

## TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

### Digital Technologies in the study of Trigonometry in High School

*Jonata Souza dos Santos*  
*Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa*

#### Resumo

A discussão em torno do emprego das tecnologias da informação e comunicação na educação envolve questões relativas ao acesso, a vantagens, necessidades e opções de sua aplicação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O uso de tecnologias em sala de aula propicia a potencialização do processo de aprendizagem dos estudantes, desde que o professor empregue o conhecimento apropriado e utilize-as em toda a sua amplitude. Assim, deverá conseguir alinhar seu uso para qualificar os processos na educação. Este trabalho busca investigar alternativas para o ensino das funções trigonométricas, através do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, por meio da realização de atividades interativas que proporcionem a reflexão sobre os conteúdos apresentados. A sequência de atividades foi desenvolvida com professores e estudantes de Matemática em três oficinas de três horas, totalizando nove horas.

**Palavras-chave:** Ensino Médio. Tecnologias Digitais. Trigonometria. Educação Matemática.

#### Abstract

The discussion on the use of information and communication technologies in education involves issues related to access, advantages, necessities and the options of its application in the teaching and learning process of Mathematics. The use of technologies in the classroom facilitates the learning process of the students, since

the teacher uses the appropriate knowledge and uses them in all its amplitude, therefore he will be able to align its use to qualify the processes in education. This study sought to investigate alternatives for the teaching of trigonometric functions by using the dynamic geometry software GeoGebra through the performance of interactive activities, which provide a reflection on the presented contents. The sequence of activities was developed with teachers and students of Mathematics in 3 workshops of 3 hours, in a total of 9 hours.

**Keywords:** High School. Digital Technologies. Trigonometry. Mathematics Education.

#### Introdução

A Trigonometria surgiu como uma extensão da Geometria, estabelecendo relações entre ângulos e segmentos dos triângulos. Suas primeiras aplicações estavam ligadas à Topografia e à Astronomia. Atualmente, a Trigonometria é um conteúdo interdisciplinar. Como tal, é aplicada nos mais diversos campos de conhecimento humano, assim possibilitando a contextualização de problemas da vida cotidiana e profissional.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN) (BRASIL, 2000), encontra-se a afirmativa de que a contextualização, quando trabalhada de forma interdisciplinar, é um instrumento bastante útil, desde que apresentada com uma abordagem ampla e não empregada de modo artificial e forçada. Assim, ela não deve restringir-se apenas a questões do cotidiano do

aluno, mas estimular a criatividade e a curiosidade para que o aprendizado seja permanente e útil em sua vida pessoal e profissional. Os PCN destacam que uma parte importante na temática Trigonometria é o estudo das funções trigonométricas e suas representações gráficas, desde que o estudo esteja ligado as aplicações, enfatizando os aspectos importantes das funções e da análise de suas representações gráficas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) orienta a contextualização dos conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas. A competência da BNCC que aborda, com flexibilidade e fluidez, o compreender e o utilizar diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), destaca a habilidade de identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno, periodicidade, domínio e imagem, por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

O texto da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996) define que a Educação Nacional destina-se ao preparo do indivíduo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o mercado de trabalho. Dessa maneira, torna-se indispensável uma adequação da sala de aula à realidade tecnológica. Destaca-se que o Ministério da Educação (MEC) (BRASIL, 2013) considera importante a utilização das tecnologias digitais em sala de aula, visando a melhorias na educação, mas adverte que o uso de forma isolada e desalinhada não garante essa qualidade.

Almeida (2008) afirma que estar inserido na sociedade da informação não quer dizer ter acesso à Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC), mas saber utilizar essa tecnologia selecionando as atividades adequadas que permitam ao indivíduo resolver problemas do seu cotidiano.

Nesse sentido, entende-se que o docente de Matemática deve estar em constante qualificação profissional para que possa construir e reestruturar atividades e recursos que envolvam

o uso de TIC, contribuindo com mudanças significativas na educação (NÓVOA, 2007; HOMA; GROENWALD, 2016).

As tecnologias digitais podem funcionar como uma forma complementar aos estudos na medida em que permitem observar construções que não seriam tão precisas se fossem desenvolvidas no quadro (SALAZAR, 2015). Segundo Kripka et al. (2017), quando se estuda matemática:

[...] o uso de tecnologias digitais com estudantes, além de motivar e despertar o interesse deles, também permite explorar diversas formas de registro de representação, possibilitando, assim, a investigação de ideias e de objetos de matemática por meio da exploração e da experimentação, atividades que favorecem a interpretação dos problemas e a compreensão dos conceitos. (KRIPKA; ET AL, 2017)

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2015), os profissionais ligados à educação deveriam implementar as tecnologias em suas aulas como se fossem parte da Matemática cotidiana que se estuda na escola, assim possibilitando aos alunos conhecerem e experimentarem as TIC com o propósito de explorar os conteúdos.

Buscando qualificar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática com enfoque no estudo de Funções Trigonométricas, professores/pesquisadores na área de Matemática têm investigado esse tema com o uso de recursos tecnológicos como possíveis soluções didáticas às dificuldades de aprendizagem. Isso pode ser verificado nos estudos de Sousa (2017), Dantas (2015), Salazar (2015), Rezende (2015), Lopes (2013) e Pedroso (2012). Esses autores consideram que a utilização de um *software* educativo pode qualificar o processo de ensino e aprendizagem. Destacam, ainda, que para o ensino de Funções Trigonométricas é importante o uso de um *software* de Geometria Dinâmica como ferramenta auxiliar, pois assim os estudantes podem experimentar as transformações das funções, das quais podem analisar e conjecturar as características.

Existem vários *softwares* de Geometria Dinâmica, contudo o GeoGebra se destaca por

permitir trabalhar simultaneamente Geometria, Cálculo e Álgebra. Desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo (HOHENWARTER, 2007) como um *software* educacional de uso livre, o GeoGebra é popular no Brasil e carece de investimento na área de informática nas escolas públicas.

Este artigo apresenta a construção do círculo trigonométrico interativo seguido de atividades exploratórias. O objetivo é proporcionar situações que permitam a reflexão e conjecturas sobre as relações entre ângulos e segmentos. Também são apresentadas sugestões de atividades exploratórias com o objeto de aprendizagem construído.

