

MODELAGEM MATEMÁTICA EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: PARA ALÉM DE UMA INVESTIGAÇÃO

Mathematical Modeling in Classes of Differential and Integral Calculus: Beyond an investigation

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Resumo

A prática de atividades de modelagem matemática nas aulas de Matemática, ainda que de forma pouco expressiva, se faz recorrente entre professores e pesquisadores interessados na área. Neste artigo, apresentamos resultados parciais de uma investigação no âmbito de um projeto de pesquisa que tem a modelagem matemática como uma das tendências da Educação Matemática que permite o ensino de conteúdos matemáticos via situações-problema com dados oriundos de contextos não necessariamente matemáticos. A pesquisa que realizamos tem o objetivo de evidenciar se os alunos de um curso de graduação em Tecnologia em Alimentos retomam a situação que modelaram ao estudarem outros conteúdos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, em um primeiro momento realizamos uma análise da atividade desenvolvida com o intuito de evidenciar se ela apresenta potencial para que os alunos realizem exploração e aplicação de modelos matemáticos. A partir da análise dos registros escritos, das falas e gestos de um dos grupos que desenvolveu a atividade durante a disciplina, evidenciamos que a atividade apresenta tal potencial e que os alunos revisitam e entendem os conteúdos retomando a situação ora por similaridade, ora por solicitação da professora.

Palavras-chave: Educação Matemática. Atividade de Modelagem Matemática. Modelo

matemático. Envolvimento dos alunos. Cálculo Diferencial e Integral 1.

Abstract

The practice of mathematical modeling activities in mathematics classes, although not expressive, is recurrent among teachers and researchers interested in the area. In this article we present partial results of an investigation within a research project that has the mathematical modeling as one of the trends of Mathematics Education that allows the teaching of mathematical contents through problem situations with data coming from contexts not necessarily mathematical. The research that we carried out has the objective to evidence if the students of an undergraduate course in Technology in Food retake the situation that they modeled when studying other contents approached in the discipline of Differential and Integral Calculus. To do this, we first performed an analysis of the activity developed with the intention of evidence if it presents potential for students to explore and apply mathematical models. From the analysis of the written records, from the speeches and gestures of one of the groups that developed the activity during the discipline, we evidenced that the activity has such potential and that the students revisit and understand the contents, resuming the situation nowadays by similarity, sometimes by request of the teacher.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling Activity. Mathematical model. Involvement of students. Differential and Integral Calculus 1.

Introdução

Práticas de sala de aula que fazem uso de diferentes abordagens metodológicas têm instigado pesquisadores da área de Educação Matemática. Neste contexto, um grupo de professores/pesquisadores de uma universidade federal do Estado do Paraná, de que a autora deste texto faz parte, empreendeu esforços em atrelar pesquisa e prática nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.¹ Neste artigo, trazemos resultados parciais do projeto de pesquisa “*Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino*” desse grupo de professores/pesquisadores.

Entre as práticas incorporadas em sala de aula para a investigação proposta no projeto supracitado, a modelagem matemática é apontada como uma das tendências da Educação Matemática, por possibilitar fazer uma abordagem matemática para situações não essencialmente matemáticas (ALMEIDA; BRITO, 2005). A partir de situação oriunda da realidade, é possível realizar uma interpretação em linguagem matemática de dados coletados e sistematicamente analisados. Nesse sentido, entendemos que a modelagem² tem “potencialidades enquanto oportunidade para os alunos compreenderem os objetos matemáticos, conhecer e relacionar as várias representações desses objetos e utilizá-los para interpretar fatos da realidade” (SILVA, 2017, p.157). Desse modo, nosso entendimento sobre modelagem está alicerçado no fato de esta ser uma alternativa pedagógica que, a partir de uma situação inicial, oferece uma solução para um problema originário dessa situação em que procedimentos matemáticos se fazem presentes.

Pesquisas que relatam práticas de modelagem matemática em sala de aula encontram-se cada vez mais presentes na literatura. Entre essas pesquisas, destacamos as desenvolvidas por Blum e Niss (1991), Barbosa (2001), Bassanezi

(2002), Almeida e Dias (2007), Legé (2005), Rocha e Bisognin (2009), Vizolli (2010), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Soares e Borba (2012), Goerch e Bisognin (2014), Iglioni e Beltrão (2015), Almeida e Silva (2015), Reit e Ludwig (2015), Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016) e Silva (2017).

O que nos move em nossa investigação, no entanto, é evidenciar se uma atividade de modelagem matemática desenvolvida em sala de aula a partir de uma temática escolhida pelos alunos se faz relevante para eles ao ponto de, em outras situações ou conteúdos da disciplina de Cálculo, retomarem a mesma situação sem que esta lhes seja sugerida. Nossas reflexões, para tanto, são subsidiadas na análise de uma atividade de modelagem desenvolvida por um grupo de alunos do primeiro semestre do curso de graduação em Tecnologia em Alimentos.

