas, nos ritmos, nas perguntas, nas discussões, nas ideias. Esses aspectos estiveram presentes nas interações observadas, sendo importante considerar a questão de que dentro de cada grupo havia fragmentações, as interações não aconteciam no grupo como um todo, mas em subgrupos, ou duplas, ou, até mesmo, individualmente. Fazer atividades em grupos maiores não era um hábito nessa turma, e assim não foram exploradas todas as potencialidades e vantagens que esse tipo de interação poderia propiciar ao aprendizado. Mas, observando os comportamentos dos alunos ao longo do tempo em que houve o contato e comparando com esses momentos analisados neste trabalho, foram perceptíveis algumas mudanças no engajamento para resolver as atividades propostas em aula: eles passaram a se esforçar mais, tentando pensar mais antes de pedir ajuda. Também contribuiu para isso o fato de que, na aula em que aconteceram os episódios analisados, eles se preparavam para fazer uma avaliação.

Resultados e discussão

Observamos que o primeiro passo dos alunos para resolver os problemas era sempre desenhar um triângulo retângulo. Isso acontecia de forma quase automática. Barbosa (2004) destaca que tanto os conhecimentos produzidos pelos matemáticos quanto as atividades matemáticas escolares estão relacionados a um determinado contexto. O principal objetivo da aula em questão não era trabalhar a resolução de problemas contextualizados de forma geral, mas sim aprofundar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, *através* da resolução de problemas contextualizados. Portanto, o contexto de realização das atividades era o estudo de um determinado conteúdo, e isso influenciou fortemente a escolha de estratégias para resolução por parte dos alunos. De acordo com Lamonato e Passos (2011), a utilização de problemas para reforçar conceitos e procedimentos previamente ensinados tem sido a forma com que mais frequentemente a resolução de problemas aparece na sala de aula. Na aula que analisamos, a resolução dos problemas não passou pelo questionamento de qual ferramenta matemática poderia ser utilizada. Os alunos deduziram que deveriam utilizar as razões trigonométricas porque esse era o assunto das aulas e da prova. Assim, o que seria a primeira etapa da resolução já estava "feita"; a questão principal era *como* a trigonometria seria utilizada.

Do ponto de vista da teoria de Duval, a resolução dos problemas pelos alunos iniciava-se com uma conversão: do registro da linguagem natural do enunciado em outro registro, o das figuras. Este é considerado um registro intermediário, segundo Duval (2004), para se chegar à conversão proposta no problema, a qual é para um registro algébrico. Isso vai de acordo com a ideia de que um registro pode permitir a realização de tratamentos de forma mais eficiente que outros e, particularmente, que os registros analógicos (figuras, esquemas, diagramas) podem ser mais potentes que os registros de linguagem, em se tratando de problemas geométricos (DUVAL, 2009). Depois de desenharem uma figura que representasse a situação, os alunos faziam uma segunda conversão, dessa vez do registro figural para o algébrico: elaboravam uma equação envolvendo as razões trigonométricas seno, cosseno ou tangente, e a escolha de qual razão utilizar dependia fundamentalmente do desenho feito. Por último, realizavam o tratamento dentro do registro algébrico, ou seja, resolviam a equação. Dessa forma, nossa análise dar-se-á sobre um processo de resolução formado por duas conversões consecutivas; em seguida, haverá o tratamento dentro do último registro.

Figura 2 – Representação do processo de resolução dos problemas.

Segundo Duval (2006), a conversão precisa ser analisada nos dois sentidos, e não apenas em um deles. Porém, os alunos pouco voltavam ao enunciado. Como afirma Duval (2012), os alunos, "diante de um problema: eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado" (2012, p.124). Essa ação, segundo ele, "marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura" (2012, p.124).

Mesmo considerando importante essa questão, neste trabalho concentramos a análise na conversão do registro da língua natural para o registro da figura, já que ela foi mais diretamente perceptível nas atividades observadas. A razão de serem problemas desse tipo deve-se principalmente à forma e ao contexto em que a pesquisa foi realizada: optamos por realizar a pesquisa em situação natural de sala de aula, sem interferir na elaboração ou seleção das atividades; observamos apenas o que foi preparado pelo professor. Ou seja, nenhuma atividade foi elaborada pelos pesquisadores, pois não optamos por fazer um estudo do tipo clínico. Dessa forma, as atividades não necessariamente explicitavam elementos considerados importantes do ponto de vista da teoria de Duval, como, por exemplo, problemas que explorem os dois sentidos da conversão.