### Pressupostos metodológicos

As ações desta pesquisa foram desenvolvidas em um enfoque qualitativo, visto que os propósitos fundamentais são a compreensão, a explanação e a interpretação do que se está construindo (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; BOGDAN; BIKLEN, 1991). Essas ações investigaram as atividades didáticas, com o tema Trigonometria, com o objetivo de subsidiar os professores no planejamento didático utilizando tecnologias.

As ações de pesquisa foram:

- Reuniões semanais com o GECEM para debater, refletir e ampliar os resultados investigados;
- Investigação de atividades didáticas com a temática Trigonometria;
- Investigação dos recursos digitais disponíveis para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem com a temática de pesquisa;
- Investigação de como integrar as atividades com o *software* GeoGebra;
- Validação das atividades em três oficinas que foram realizadas na Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) em Canoas/RS;
- Análise dos resultados.

As oficinas para validação das atividades investigadas foram:

- Oficina no dia da Matemática, organizado pelo curso de Matemática – Licenciatura – da ULBRA, dia 6 de maio de 2017, com 25 participantes;

- Oficina em evento no Polo da ULBRA de Novo Hamburgo/RS, organizado pelo curso de Matemática – Licenciatura – da ULBRA e pelo Polo EAD de Novo Hamburgo/RS, dia 19 de agosto de 2017, com 35 participantes;
- Oficina realizada na 14ª Semana Nacional de Ciências e Tecnologia, organizada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGE-CIM), dia 26 de outubro de 2017, com 15 participantes.

As oficinas tiveram duração de três horas cada uma, com o objetivo de debater e refletir sobre alternativas para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, utilizando tecnologias digitais, especificamente o *software* GeoGebra.

As atividades e discussões sobre as construções e a viabilidade de aplicação do material no Ensino Médio foram realizadas nos três encontros sempre após a atividade com o objeto de aprendizagem desenvolvido.

### Matemática e tecnologias no Ensino Médio – perspectivas e possibilidades

Atualmente, as TIC são consideradas recursos importantes que auxiliam os professores em seus planejamentos e estão colaborando significativamente para as mudanças na educação (HOMA; GROENWALD, 2016; KAMPFF, 2012).

Perrenoud (2000) salienta que o uso das tecnologias demanda uma alteração de paradigma em relação à aprendizagem, com a criação de situações de aprendizagem diversificadas, contribuindo com trabalhos pedagógicos e didáticos.

Kampff (2012) afirma que as TIC podem ampliar o potencial humano, seja físico ou intelectual. Quando as tecnologias são usadas na educação, expandem as possibilidades do professor de ensinar e do aluno de aprender.

Segundo o NCTM (2015), para uma aprendizagem significativa de Matemática, as ferramentas de ensino e as tecnologias devem ser consideradas indispensáveis para a sala de aula. Os computadores, *tablets* e *smartphones* podem ser utilizados em aplicações que realizem cálculos e simulações, para reunir dados, fazer

pesquisas, assim como para fomentar a visualização e envolver os alunos em jogos que exijam habilidades para resolução de problemas.

Quando a informática integra o ambiente escolar, em um processo dinâmico de relação entre alunos, professores e TIC, desperta no professor a sensibilidade para as diferentes possibilidades de representação da Matemática, o que deve ser destacado no momento das construções e análises (LOPES, 2013). Segundo Corradi (2013), é importante envolver os estudantes nas aulas e dar-lhes a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos de forma investigativa, estimulando-os na formação de conjecturas e, através das experimentações, no desenvolvimento dos conteúdos que estão sendo abordados.

O planejamento da aula é indispensável para o professor de Matemática. Isso inclui a escolha do *software* que utilizará, segundo as necessidades matemáticas, em situações didáticas ou não a serem proporcionadas, assim como o ambiente informático disponível. Homa e Groenwald (2016) destacam que:

Atualmente, para a escolha de um aplicativo, considera-se importante a verificação da característica de multiplataforma, ou seja, que esteja disponível para as diversas plataformas de dispositivos informáticos, como o Android, iOS e Windows Mobile para dispositivos móveis, e Windows, Linux e OS X para os computadores pessoais, possibilitando o uso do mesmo em diversos ambientes tecnológicos. (HOMA, GROENWALD, 2016)

Nesse sentido, o *software* escolhido para esta pesquisa foi o GeoGebra, pois atende às necessidades matemáticas da atividade proposta. Além disso, esse *software* oferece acesso *online* e gratuito, interface intuitiva e possibilidade de uso de diferentes formas (numérico, algébrico, geométrico e funcional). O GeoGebra está em constante atualização, fato que caracteriza a sua continuidade, de modo que as atividades desenvolvidas sejam utilizadas por muito tempo. Groenwald, Dantas e Duda (2017) destacam que o GeoGebra é um *software* adequado à construção de objetos de aprendizagem manipuláveis sem que seja necessário conhecimento de pro-

gramação avançada. Bairral e Barreira (2017) indicam que o uso desse *software* possibilita aos usuários (professores e alunos) verificarem suas ideias e conjecturas de modo visual e dinâmico, assim explorando novas descobertas de forma autônoma.

### Construção do círculo trigonométrico com a utilização do *software* GeoGebra

Nesta etapa, apresentam-se as seguintes construções: círculo trigonométrico; reta tangente ao círculo; valores de seno, cosseno e tangente; e relação entre a medida dos ângulos em graus e em radianos. Cada ação é descrita em detalhes para que seja possível realizá-las de forma autônoma.

Nas funções trigonométricas notáveis, o comprimento dos segmentos ou das suas projeções é considerado como as variáveis dependentes. O ângulo é a variável independente, e nesse caso devem ser utilizados radianos, que é a medida do comprimento do arco de raio unitário, proporcional à medida do ângulo central. Desse modo, quanto maior o ângulo, maior o comprimento do arco, e quanto menor o ângulo, menor o comprimento do arco (SOUSA, 2017).

A construção do círculo trigonométrico é realizada em três etapas:

1. O círculo de raio unitário e as retas suporte para o seno, cosseno e tangente;
2. A interação com a variação do ângulo com sua representação em graus e radianos;
3. A representação gráfica de seno, cosseno e tangente do ângulo.