Com esse intuito, organizamos esse artigo em cinco seções subsequentes. Na primeira, tratamos de nosso entendimento sobre modelagem matemática; em seguida, apresentamos procedimentos organizados para o desenvolvimento da pesquisa. A terceira seção é destinada à descrição e análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida, e a quarta, à análise realizada para as atividades desenvolvidas em outros conteúdos ou situações da disciplina. Finalizamos com a quinta seção destinada às considerações sobre a investigação realizada.

Sobre modelagem matemática

Fundamentadas no entendimento de que atividades de modelagem matemática possibilitam uma interpretação matemática de uma situação com origem fora do contexto matemático é que adotamos a compreensão de que modelagem consiste em uma alternativa pedagógica para ensinar matemática. Trata-se de abordar atividades que têm como ponto de partida uma situação inicial (problemática) e como ponto de chegada uma situação final (solução para a situação inicial). No caminhar rumo a uma interpretação matemática para a situação inicial, conceitos e procedimentos matemáticos se fazem presentes. Almeida e Silva (2012) destacam que

[...] um aspecto importante numa atividade de modelagem matemática é a necessidade de os próprios

¹ Neste texto, a expressão Cálculo Diferencial e Integral será indicada por Cálculo.

² Em alguns momentos, utilizamos o termo modelagem para nos referirmos à Modelagem Matemática.

alunos, a partir de uma situação-problema não matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise (ALMEIDA; SILVA, 2012, p.627)

De forma geral, os “próprios alunos” de antemão podem não ter consciência da Matemática presente na situação-problema investigada. Nesse sentido, corroboramos Vizolli (2010) quando ele afirma que o professor é responsável pelo

[... desafio de identificar o modo como as pessoas organizam e operam matematicamente com os dados e informações presentes nos problemas e, a partir deles, propor situações que permitem aos alunos ampliarem seus conhecimentos, de forma a tomarem consciência dos objetos matemáticos que mobilizam (VIZOLLI, 2010, p.46)

Os alunos orientados pelo professor lançam mão de conceitos e procedimentos matemáticos utilizados na busca pela solução para o problema. Tais conceitos e procedimentos se fazem presentes por meio de uma estrutura matemática que representa a situação em estudo. Essa estrutura matemática expressa por símbolos, diagramas, gráficos, expressões algébricas ou geométricas consiste no modelo matemático, um sistema conceitual, descritivo ou explicativo cuja finalidade é prover meios para descrever, explicar e mesmo prever o comportamento do fenômeno (DOERR; ENGLISH, 2003).

Almeida, Silva e Vertuan (2012) afirmam que, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, estão presentes ações como buscar informações sobre a situação inicial, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, realizar simplificação, obter um modelo matemático, resolver o problema por meio de procedimentos adequados e analisar a solução.

Ao descrevermos de forma abreviada as ações que se fazem presentes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, parece que a situação final consiste no findar desse tipo de atividade. Autores como Ärlebäck e Doerr (2015), Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016) propõem

encaminhamentos que atividades de modelagem já desenvolvidas podem seguir para serem utilizadas em outros contextos.

Ao propor uma atividade de modelagem, esta se caracteriza como de desenvolvimento de um modelo matemático que dá sentido matemático à situação, caracterizada por Ärlebäck e Doerr (2015) como atividades descritoras de modelos (MEA). Esses mesmos autores sugerem que as MEAs podem ser ponto de partida para dar sequência a atividades de exploração de modelos (MXA) em que os alunos exploram o modelo fazendo diferentes representações e estudando estruturas matemáticas e atividades de aplicação de modelos (MAA) em que o modelo descrito é utilizado para outros fenômenos.

Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016), no entanto, afirmam que uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por um grupo de alunos pode ser sugerida a outros alunos de forma mais estruturada, em que podem ser propostas e/ou conduzidas certas tarefas organizadas pelo professor.

Nossa investigação, no entanto, leva em consideração uma atividade desenvolvida por um grupo de alunos e procuramos evidenciar se esses alunos retomam a atividade que desenvolveram em outras situações ou conteúdos da disciplina de Cálculo.

Procedimentos metodológicos para o desenvolvimento da pesquisa

Diante das considerações tecidas sobre modelagem matemática e que foram apresentadas no item anterior, implica tomá-la em sua perspectiva educacional, tal como apresentada em Kaiser e Sriraman (2006). Nos estudos sobre o objetivo central com que a atividade de modelagem é desenvolvida em contextos educativos relatados na literatura, as autoras sistematizaram seis perspectivas para a modelagem matemática.