Como foi citado anteriormente, os alunos já haviam realizado, em outras aulas, vários exercícios envolvendo trigonometria no triângulo retângulo, em que era dado o desenho, e eles precisavam usar as razões trigonométricas para encontrar medidas desconhecidas. Assim, a segunda conversão, do registro figural para o algébrico, já havia sido bastante explorada. Em relação ao tratamento, que consistiu em resolver equações de primeiro grau com coeficientes que em geral não eram números inteiros, aconteceram muitas discussões no grupo, e era comum, nessa turma, as dúvidas em relação a operações com números fracionários, decimais e radicais, ou seja, o tratamento nem sempre era uma etapa tranquila na resolução dos problemas.

Observa-se que, nas primeiras atividades, como o desenho era dado junto com o enunciado, os alunos apresentavam apenas a apreensão perceptiva, fazendo a interpretação centrada apenas nos objetos que se destacam na figura. Quando os desenhos não eram fornecidos, essa atitude passou a não ser suficiente para resolver os problemas. Percebemos, então, que o momento de maior dificuldade no processo de resolução dos problemas deu-se na primeira conversão: da linguagem natural para a figura. Segundo Duval (2009) a conversão de uma expressão em língua natural para representação figural revela-se muito complexa. Para realizar a conversão, é necessário identificar as unidades significantes dos registros de saída e de chegada, que são de naturezas diferentes. Além disso, trata-se de registros multifuncionais, em que os tratamentos não são algoritmizáveis (DUVAL, 2003). Assim, não há regras prontas para realizar a conversão, já que esta não se reduz a uma associação direta entre elementos, ou decodificação, mas trata-se de uma transformação que envolve uma compreensão mais ampla das representações.

Além disso, na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas, é fundamental que os alunos façam a interpretação discursiva dos elementos da figura, utilizando as informações do enunciado. Isso pode levar a dificuldades, de acordo com a congruência entre os enunciados e a apreensão discursiva (DUVAL, 2012).

Dessa forma, o foco da nossa análise será a primeira etapa da resolução dos problemas, ou seja, a conversão da linguagem natural para a figura.

Mesmo tendo como foco a análise da conversão de acordo com a teoria de Duval, buscamos uma compreensão mais ampla dos fenômenos em questão, e dessa forma também foi necessário levar em consideração outros aspectos presentes nos mesmos, relacionados principalmente às características dos problemas matemáticos escolares e de questões sobre a leitura, interpretação do texto, uso da linguagem, cujas interpretações foram fundamentadas utilizando outros autores como, por exemplo, Skovsmose (2000) e Carrião (2010).

Nos cinco episódios analisados, tivemos dois em que os problemas foram resolvidos com facilidade, havendo pouca ou nenhuma discussão entre os alunos do grupo. A seguir faremos uma síntese dos episódios, em seguida uma análise daqueles em que houve mais momentos de dificuldades, dúvidas, discussões.

Episódio 1 – Problema 1 – Grupo 1

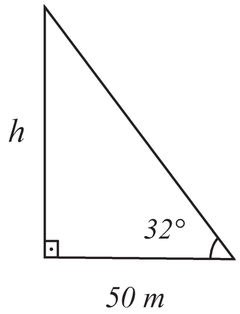
Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32º. A altura do edifício é, aproximadamente:

a) 28,41m *b) 29,87m*

c) 31,24m *d) 34,65m*

Primeiro os alunos fizeram o desenho de um triângulo retângulo, colocaram os dados numéricos na figura, depois utilizaram a tangente para montar a equação. Houve algumas discussões sobre as operações e sobre qual alternativa mais se aproximava da resposta que encontraram. As resoluções ficaram basicamente assim:

Figura 3 – Reprodução do desenho feito pelos alunos para resolver o problema.



$$\text{tg } 32^\circ = \frac{h}{50} \qquad 0{,}62 = \frac{h}{50} \qquad h = 0{,}62 \,.\, 50 \qquad h = 31\text{m}$$

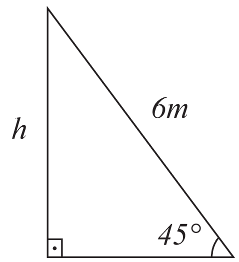
Fonte: a pesquisa.