Para a representação do círculo de raio unitário e as retas suporte para o seno, cosseno e tangente, realizam-se as seguintes ações:

- Criar um ponto A em (0,0) (origem). Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta Ponto , clicar na intersecção dos eixos x e y do plano cartesiano.
- Criar o círculo de raio unitário. Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta Círculo dados Centro e Raio , clicar no ponto A e digitar raio = 1.
- Criar a referência de ângulo 0°. Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta Ponto , clicar na intersecção do círcu-

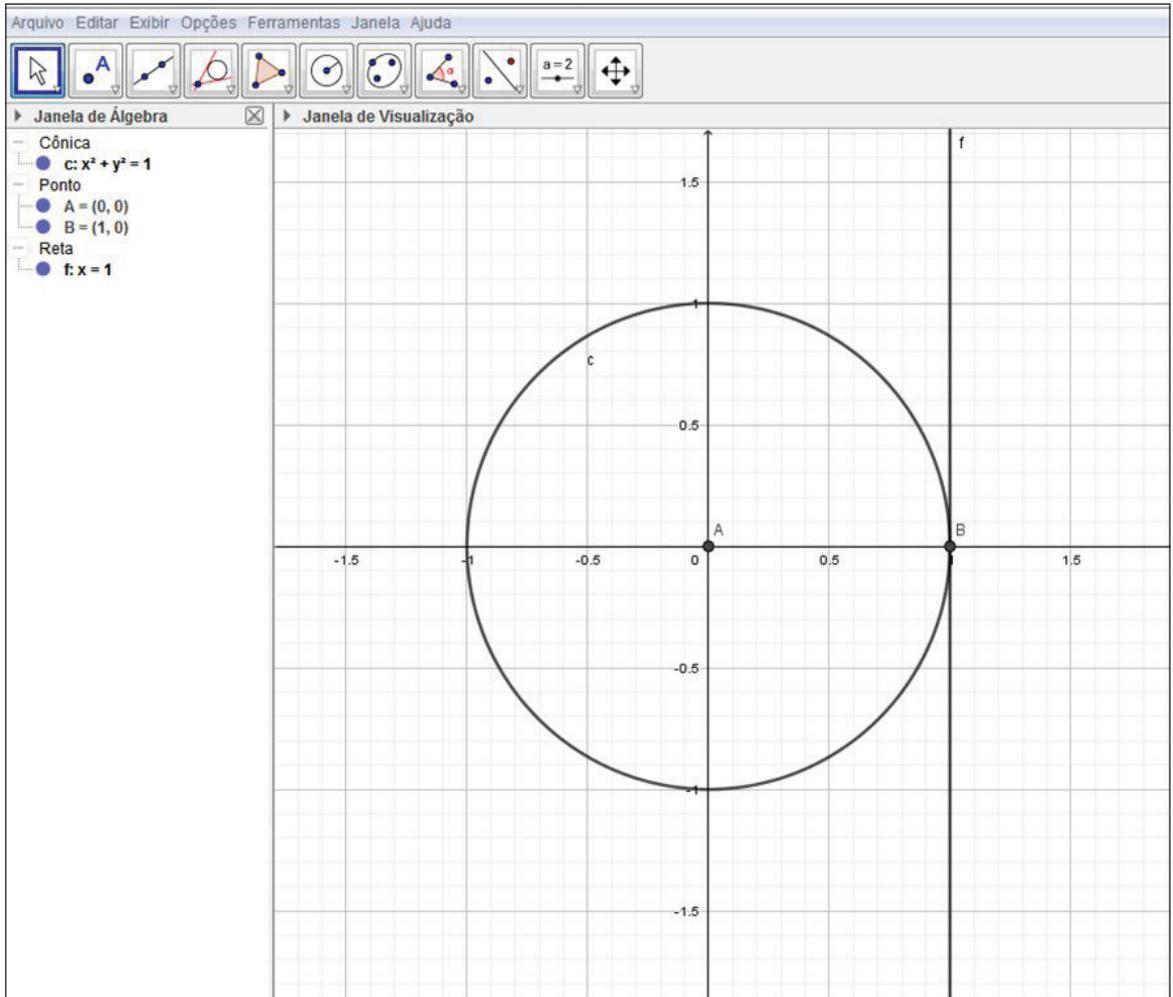
lo com o eixo das abcissas, coordenada (1,0). Destaca-se que os pontos cinza-escuro são considerados pontos fixos, não podendo ser manipulados.

- Criar a reta suporte para a tangente. Na barra de ferramentas, selecionar a ferra-

menta Reta Tangente , clicar no ponto B e no círculo C.

Na Figura 1, observa-se a construção do círculo de raio 1 e a reta tangente ao círculo.

Figura 1 – Círculo de raio 1 e reta tangente.



Fonte: os autores.

A interação para a variação do ângulo é realizada pela manipulação de um controlador que varia o valor do ângulo entre  $-360^\circ$  e  $720^\circ$ . São descritos a seguir os comandos para o controle e a representação do ângulo no círculo trigonométrico:

- Criar um controle deslizante com ângulo ( $\alpha$ ). Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Controle Deslizante* , clicar

no plano cartesiano onde deseja colocar o controle, na caixa de opções, selecionar *ângulo*, na aba *intervalo* digitar os valores mínimo e máximo do ângulo,  $min = -360$ ,  $máx = 720$  e incremento = 1.