Na perspectiva educacional, especificamente, a modelagem matemática é caracterizada como uma abordagem didática e/ou conceitual em que é possível estruturar e promover o ensino e a aprendizagem e/ou introduzir e desenvolver conceitos.

Em consonância com essa perspectiva é que propusemos o desenvolvimento de atividades de modelagem por alunos do primeiro semestre do curso de graduação em Tecnologia em Alimentos de uma universidade federal do

Estado do Paraná na disciplina de Cálculo. A disciplina ofertada no primeiro semestre de 2016 iniciou-se com 44 alunos e teve 30 encontros presenciais.

Para trabalhar atividades de modelagem matemática em sala de aula, a professora autora deste artigo solicitou aos alunos que investigassem uma temática que estivesse relacionada ao curso. A temática proposta em conjunto professora e alunos foi *aquecimento ou resfriamento de um alimento no decorrer do tempo*. Para a abordagem da temática, os alunos se reuniram em grupos com até três integrantes, definiram a situação a ser investigada para coletar os dados previamente e trazê-los para a sala de aula.

Em sala de aula, cada grupo levou seu computador com *softwares* educativos instalados, como Curve Expert, GeoGebra e Excel. Os dados coletados pelos alunos foram interpretados matematicamente e validados com o auxílio desses *softwares*.

Após o desenvolvimento da proposta das atividades de modelagem, com o intuito de evidenciar se essas são retomadas pelos alunos em outras situações ou conteúdos da disciplina de Cálculo, a professora planejou a introdução de conteúdos via alguma situação problemática que poderia ou não estar relacionada com a situação que os alunos investigaram.

As informações que analisamos foram obtidas usando registros escritos dos alunos, bem como a transcrição de gravações em áudio e vídeo do desenvolvimento de algumas atividades desenvolvidas ao longo do semestre, feitas com o consentimento dos mesmos. Neste artigo, analisamos as informações relativas à atividade desenvolvida por um grupo constituído por quatro alunos. O critério de escolha deve-se à frequência nas aulas e a permanência dos integrantes do grupo até o final da disciplina. Os nomes (fictícios) são de integrantes desse grupo.

Com o intuito de evidenciar se a atividade de modelagem matemática desenvolvida em sala de aula tem potencialidade para ser retomada pelos alunos em outras situações ou conteúdos, neste artigo, primeiramente, realizamos uma análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida, com o objetivo de investigar se essa permite exploração e aplicação de modelos. Posteriormente realizamos uma análise *a posteriori*, considerando a abordagem realizada com o desenvolvimento dos conteúdos da disciplina.

Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa qualitativa que, segundo Bogdan e Biklen (1994), têm como objetivo melhor compreender o comportamento e a experiência humana, o que implica ser ele, o pesquisador, o principal instrumento da pesquisa.

Descrição e análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida

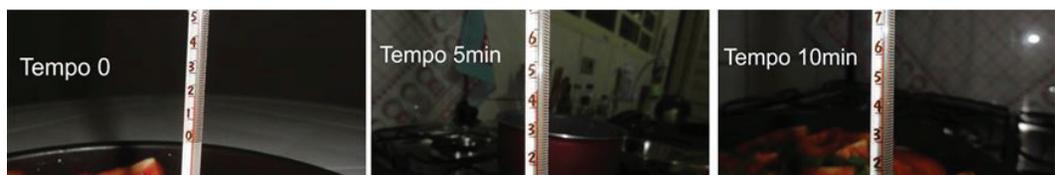
O grupo cujas informações subsidiam nossas argumentações optou por estudar o aquecimento de uma sopa de tomate durante seu preparo (Figura 1). Para a coleta de dados, o grupo fez uso de um termômetro químico e anotou a temperatura da sopa de cinco em cinco minutos (Quadro 1). Em sala de aula, o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática ocorreu no nono encontro da disciplina e levou quatro horas/aula. Vale destacar que os alunos já haviam estudado os conteúdos referentes a funções e limites de funções, o que pode ter influenciado algumas considerações referentes aos objetos matemáticos.

Quadro 1 – Variação da temperatura da sopa de tomate em função do tempo.

Tempo (em minutos)	0	5	10	15	20	25
Temperatura da sopa (em °C)	20	46	64	76	78	81

Fonte: relatório dos alunos.

Figura 1 – Coleta de dados.



Fonte: a pesquisa.

Diante dos dados, os alunos não tinham clareza do que poderiam estudar nem como a matemática poderia auxiliá-los. Assim, com a orientação da professora, discutiram a situação, conforme transcrição da conversa:

Júlia: O Célio fez uma sopa de tomate e nós coletamos a temperatura dela, mas agora o que a senhora quer que façamos, porque temos a tabela aqui [apontando para os dados]. Fazemos uma função? A gente pode usar o computador?

Prof.: O que vocês querem fazer com o computador?