Episódio 4 – Problema 6 – Grupo 1

Para alcançarmos o 1º andar de um edifício, subimos uma rampa de 6m que forma com o solo um ângulo de 45º. Qual é a altura desse primeiro andar?

Também nesse caso os alunos começaram fazendo o desenho de um triângulo retângulo, colocaram os dados numéricos na figura, depois utilizaram o seno para montar a equação. Túlio comentou que esse era "muito fácil". Houve algumas discussões sobre os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, e sobre as operações. As resoluções ficaram basicamente assim:

Figura 4 – Reprodução do desenho feito pelos alunos para resolver o problema.



$$\text{sen } 45^{\circ} = \frac{h}{6} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{6} \qquad 2h = 6\sqrt{2} \qquad h = 3\sqrt{2}$$

Fonte: a pesquisa.

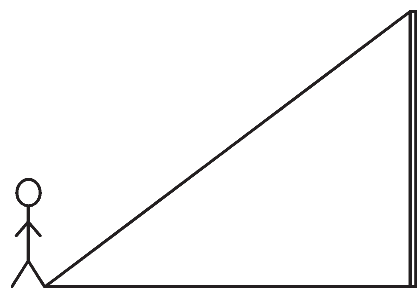
Na resolução dessa lista, tivemos três problemas que originaram discussões, divergências e erros no processo de resolução. Procuramos identificar, em de cada um deles, as principais dificuldades encontradas pelos alunos.

Episódio 2 – Problema 2 – Grupo 1

Calcular a altura de um poste visto sob um ângulo de 60º por um observador com 1,80m de altura que se encontra a 10m do poste.

Os alunos tiveram dificuldades em articular os significados da palavra altura, que é utilizada no dia a dia em várias situações de medição, principalmente para distâncias verticais, e que em geometria é o nome de um determinado segmento, definido tanto para figuras planas quanto espaciais. Eles concentraram a atenção na ideia de altura de um triângulo, particularmente inserida numa imagem típica de problemas de trigonometria, em que a altura corresponde a uma cateto que, em geral, é desenhado na posição vertical. Com essa ideia de altura, não seria possível existirem duas no mesmo triângulo, o que originou a questão de onde "encaixar"[1] no desenho a altura do observador. Essas dúvidas são expressas principalmente nas falas de Ana, que inicia a discussão perguntando "Que que tem a ver a altura do sujeito?" e, posteriormente, "Eu quero saber como é que você vai por duas alturas em um triângulo", e também na fala de Daniel "E é triângulo retângulo ainda". Os dois questionaram isso para Túlio, que afirmou saber resolver o problema, fazendo um desenho assim:

Figura 5 – Reprodução do desenho feito pelo aluno para resolver o problema.



Fonte: a pesquisa.

O grupo então discute e decide que a altura do homem não tem "nada a ver" (nas palavras de Túlio) e, portanto, não será utilizada na resolução. Consideramos que existe aqui um problema de apreensão discursiva, em que o aluno tem dificuldade de associar os elementos da figura que elabora com os do enunciado do

[1] Estamos chamando de "encaixar" a ação em que o aluno marca o valor no desenho sem ter certeza do local exato, agindo como em um jogo de encaixes.

problema, devido ao fato de não serem semanticamente congruentes.

Nesse caso, principalmente, é perceptível a presença de princípios dos problemas com referência à semirrealidade (SKOVSMOSE, 2000), ou seja, é necessário utilizarem-se alguns pressupostos para a resolução: primeiramente, precisa-se considerar que o observador está de pé, e que a distância dos seus olhos ao solo é 1,80m. Além disso, a expressão "visto sob um ângulo" deve ser entendida como sendo o ângulo entre a horizontal e a linha que liga o olho ao topo do poste. Sem levar em conta essas noções, adquiridas à medida que o aluno se familiariza com problemas escolares que fazem referência ao cotidiano, não é possível resolver o problema da forma esperada, originando dificuldades como as observadas nesse episódio. Nesse caso, a maior dificuldade não estava na mudança de registro, mas sim no não compartilhamento dos pressupostos. Portanto, o capital linguístico dos alunos era insuficiente para eles terem o desempenho esperado para a atividade, pois o repertório de uso de palavras como altura, ou expressões como "visto sob um ângulo" não englobavam os intencionados no enunciado.