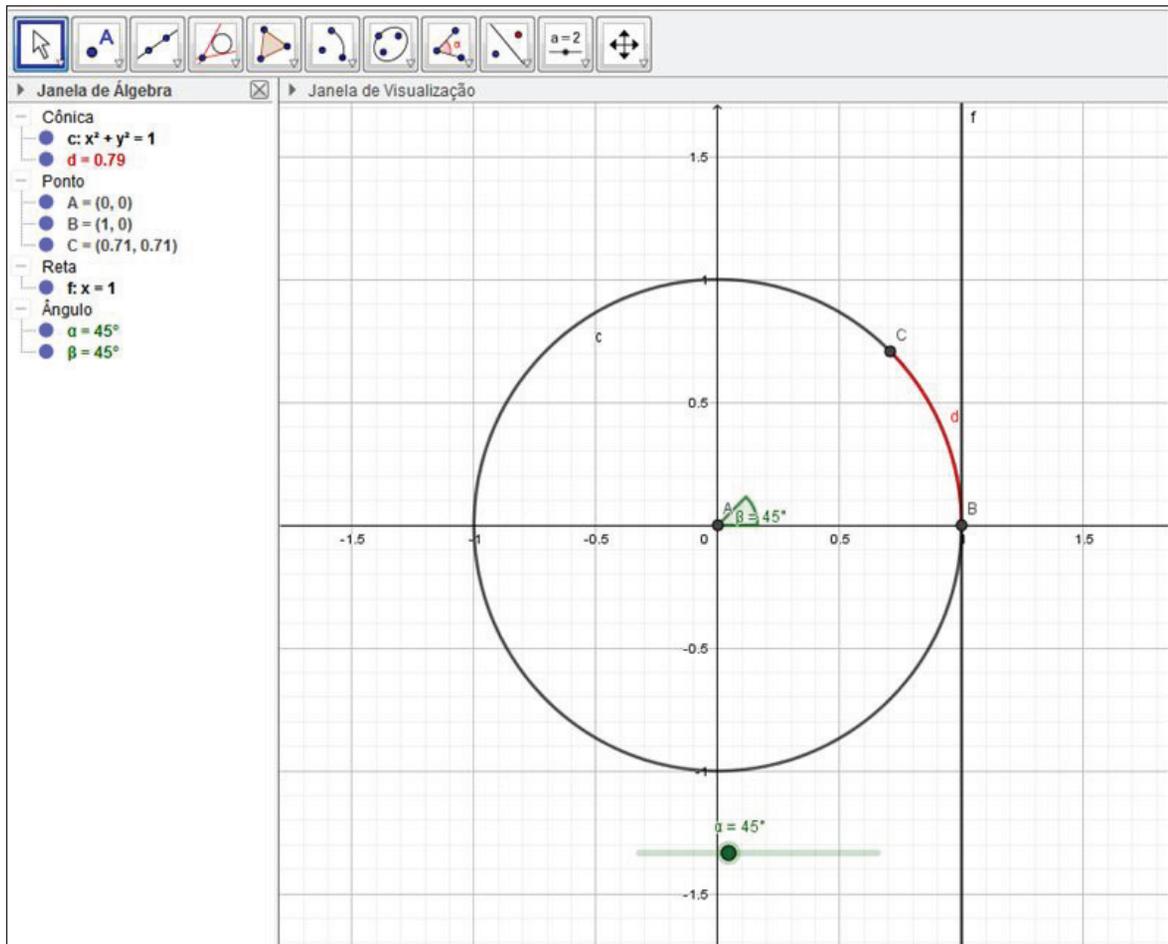
- Criar o ponto que representará o ângulo. Na caixa de *Entrada* (parte inferior da tela), digitar o comando  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ . Esse comando cria um ponto de coordena-

- nadas  $(x, y)$  que variará de acordo com os valores do controlador do ângulo.
- Criar medida do ângulo em graus e radianos. Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Ângulo* , criar o ângulo  $B\hat{A}C$  clicando na sequência os pontos B,A,C. O ângulo  $(\beta)$  será a representação em graus do ângulo  $\alpha$ . Para os radianos, na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Arco Circular* , clicar na sequê-

ência os pontos A,B,C. Para melhor visualização do arco, entre em propriedades do arco, na aba *Básico*, em *Exibir rótulo*, mudar para *Valor*, a seguir clique na aba cor e selecionar uma cor (ex.: vermelho) diferente do círculo trigonométrico.

A Figura 2 apresenta o círculo trigonométrico construído com a interação do ângulo com sua representação em graus e radianos, e a medida de arco.

Figura 2 – Círculo trigonométrico com interação do ângulo com sua representação em graus e radianos, e a medida de arco.



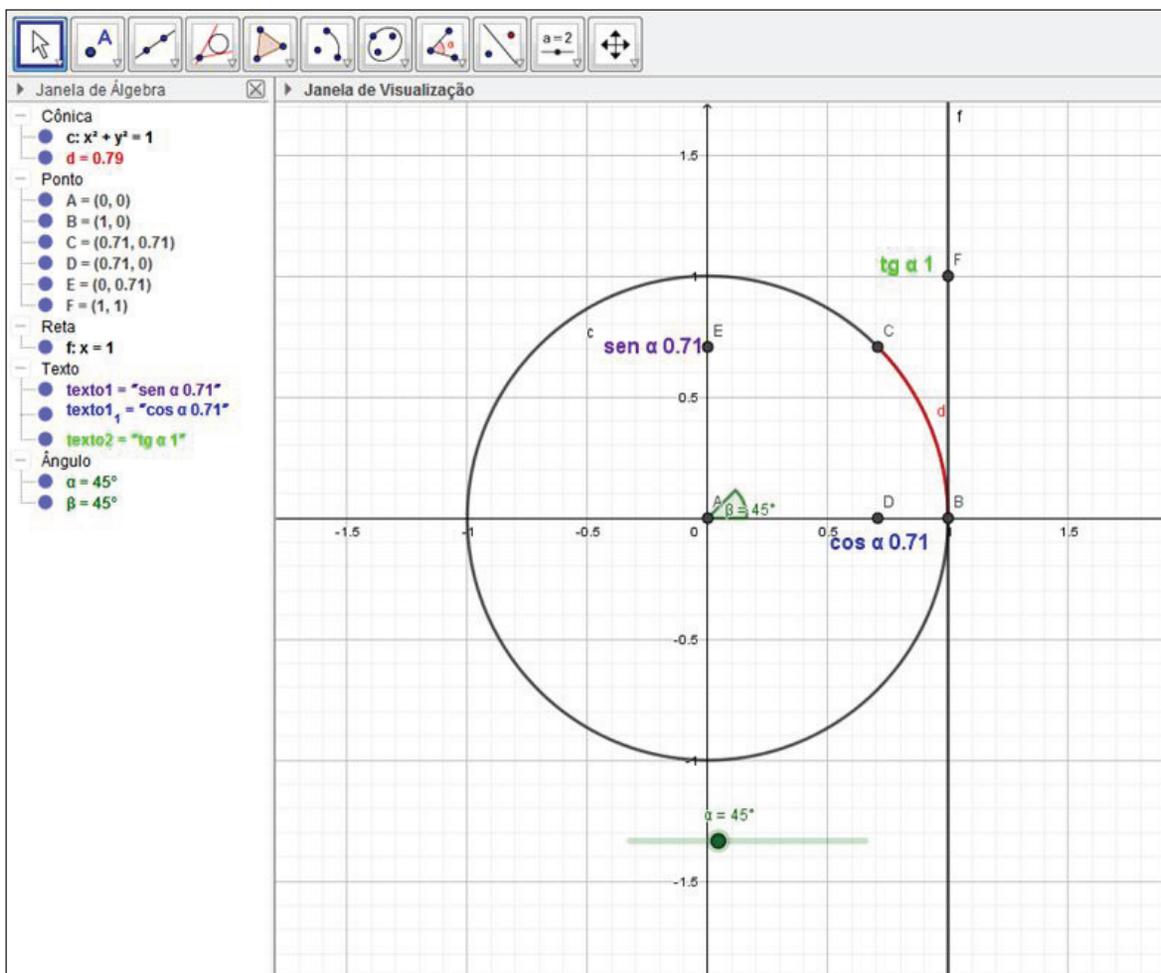
Fonte: os autores.