Júlia: Pensei de colocar os pontos no plano e ver se os dados dão uma reta ou outra função.

Ana: A gente pode fazer isso, professora? Isso que a Júlia falou?

Prof.: O que vocês querem investigar?

Célio: Bom, se a gente deixar a sopa lá no fogão, vai secar e queimar. Então é limitado o tempo. A gente pode ver a temperatura máxima.

Júlia: Será? Será que tem um máximo como na função do segundo grau que a gente estudou?

Célio: Eu acho que é aquela que tende a um valor... como é o nome, com a reta horizontal? [gesticulando com as mãos]

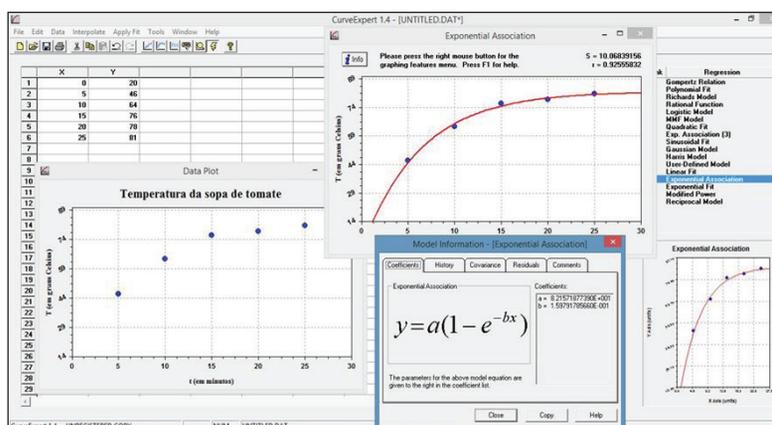
Júlia: Assintótica? A função assintótica?

A proposta da atividade seguiu configurações daquelas caracterizadas por Årlebäck e Doerr (2015) enquanto descritora de modelo, pois os alunos estavam interessados em obter um modelo matemático – uma função – que pudesse representar os dados. Para isso, necessitaram do auxílio da professora para ‘validar’ o que estavam planejando, de forma a operarem “matematicamente com os dados e informações presentes” (VIZOLLI, 2010, p.46).

Na conversa para a definição sobre o que de fato utilizariam para representar a situação, os alunos remetem à abordagem de uma função “*que tende a um valor*”. Isso nos possibilita inferir que o conceito de assíntota horizontal, assunto tratando no estudo de função exponencial e no estudo de limites no infinito no sexto e oitavo encontros, respectivamente, da disciplina, de certa forma foi compreendido e transposto para a situação em estudo. Na exploração de um modelo matemático para a situação, os alunos realizaram uma atividade de aplicação de modelo, em que modelos descritos em outros fenômenos estudados na disciplina são utilizados para realizar a interpretação matemática (ÅRLEBÄCK; DOERR, 2015).

No entanto, os alunos não estavam certos de que função poderia ser ajustada aos dados, então sugerem o uso do computador, que era prática recorrente na sala de aula. A matematização da situação foi mediada pelo *software* Curve Expert, ajustando os dados à curva representada algebricamente por $T(t) = 82,16(1 - e^{-0,16t})$, em que T representa a temperatura da sopa de tomate (em graus Celsius) em função do tempo t , em minutos (Figura 2).

Figura 2 – Matematização realizada com o auxílio do Curve Expert.



Fonte: relatório dos alunos.

Quando questionados sobre a escolha da curva que se ajustava aos pontos para a situação que pretendiam estudar, os alunos argumentaram que:

Júlia: A gente sabe que vai chegar numa temperatura máxima, pensamos numa assintótica. Daí fomos vendo a função ajustada pelo software que a gente sabia estudar e essa parece que ficou a melhor. O Célio até validou no Excel e os dados ficaram bem próximos do que a gente coletou.

Célio: Olha aqui, professora [apontando para a tela do computador]. É claro que a gente não vai estudar até o infinito, porque a sopa vai queimar. Hum... Vamos ver o limite, o limite da função!

Igor: Lógico, gente! O limite... Vamos calcular o limite.

Júlia: Mas, para calcular o limite, temos que considerar que a sopa não queime. Nem tinha pensado em limite.

Mesmo que não houvessem explicitado a necessidade do cálculo do limite da função, essa abordagem já fora considerada quando do uso do termo assíntota para considerar que a função se aproxima de certo valor para a temperatura conforme o tempo passa. Com as justificativas de escolha do modelo matemático, os alunos consideram por hipótese que a sopa não queime e calcularam o limite, $\lim_{t \rightarrow \infty} 82,16(1 - e^{-0,16t}) = 82,16$ (Figura 3) para em seguida definirem de fato o que poderiam estudar com a situação (Figura 4).