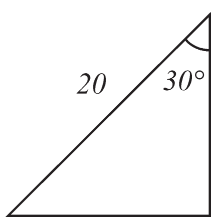
Episódio 3 – Problema 3 – Grupo 2

Uma rampa lisa de 20m de comprimento faz um ângulo de 30º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira se eleva verticalmente de quanto?

Os alunos interpretaram de duas formas diferentes o que é o comprimento da rampa, e Marcos confundiu os conceitos de horizontal e vertical.

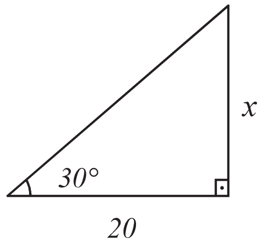
Marcos fez um desenho como a figura 6 e Júlio desenhou como na figura 7:

Figura 6 – Reprodução do desenho feito pelo aluno Marcos para resolver o problema.



Fonte: a pesquisa.

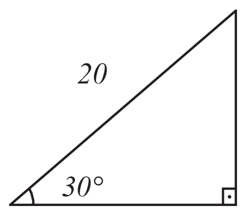
Figura 7 – Reprodução do desenho feito pelo aluno Júlio para resolver o problema.



Fonte: a pesquisa.

Os dois alunos discutiram sobre qual forma estava correta, em relação a onde colocar a medida 20. Tiago também teve dúvidas, e Sabrina foi quem decidiu o impasse e direcionou a resolução com a hipotenusa medindo 20. Depois, ela disse que Marcos "colocou errado" o valor de 30º, e ele somente concordou que "horizontal é deitado" depois de confirmar com a estagiária pesquisadora. Os desenhos ficam assim:

Figura 8 – Reprodução do desenho feito pelos alunos para resolver o problema.



Fonte: a pesquisa.

Além disso, houve dificuldades em entender o que deveria ser calculado, já que a frase contendo a pergunta é organizada de forma incomum, se comparada aos demais problemas da lista e também aos problemas que os alunos estavam acostumados resolver. Isso pode ser percebido na fala de Marcos: "Então quer que eu descubro... Sabrina... quer que eu descubro isso ou isso?". Provavelmente ele está se referindo aos catetos do triângulo da figura 8, mas no vídeo não está claro para onde está apontando.

Também percebemos esse mesmo tipo de dificuldade observando a fala de Tiago (em tom de impaciência): "Por que não fala 'descubra a altura'?... Não, tá falando '*uma pessoa que sobe essa rampa inteira se eleva verticalmente de quanto*?[2]'

[2] Nessa parte, há mudança na entonação da voz.

Pô, fala 'qual que é a altura da rampa'!". Aqui percebemos a apreensão discursiva, porém existe uma negociação de significados da expressão *"se eleva verticalmente de quanto"* que a princípio não fazia sentido para os alunos, mas que é incorporada, ampliando a competência comunicativa dos mesmos.

Episódio 5 – Problema 7 – Grupo 1

Um avião levanta voo em A e sobe fazendo um ângulo constante de 15º com a horizontal. A que altura estará e qual a distância percorrida quando alcançar a vertical que passa por uma igreja situada a 2km do ponto de partida?

As dificuldades ao interpretar o enunciado desse problema parecem ter surgido devido ao fato de a pergunta ter sido feita juntamente com o fornecimento de um dado, tudo em um mesmo período, o que, de certa forma, não estava nos pressupostos compartilhados. Isso dificultou o entendimento sobre quais medidas eram conhecidas e o que deveria ser calculado, que são dois valores. Cláudio "encaixou" corretamente a medida 2 no seu desenho, mas não colocou as incógnitas. Ana também identificou onde colocar o 2, mas marcou como incógnita apenas a altura. Marina não colocou a medida 2 e também marcou como incógnita apenas a altura. Túlio disse que "o x vai ficar aqui em cima, né?... Distância percorrida..." e "A altura a gente já sabe". Marina então disse que "Tem que descobrir a altura e a distância". E Ana explicou: "Não deu a altura, ela deu a distância da igreja e do ponto inicial".