Os valores de seno e cosseno são dados pela distância das projeções do ponto C respectivamente nos eixos das ordenadas e abcissas, e a origem  $(0,0)$ . Para a tangente, o valor é a dis-

tância entre o ponto B e a de intersecção da reta, que passa pela origem e por C, e a reta suporte da tangente. Suas construções são apresentadas a seguir:

- Criar a projeção do ponto C no eixo das abscissas. Na *caixa de Entrada* (parte inferior da tela), digitar  $(\cos(\alpha), 0)$ . A coordenada x desse ponto varia conforme o ângulo  $\alpha$ .
  - Criar a projeção do ponto C no eixo das ordenadas. Na *caixa de Entrada*, digitar  $(0, \sin(\alpha))$ . A coordenada y desse ponto varia conforme o ângulo  $\alpha$ .
  - Criar o ponto que representa a intersecção da reta que passa pela origem e C na reta suporte para a tangente. Na *caixa de Entrada*, digitar  $(1, \text{tg}(\alpha))$ . A coordenada y desse ponto varia conforme o ângulo  $\alpha$ .
- Observa-se a construção do círculo trigonométrico com os valores referidos na Figura 3.

Figura 3 – Círculo trigonométrico com os pontos e valores de seno, cosseno e tangente.



Fonte: os autores.

Através do círculo trigonométrico, é possível a visualização da variação do comprimento de arco (radianos) dado pelo ângulo em graus e o valor da distância entre as projeções e suas respectivas referências. Desse modo, cria-se um ambiente para

a observação e a formação de conjecturas entre o círculo trigonométrico e as funções trigonométricas notáveis. Apresentam-se as construções das funções trigonométricas relacionadas com as interações do círculo trigonométrico.

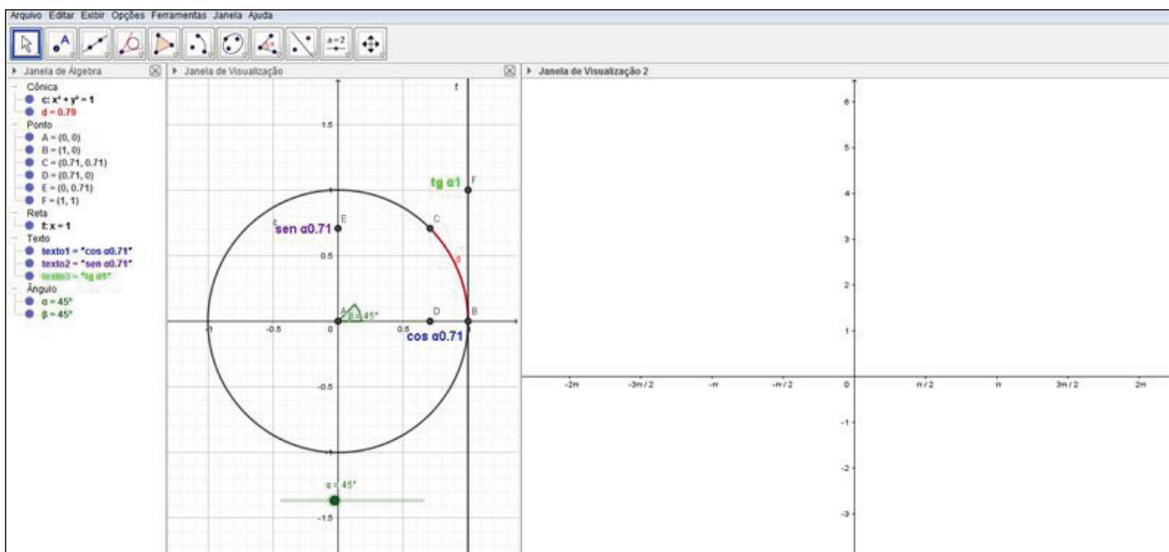
## Construção dos gráficos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente

Para melhor visualização dos objetos de estudo, as construções das funções trigonométricas são realizadas em uma janela de visualização separada do círculo trigonométrico. Essa decisão evita a poluição da área de observação, com a interação em uma das janelas e visualização na outra.

A construção está dividida em duas etapas: a construção das funções propriamente dita em janela de visualização separada e a inclusão dos controles de visualização.

Primeiramente, habilita-se a janela de visualização secundária (2D) selecionando-se o menu *Exibir* e marcando *Janela de Visualização 2*. Também é possível habilitar a janela pressionando simultaneamente as teclas Ctrl, Shift, 2. Após, aparecer a segunda janela, ajustá-la para uma melhor visualização (Figura 4).

Figura 4 – Ajuste da janela de visualização 2.



Fonte: os autores.

As funções trigonométricas de estudo são transformadas em gráficos de zero até o ângulo definido no círculo trigonométrico. Desse modo, são criados dois gráficos para cada função, um para o intervalo negativo e outro para o intervalo positivo do ângulo. As construções são realizadas conforme os procedimentos a seguir.