Figura 3 – Cálculo do limite da função.

$$T(t) = 82,16(1 - e^{-0,16t})$$

$$T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 82,16(1 - e^{-0,16t}) = 82,16$$

Fonte: relatório dos alunos.

Assim, a definição de um problema a ser investigado somente se confirmou após os alunos realizarem a matematização da situação. Na definição do problema (Figura 4), os

alunos já consideram uma aproximação para a temperatura de 82°C, denotando uma compreensão de que os valores da temperatura tendem a 82,16°C.

Figura 4 – Definição do problema.

Após quanto tempo a temperatura da sopa de tomate atinge 82°C?

Fonte: relatório dos alunos.

Para resolver o problema, fazem $T(t) = 82$, obtendo a solução $t = 37,6$ minutos, conforme consta na Figura 5. O modelo matemático é explorado

pelos alunos com a intenção de responder ao problema que se propuseram a investigar.

Figura 5 – Solução do problema.

$$82,00 = 82,16 \cdot (1 - e^{-0,16t})$$

$$\frac{82}{82,16} = 1 - e^{-0,16t}$$

$$0,998 - 1 = -e^{-0,16t}$$

$$-0,002 = -e^{-0,16t}$$

$$e^{-0,16t} = 0,002$$

$$\ln e^{-0,16t} = \ln 0,002$$

$$-0,16t \ln e = -6,21$$

$$-0,16t = -6,21$$

$$t = \frac{6,21}{0,16} \Rightarrow t = 37,6$$

Fonte: relatório dos alunos.

Com a solução do problema, os alunos teceram algumas considerações sobre a matemática utilizada na interpretação da temperatura da sopa de tomate, conforme transcrição da conversa:

Célio: Gente, a gente só pode deixar a sopa cerca de trinta e sete minutos no fogo para ela chegar a ter oitenta e dois graus de temperatura. Isso tem a ver com domínio e imagem, não é? Já que estamos falando de cálculo, vamos falar disso também. Será que é válido?

Ana: O domínio é o x, aqui o x é o que, mesmo? Ah, o tempo, a variável... como... é...

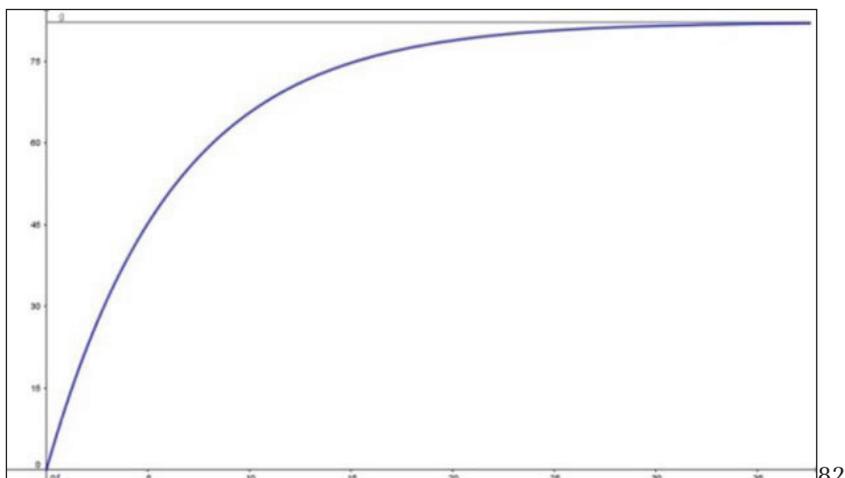
Igor: Variável independente. Agora a imagem que é a variável que depende de x, ou melhor, do tempo, é

a temperatura, variável dependente, a imagem.

Júlia: Pessoal, então tá... o domínio vai de zero a trinta e sete vírgula seis, e a imagem de zero a oitenta e dois... Mas lembrando que a temperatura inicial é de vinte graus Celsius. Mas tá valendo para a gente aqui, né? Vamos fazer o gráfico lá no GeoGebra com isso?

Com as considerações com relação à situação e o modelo matemático, os alunos o consideraram válido para o que pretendiam estudar, além de considerarem o estudo do domínio e da imagem da função, assunto estudado no segundo encontro da disciplina, para fazerem a representação gráfica com o uso do *software* GeoGebra (Figura 6).

Figura 6 – Representação gráfica da função.



Fonte: relatório dos alunos.

As ações com relação à definição do domínio e da imagem, bem como a representação gráfica da função que representa a situação, considerando a assíntota horizontal ($T(t) = 82,16$) associa conceitos matemáticos do problema que possibilitam sua análise (ALMEIDA; SILVA, 2012).

Com a análise que realizamos, no sentido de uma perspectiva educacional para a abordagem da modelagem matemática, inferimos que a atividade tem potencialidades para ser retomada pelos alunos. Isso se deve ao fato de que essa atividade, além de ser descritora de modelos, permite sua exploração e aplicação.