A partir dessas observações, criamos quatro categorias que agrupam as principais dificuldades percebidas na resolução dos problemas. Elaboramos o quadro a seguir, que relaciona a categoria aos episódios que elas apareceram. Em seguida, vamos analisar essas dificuldades.

Quadro 2 – Caracterização das principais dificuldades encontradas na resolução dos problemas.

	Dificuldades	**Episódio 2 Problema 2**	**Episódio 3 Problema 3**	**Episódio 5 Problema 7**
1	"Encaixar" uma informação no desenho	X		X
2	Identificar qual é a pergunta, o que o problema pede para ser calculado.		X	X
3	Entender a organização sintática das frases		X	X
4	Interpretar/conhecer significado de palavras ou expressões	X	X	

Fonte: a pesquisa.

As dificuldades observadas em relação à conversão estão relacionadas ao fato de o registro na forma de figura possuir unidades semânticas não separáveis. A correspondência entre as unidades significantes nos dois registros é um dos critérios de congruência, que ficou comprometido devido ao tipo de registro de chegada. Dessa forma, todas as conversões tiveram certo grau de não congruência.

Em (1) *"Encaixar" uma informação no desenho*, a dificuldade da conversão está em identificar o elemento que corresponde, no registro de chegada, a um determinado dado do problema (registro de saída). Mesmo que no enunciado do problema seja identificada qual é a unidade significante, no registro da figura não é identificada a unidade correspondente, o elemento no desenho associado àquela palavra ou expressão. Ou seja, os alunos não fazem a correspondência das unidades significantes nos dois registros, já que a figura não possui unidades separáveis. A dificuldade de realizar atividade de conversão, de acordo com o nível de congruência, deve-se principalmente devido à natureza do registro de chegada (DUVAL, 2009). Existe aqui um problema na apreensão discursiva, pois, em alguns momentos, os alunos não mantém a congruência entre a figura ao enunciado do problema.

Em (2) *Identificar qual é a pergunta, o que o problema pede para ser calculado*, também temos a dificuldade com a correspondência das unidades significantes dos dois registros no processo de conversão. Percebemos que os alunos criam uma incógnita no desenho, mas surge o obstáculo de identificar quais elementos no registro de saída (enunciado) que devem corresponder à incógnita no registro de chegada (DUVAL, 2009). Nesse caso, a questão central da dificuldade da conversão é a identificação das unidades significantes do registro da língua natural.

Nas categorias (3) e (4), *Entender a organização sintática das frases* e *Interpretar/conhecer significado de palavras ou expressões*, respectivamente, do ponto de vista da teoria dos registros de representação semiótica, a dificuldade dos alunos reside principalmente em conhecer o funcionamento de um dos registros semióticos envolvidos: a língua natural, já que isso influencia muito nas dificuldades ligadas à não congruência da conversão (DUVAL, 2009). Nesse sentido, buscamos também outros suportes teóricos para auxiliar na compreensão sobre o uso da linguagem em sala de aula, seus aspectos culturais e sociais envolvidos. Um ponto importante é que a familiarização com as convenções presentes nos problemas da semirrealidade (SKOVSMOSE, 2000) contribui para o sucesso na resolução desses tipos de problemas, muito comuns nas atividades matemáticas escolares. Além disso, temos a questão do capital linguístico, construído nas interações sociais vivenciadas pelo aluno, sendo determinante para que ele compreenda e utilize o vocabulário adequado na sala de aula, possibilitando a apreensão semântica (CARRIÃO, 2010).

Essas categorias estão inter-relacionadas entre si, e referem-se a aspectos envolvidos na leitura/interpretação de textos e na conversão de registros semióticos: grau de congruência semântica e conhecimentos sobre a língua natural. Percebemos que a conversão é uma etapa complexa da resolução dos problemas e, nos casos em questão, implica coordenar dois tipos de registros de naturezas diferentes, sendo que, de um problema para outro, houve variação no nível de congruência da conversão, aspecto fundamental para compreender as dificuldades originadas (DUVAL, 2009). O desenvolvimento dessas capacidades é essencial para a compreensão de conceitos matemáticos, e para isso são importantes pesquisas a respeito das produções dos alunos na realização das atividades de conversão (DUVAL, 2003; 2006).