- Criar o gráfico da função seno para  $\alpha > 0$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $f_1(x) = \sin(x)$ ,  $(0 < x < \alpha)$ . O gráfico da função seno vai aparecer na janela de visualização 2, quando o ângulo  $\alpha$  for maior que 0.
- Criar o gráfico da função seno para  $\alpha < 0$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando

$f_2(x) = \sin(x)$ ,  $(\alpha < x < 0)$ . O gráfico da função seno vai aparecer na janela de visualização 2, quando o ângulo  $\alpha$  for menor que 0.

- Criar o gráfico da função seno para com variação de  $(-\alpha)$  até  $(\alpha)$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $f_3(x) = \sin(x)$ ,  $(-\alpha < x < \alpha)$ . O gráfico da função seno vai aparecer na janela de visualização 2 e irá variar conforme o ângulo  $\alpha$ .
- Criar o gráfico da função cosseno para  $\alpha > 0$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $g_1(x) = \cos(x)$ ,  $(0 < x < \alpha)$ . O gráfico da função cosseno vai aparecer na janela

de visualização 2, quando o ângulo  $\alpha$  for maior que 0.

- Criar o gráfico da função cosseno para  $\alpha < 0$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $g_2(x) = \cos(x)$ , ( $\alpha < x < 0$ ). O gráfico da função cosseno vai aparecer na janela de visualização 2, quando o ângulo  $\alpha$  for menor que 0.
- Criar o gráfico da função cosseno para com variação de  $(-\alpha)$  até  $\alpha$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $g_3(x) = \cos(x)$ , ( $-\alpha < x < \alpha$ ). O gráfico da função cosseno vai aparecer na janela de visualização 2 e irá variar conforme o ângulo  $\alpha$ .
- Criar o gráfico da função tangente para  $\alpha > 0$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $h_1(x) = \text{tg}(x)$ , ( $0 < x < \alpha$ ). O gráfico da função tangente vai aparecer na janela de visualização 2, quando o ângulo  $\alpha$  for maior que 0.
- Criar o gráfico da função tangente para  $\alpha < 0$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $h_2(x) = \text{tg}(x)$ , ( $\alpha < x < 0$ ). O gráfico da função tangente vai aparecer na janela de visualização 2, quando o ângulo  $\alpha$  for menor que 0.
- Criar o gráfico da função tangente para com variação de  $(-\alpha)$  até  $\alpha$ . Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $h_3(x) = \text{tg}(x)$ , ( $-\alpha < x < \alpha$ ). O gráfico da função tangente vai aparecer na janela de visualização 2 e irá variar conforme o ângulo  $\alpha$ .

As construções anteriores trabalham com as funções limitadas em seu domínio para a compreensão da relação entre o comprimento de arco, ou ângulo, e o valor do seno, cosseno e tangente. Para o estudo da periodicidade e continuidade da função, utilizam-se as funções sem restrição de domínio. Para isso, utilizaram-se os comandos a seguir.

- Criar o gráfico da função seno. Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $f(x) = \sin(x)$ .
- Criar o gráfico da função cosseno ( $x$ ). Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $g(x) = \cos(x)$ .
- Criar o gráfico da função tangente ( $x$ ). Selecionar a janela de visualização 2 e, na janela de Entrada, digitar o comando  $h(x) = \text{tg}(x)$ .

Para a organização da atividade com os alunos, é necessária a inclusão dos controles de exibição e ocultação das funções para que o objeto de aprendizagem seja funcional e o professor consiga explorar as situações que permitam a observação das funções, uma de cada vez.

- Criar o controle de exibição da função  $f(x) = \sin(x)$ . Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Caixa para Exibir/Esconder Objetos*  e clicar na janela de visualização 2 na posição que deseja colocar o controle. Nas propriedades do objeto, digite  $f(x)$  na legenda em *Selecione os objetos na construção* e escolha *Função f* na lista de objetos construídos.
- Criar uma caixa para exibir a função  $f_1(x) = \sin(x)$ , ( $0 < x < \alpha$ ). Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Caixa para Exibir/Esconder Objetos*  e clicar na janela de visualização 2 na posição que deseja colocar o controle. Nas propriedades do objeto, digite  $f_1(x)$  na legenda em *Selecione os objetos na construção* e escolha *Função f<sub>1</sub>* na lista de objetos construídos.
- Criar uma caixa para exibir a função  $f_2(x) = \sin(x)$ , ( $\alpha < x < 0$ ). Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Caixa para Exibir/Esconder Objetos*  e clicar na janela de visualização 2 na posição que se deseja colocar o controle. Nas propriedades do objeto, digite  $f_2(x)$  na legenda em *Selecione os objetos na construção* e escolha *Função f<sub>2</sub>* na lista de objetos construídos.
- Criar uma caixa para exibir a função  $f_3(x) = \sin(x)$ , ( $-\alpha < x < \alpha$ ). Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *Caixa para Exibir/Esconder Objetos*  e clicar na janela de visualização 2 na posição que se deseja colocar o controle. Nas

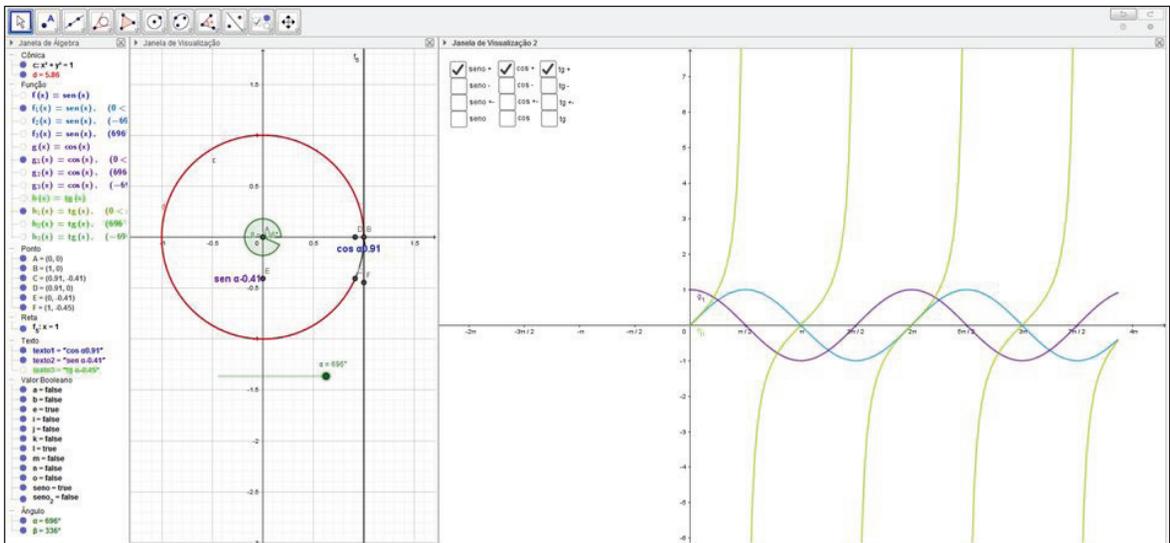
propriedades do objeto, digite  $f_3(x)$  na legenda em *Selecione os objetos na construção* e escolha *Função  $f_3$*  na lista de objetos construídos.