Descrição e análise da abordagem *a posteriori*

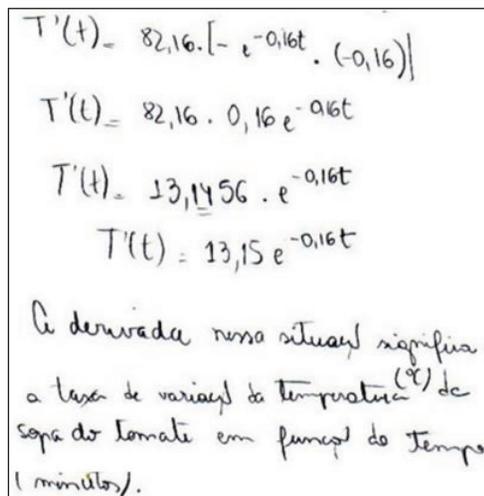
No décimo terceiro encontro da disciplina, a abordagem do conteúdo de derivadas por definição iniciou-se com uma situação em que um objeto aquecido é bruscamente resfriado quando mergulhado em um ambiente aquoso com temperatura inferior. Com essa situação,

foi abordada a taxa de variação da temperatura do objeto em função do tempo. Em seguida, foram abordadas regras de diferenciação.

Por similaridade, Júlia sugeriu estudar a taxa de resfriamento ou aquecimento que os grupos fizeram na atividade de modelagem, remetendo-se ao aquecimento da sopa de tomate que seu grupo havia investigado. Podemos inferir que essa abordagem pode ter sido sugerida devido à professora ter iniciado o estudo por meio de uma situação que envolve temperatura e essa ter possibilitado o que Ärlebäck e Doerr (2015) chamam de aplicação de modelos. Com isso, a situação que *a priori* fora investigada passou a ser um exemplo de aplicação do conteúdo em que os alunos poderiam aplicar regras de diferenciação e interpretar com a situação.

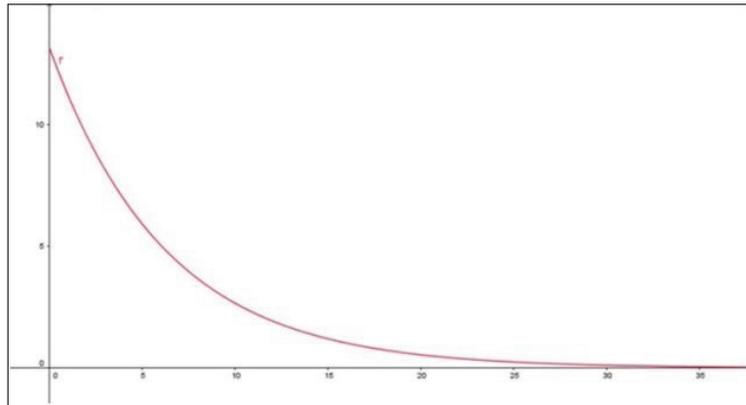
O grupo que analisamos, diante das regras de diferenciação estudadas, calculou a derivada da temperatura da sopa de tomate em função do tempo ($T(t) = 13,15e^{-0,16t}$) e descreveu o que esse cálculo representa para a situação (Figura 7), além de representar graficamente (Figura 8).

Figura 7 – Derivada da função.



Fonte: relatório dos alunos.

Figura 8 – Representação gráfica da derivada da função.



Fonte: relatório dos alunos.

Quando o grupo propõe o cálculo da derivada da função e o realiza algebricamente e por meio da representação gráfica, podemos afirmar que a atividade de modelagem matemática apresenta potencialidades “para os alunos compreenderem os objetos matemáticos, conhecer e relacionar as várias representações destes objetos” (SILVA, 2017, p.157), além de possibilitar interpretá-los por meio de fatos da realidade a partir das respostas aos questionamentos da professora, conforme transcrição da conversa:

Prof.: Certo, calcularam a derivada, afirmaram que esta corresponde à taxa de variação da temperatura da sopa em função do tempo. Mas falem-me sobre o que vocês podem observar da representação gráfica.

Júlia: A função derivada é decrescente.

Prof.: E o que isso significa?

Célio: Que a derivada vai diminuindo com o passar do tempo.

Prof.: E para a situação?

Ana: A taxa de variação diminui.

Hum, e o que isso significa?

Prof.: O que isso significa?

[silêncio por alguns instantes]

Prof.: O que significa que a taxa de variação diminui para a situação?

Júlia: Bom, a taxa de variação, o coeficiente angular da reta tangente à curva... hum... sei... a taxa diminui. Sim, a taxa diminui, ou seja, conforme passa o tempo, a temperatura

da sopa aumenta cada vez menos; um crescimento cada vez menor em função do tempo. Totalmente acima do eixo y, porque nossa situação é de aquecimento.