Considerações finais

A partir dessa discussão sucinta sobre os episódios, pode-se perceber que algumas das principais dificuldades apresentadas pelos alunos ao resolver problemas contextualizados envolvendo trigonometria no triângulo retângulo estão diretamente relacionados à atividade de conversão de registros semióticos: transformar o enunciado (linguagem natural) em um desenho (representação figural). A realização das etapas posteriores (elaborar equações a partir dos desenhos e resolvê-las) foi facilitada principalmente devido ao desenvolvimento de um trabalho anterior, com exercícios sobre razões trigonométricas, mesmo que tenham sido sem o uso de problemas contextualizados e tenham focado mais na realização de procedimentos. Também ficou claro que os processos de conversão constituíram um momento importante da aprendizagem, em que os alunos discutiram, negociaram e validaram estratégias de resolução, além de buscar uma melhor compreensão dos conceitos. Esperamos que essas discussões propiciem contribuições aos educadores matemáticos para entender melhor como os alunos interagem com atividades matemáticas desse tipo e para pensar sobre propostas de ensino que considerem esses aspectos.

A metodologia de observação utilizada, que registrou a interação verbal, trouxe elementos que normalmente não estão presentes na análise do texto escrito. Dessa forma, consideramos que essa observação propiciou uma maior abrangência, levando-nos a analisar elementos que fazem parte do contexto de produção dos enunciados. A principal conclusão que tiramos dessa análise é que o contexto da aula, as atividades para estudar relações trigonométricas e a preparação para realização de uma avaliação sobre o conteúdo foram fatores essenciais para que os alunos decidissem utilizar esse conceito para resolver os problemas. Isso nos leva a refletir sobre como propor atividades que exijam novas formas de pensar e agir, considerando-se que o fazer pedagógico, incluindo os processos de avaliação, também exerce forte influência sobre como os alunos vão se relacionar com os conceitos e como será a aprendizagem deles.

Por fim, consideramos que, apesar da análise da mudança de registro trazer uma grande contribuição para o entendimento do processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, é necessário que se faça uma análise do contexto dessa aprendizagem, pois ela nos revelará questões que não se explicitam no texto escrito.

Referências

ALMOULOUD, S. A. A geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje? In: VII EPEM – ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. São Paulo, 2004.

ANDRÉ, M. E. D. A. *Etnografia da prática escolar*. Campinas: Papirus, 1995.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a modelagem na Educação Matemática do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. *Anais...* Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BRASIL. Secretaria de Ensino Médio. *Ciência da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEB. (Orientações para o Ensino Médio, v.2), 2006.

CAMERON, D. *Working whith spoken discourse.* London: Sage, 2001.

CARRIÃO, A. *Marcas do discurso da matemática escolar:* uma investigação sobre as interações discursivas nas aulas do Ensino Médio. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. 226p.

______. As diferentes posições sociais na relação professor alunos. *Zetetiké*, v.18, p.17-48. 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

______. The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 61, p.103-131. 2006.

______. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. *Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v.1, p.5-13, UFSC: 2006.

GREEN, J. L.; DIXON, C. N.; ZAHARLICK, A. Ethnography as a logic of inquiry. In: FLOOD, S.; SQUIRE, J.; JENSEN, J. (Ed.). *Research in the Teaching of the English Language and Arts*. Mahwan, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. p.201-204, 2001.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para ensino de matemática. *Zetetiké,* FE/Unicamp, v.19, n.36, p.51-74. 2011.

MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática. In: CURY, Helena Noronha (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores:* reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. Cap.2, p.41-62.

POWELL, A.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, Rio Claro, ano 17, n.21, p.81-140, 2004.

SILVA, F. H. S.; SANTO, A. O. E. *A contextualização:* uma questão de contexto. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife. 2004.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. *Bolema*, Rio Claro/SP, v.13, n.14, 2000.

Carolina Soares Rodrigues – Mestre em Educação Matemática pela UFOP, professora da Escola Técnica – Universidade Federal de Minas Gerais.

Airton Carrião – Doutor em Educação pela UFMG, professor da Universidade Federal de Minas Gerais.