- Repetir o procedimento para as funções cosseno e tangente.

O resultado das ações descritas observa-se na Figura 5, com a representação das funções seno, cosseno e tangente.

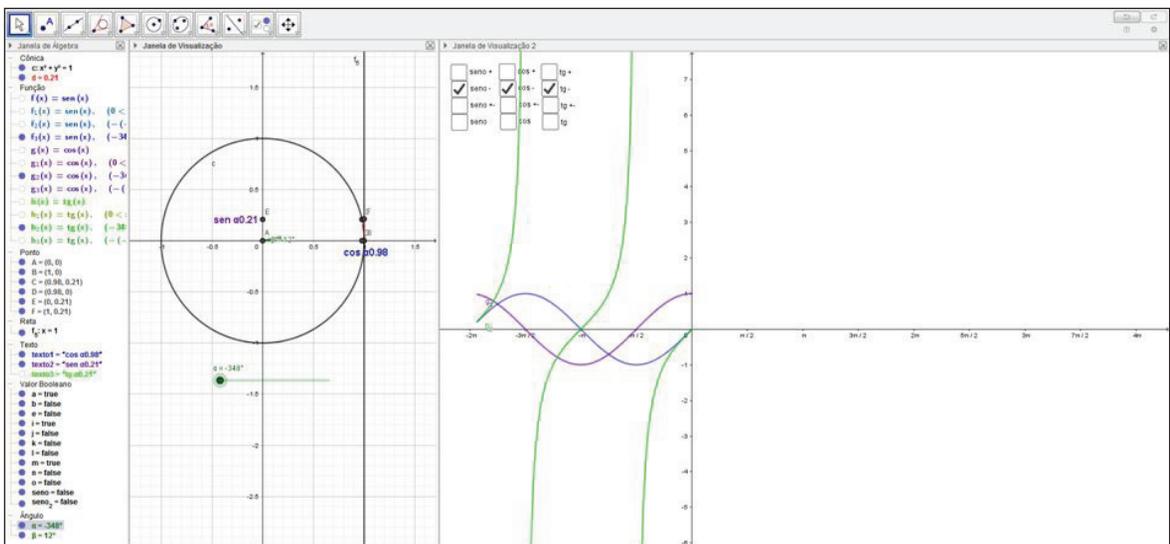
A Figura 6 representa as funções seno, cosseno e tangente com a representação do ângulo  $\alpha < 0$ .

Figura 5 – Representação das funções seno, cosseno e tangente com  $\alpha > 0$ .



Fonte: os autores.

Figura 6 – Representação das funções seno, cosseno e tangente com  $\alpha < 0$ .



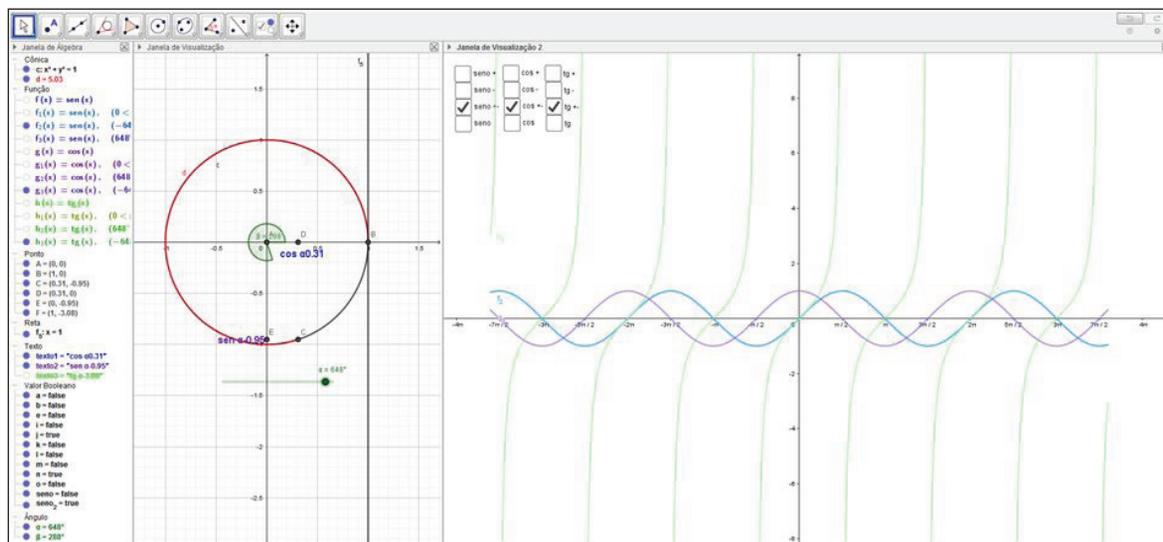
Fonte: os autores.

A Figura 7 representa as mesmas funções, com a representação do ângulo variando entre  $-\alpha$  até  $\alpha$ .

Com todas as construções realizadas, o professor pode planejar a aula propondo aos alunos que trabalhem com o círculo trigonométrico

manipulando o valor de  $\alpha$  e verificando as relações entre  $\alpha$ , a posição do ponto C e as projeções de C nas abcissas, ordenadas e na reta da tangente. Nessa atividade, os alunos devem compreender a relação entre as unidades de medida de graus e radianos dada pelo comprimento de arco.

Figura 7 – Representação das funções seno, cosseno e tangente com  $\alpha < 0$  e  $\alpha > 0$ .