No estudo do conteúdo de derivadas de funções, a atividade de modelagem matemática que foi desenvolvida em sala de aula foi revisitada e serviu como um exemplo de aplicação em que os alunos fizeram usos de técnicas que recentemente haviam estudado, além de fazer uso da representação gráfica e interpretá-la matematicamente.

Após o estudo de integral de uma função, no vigésimo quinto encontro da disciplina, diante da não retomada da situação de modelagem matemática desenvolvida, a professora questionou sobre a antiderivada da taxa de variação da temperatura das situações que os grupos estudaram. De imediato, os grupos não sabiam ao certo o que considerar. O grupo que estudou o aquecimento da sopa de tomate em função do tempo, no entanto, teve algumas dificuldades em significar o que poderia ser representado por meio da integral definida, necessitando da intervenção da professora, conforme conversa transcrita:

Prof.: Considerando o que vocês sabem sobre integrais e derivadas, representem essa situação.

Júlia: E tem como representar por meio de uma integral definida? Mas como fazer?

Prof.: O que vocês acham?

Igor: Mas a integral aqui é lá da taxa de variação, né? Júlia, vamos escrever o que a gente sabe. Olha só a taxa de variação da temperatura em função do tempo é a derivada da temperatura que é aquela função que derivamos ($T'(t) = 13,15e^{-0,16t}$). Quando integrarmos essa função, temos que voltar na função original que deduzimos com o Curve ($T(t) = 82,16(1 - e^{-0,16t})$). Daí é só colocar no intervalo de zero a trinta e sete vírgula seis. E daí?

Júlia: Espera, daí usamos o Teorema Fundamental do Cálculo e encontramos o valor da temperatura, quando t varia de zero a trinta e sete vírgula seis. Será que dá certo?

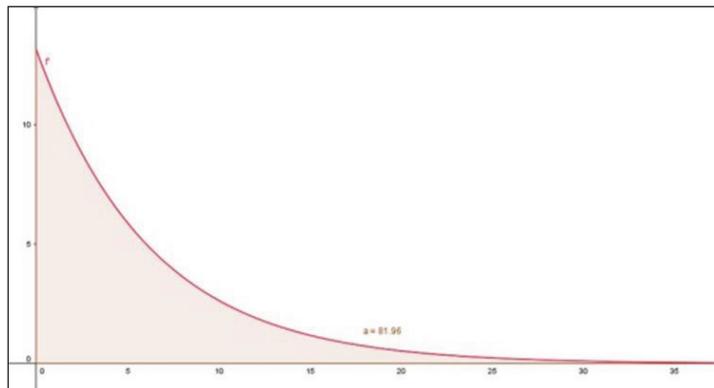
Célio: Vamos integrar... Sensacional [realizando cálculos por meio do

GeoGebra]. Olha o cálculo confirmando nossa situação, o resultado é oitenta e um vírgula noventa e seis. Aproximando... tchan tchan tchan tchan... o oitenta e dois da nossa sopinha.

Júlia: Eu vou calcular aqui, professora, me ajuda? Dá para usar o método de integração por substituição não é? Substituo o menos zero vírgula dezesseis por um é tranquilo. Deixa comigo.

Com o auxílio do GeoGebra, os alunos calcularam a integral definida $\int_0^{37,6} 13,15e^{-0,16t} dt = 81,96$ (Figura 9). Um dos integrantes do grupo – Júlia – ainda inicia os cálculos de integração fazendo uso do método de substituição, mas não o finaliza (Figura 10).

Figura 9 – Cálculo da integral definida com o auxílio do GeoGebra.



Fonte: relatório dos alunos.

Figura 10 – Cálculo da integral (não finalizado).

$$\int_0^{37,6} 13,15 e^{-0,16t} dt =$$

$$13,15 \int e^{-0,16t} dt = 13,15 \int e^u \frac{du}{-0,16}$$

$$\frac{13,15}{-0,16} \int e^u du$$

$u = -0,16t$
 $\frac{du}{dt} = -0,16$
 $\frac{dt}{du} = \frac{1}{-0,16}$

Fonte: relatório dos alunos.

O tratamento da integral definida da taxa de variação da temperatura da sopa de tomate em função do tempo foi sugerido pela professora que orientou o encaminhamento da resolução. No entanto, um dos integrantes do grupo, conhecendo as ferramentas do *software* GeoGebra, interpretou graficamente a situação e obteve o cálculo da integral definida, reagindo com empolgação.

Evidenciamos, em nossa investigação, que a abordagem *a posteriori* ocorreu naturalmente quando os alunos tiveram contato com uma situação similar a que haviam desenvolvido em sala de aula, possibilitando uma atividade de aplicação, enquanto exemplo de situação para calcular a derivada da função. O mesmo não aconteceu quando a professora desenvolveu o conteúdo de integral sem fazer referência ao fenômeno de resfriamento ou aquecimento de um corpo, necessitando solicitar a retomada da atividade de modelagem desenvolvida de forma que o modelo matemático fosse explorado.

Considerações

Diante do empreendimento em desenvolver uma atividade de modelagem matemática em sala de aula que possibilita descrever, explorar e aplicar modelos matemáticos, podemos inferir que a situação que a originou pode se fazer presente em outros momentos enquanto aplicação de conteúdos na disciplina de Cálculo, seja por similaridade, seja por sugestão da professora. Isso possibilita aos alunos aplicarem e interpretar os conteúdos estudados com uma situação que escolheram estudar por meio da coleta de dados empíricos e investigados por meio do uso de *softwares* educativos.

A atividade de modelagem matemática possibilitou estruturar e promover o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, objetivos centrais da perspectiva educacional proposta por Kaiser e Sriraman (2006). Essa promoção foi efetivada por meio da descrição de um modelo matemático representado por uma função do tipo exponencial que apresenta comportamento assintótico, cálculo do limite, da derivada e da integral, além da delimitação do conjunto-domínio e do conjunto-imagem da função.

Levando em consideração as abordagens defendidas por Ärlebäck e Doerr (2015), a atividade que analisamos seguiu encaminhamentos

em que os alunos deduziram um modelo matemático para obter uma solução para a situação inicial em que conteúdos matemáticos anteriormente estudados foram aplicados e explorados. Em seguida, a atividade configurou-se como um exemplo em que houve exploração de modelos por similaridade ou sugestão da professora para aplicar conteúdos matemáticos.

O que ponderamos com o desenvolvimento e a análise que realizamos é que a atividade fez emergir conteúdos já abordados em outros encontros da disciplina, além de aplicação de conteúdos que estavam sendo estudados na disciplina de Cálculo, proporcionando um *revisitar* e um *entender* conteúdos matemáticos. Vale destacar que o uso de *softwares* computacionais auxiliou na obtenção e exploração do modelo matemático.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência e Educação*, v.11, p.1-16, 2005.
- ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Modelagem matemática em cursos de formação de professores. In: BARBOSA, J.; ARAÚJO, J. L.; CALDEIRA, A. D. (Org.). *Modelagem matemática na Educação Matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: Biblioteca do Educador Matemático, 2007, p.253-268.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência e Educação*, v.18, p.623-642, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. The Meaning of the Problem in a Mathematical Modelling Activity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGT, M. S. (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences*. ICTMA 16. New York: Springer, 2015, p.45-54.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012.
- ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. M. M. Moving Beyond a Single Modelling Activity. In: STILLMAN, G. A. et al. (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences*. Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Dordrecht: Springer, 2015. p.293-303.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: XXIV Reunião Anual da ANPED – RJ. Caxambu: 2001. *Anais...* Caxambu: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, n.22, 37-68, 1991.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. 2.ed. Porto: Porto Editora, 1994.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Tarefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. *Anais...* Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v.1. p.1-12, 2016.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education*, v.34, n.2, p.110-136, 2003.

GOERCH, H. C.; BISOGNIN, V. Modelagem de objetos campeiros: investigação centrada nas ideias da Educação Matemática Realista. *Educação Matemática em Revista (RS)*, ano 15, v.2, p.40-53, 2014.

IGLIORI, S. B. C.; BELTRÃO, M. E. P. Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações em um curso superior tecnológico. *Unión: Revista*

Iberoamericana de Educación Matemática n.42, p.55-76, nov. 2015.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310, 2006.

LEGÉ, J. Approaching minimal conditions for the introduction of mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, 24(2-3), 90-96, 2005.

REIT, X. R.; LUDWIG, M. An Approach to Theory Based Modelling Tasks. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences*. ICTMA 16. New York: Springer, 2015, p.81-91.

ROCHA, K. L. S.; BISOGNIN, E. Educação ambiental na prática de sala de aula: contribuições da modelagem matemática. *Educação Matemática em Revista (RS)*, ano 10, v.2, p.21-27, 2009.

SILVA, K. A. P. Aspectos cognitivos em aulas com modelagem matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. *Experiências em Ensino de Ciências*, v.12, n.2, p.156-170, 2017.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. O interesse de alunos de Biologia pela análise de um fenômeno biológico e seu modelo matemático. In: V SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis. *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Petrópolis, v.1, p.1-18, 2012.

VIZOLLI, I. Estabelecendo modelo matemático que represente o balancete de uma pescaria. *Educação Matemática em Revista (RS)*, ano 11, v.1 e v.2, p.37-46, 2010.

Karina Alessandra Pessoa da Silva – Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br