Fonte: os autores.

Após a compreensão dessas relações, o professor exhibe a função que deseja trabalhar habilitando-a na caixa de exibição criada para essa funcionalidade. Então os estudantes passam a verificar a relação dos radianos, definida por  $\alpha$ , e os valores associados de seno, cosseno e tangente.

Desse modo, conforme indicado na BNCC do Ensino Médio (2017), versão preliminar, os alunos interagem com o objeto de aprendizagem construído, identificando as questões relativas à periodicidade, ao domínio e à imagem das funções trigonométricas.

Ressalta-se que a construção permite que os alunos identifiquem que objetos estão relacionados; no caso  $\alpha$ , qual é o objeto independente e quais são os objetos dependentes. Para alguns casos, porém, como em uma revisão, a construção é desnecessária, e o objeto construído será utilizado para estudo das relações. Cabe ao professor, em sua organização de aula, decidir e definir quais atividades serão apresentadas de

acordo com o seu tempo disponível e os conhecimentos prévios dos seus alunos.

Uma expansão para o estudo de funções é trabalhar com as transformações de translação, simetria, ampliação e redução. Para tal objetivo, recomenda-se que o professor proponha atividades nas quais seja possível a manipulação dos coeficientes de transformação. Para as funções trigonométricas, é possível trabalhar com as funções:

- $f_4(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$
- $g_4(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$
- $h_4(x) = a + b \cdot \operatorname{tg}(c \cdot x + d)$

É indicado que inicialmente se trabalhe a variação dos coeficientes um a um, realizando conjecturas sobre as relações entre a variação dos coeficientes e a transformação associada. No repositório do GeoGebra, encontram-se disponíveis dois objetos de aprendizagem desenvolvidos pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências e

Matemáticas para o estudo das transformações das funções notáveis – um para ser apresentado em computadores (<https://www.geogebra.org/m/rmn8mfkz>) e outro para celulares (<https://www.geogebra.org/m/hKKzTUP8>).

### **Análise dos resultados coletados nas oficinas ministradas para professores e licenciandos em Matemática**

Participaram das oficinas ministradas 31 professores de Matemática e 44 estudantes de Licenciatura em Matemática. Considera-se que essa atividade pode ser considerada motivadora, pois o empenho dos participantes das oficinas foi significativo e, ao mesmo tempo, desafiador. Ao se depararem com as possíveis situações de aprendizagem, os professores e futuros professores participantes das oficinas externaram que é possível desenvolver variações e outras possibilidades para uso em suas aulas.

Os participantes demonstraram interesse sobre a temática trigonometria e ressaltaram que esse foi o principal motivo para escolherem participar das atividades, estando curiosos e atentos a todos os detalhes do seu desenvolvimento. Para essas atividades, trouxeram contribuições através de relatos de situações em suas experiências docentes. Com o conhecimento adquirido, poderão abordar a temática utilizando o recurso didático que foi criado no *software* GeoGebra.

Os participantes que já ministraram aulas de Trigonometria e de Funções Trigonométricas destacaram que, em geral, os alunos apresentam dificuldades com essas temáticas e acreditam que o objeto de aprendizagem facilitará a compreensão dos conceitos que estão sendo apresentados. Afirmaram, ainda, que a apresentação do círculo trigonométrico irá auxiliar no ensino dos gráficos, fazendo com que os alunos não copiem apenas o que está apresentado no quadro ou no livro didático.

Entende-se que a utilização do *software* GeoGebra auxilia de forma geral na visualização do conteúdo para que os alunos possam melhor interpretar o que está sendo apresentado, assim levando à compreensão dos conteúdos matemáticos envolvidos. Em um contexto geral, os participantes já conheciam o *software* GeoGebra, mas não haviam realizado trabalhos de sala de aula utilizando esse recurso.

As programações apresentadas foram consideradas novidades por todos. Os professores salientaram que o material serve de apoio para aulas de Ensino Básico, Médio e Superior.

Os dados coletados demonstraram que os professores e licenciandos estão em busca de conhecimentos diferenciados para a utilização das tecnologias digitais a fim de realizar seus planejamentos integrados a elas.

Como reflexão futura, considera-se importante que a prática docente seja constantemente atualizada, que viabilize aos estudantes atividades ricas em recursos visuais e possíveis de ser desenvolvidas em sala de aula. Além disso, há recursos didáticos prontos e disponíveis no site <https://www.geogebra.org/materials> que o professor pode utilizar no seu planejamento de aulas.

### **Referências**

- ALMEIDA, M. E. B. de. Tecnologia na Escola: Criação de Redes de Conhecimento. In: *Tecnologias na Escola* (71-73). 2008.
- BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. In: *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v.6, n.2, p.46-64, 2017.
- BOGDAN, R., BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1991.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio*. 2018. Disponível em: <<http://basenacional-comum.mec.gov.br>>. Acessado em: 17 abr. 2018.
- BRASIL. *Guia de tecnologias educacionais da educação integral e integrada e da articulação da escola em seu território*. 2013.
- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. 1996.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. 2000.
- CORRADI, D. K. S. *Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.
- DANTAS, A. S. O uso do GeoGebra no ensino de Trigonometria: uma experiência com alunos do Ensino Médio. In: *Ciência e Natura*, Santa Maria, v.37, Ed. Especial Profmat, p.123-142, 2015.
- GROENWALD, C. L. O; DANTAS, S. C.; DUDA. *Tecnologias digitais em aulas de Matemática:*

- pesquisas e práticas docentes. In: BRANDT, C. F.; GUERRIOS, E. (Org.). *Práticas e pesquisas no campo da Educação Matemática*. Curitiba: CRV, 2017.
- HOHENWARTER, M. GeoGebra – Informações. 2007. Disponível em: <[https://app.geogebra.org/help/docupt\\_BR.pdf](https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf)>. Acesso em: 23 nov. 2017.
- HOMA, A. I. R.; GROENWALD, C. L. O. Incluindo tecnologias no currículo de Matemática: planejando aulas com o recurso dos *tablets*. In: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.46, diciembre 2016, p.20-40, 2016.
- KAMPFF, A. J. C. *Tecnologia da informação e comunicação na educação*. Curitiba: IESDE Brasil, 2012.
- KRIPKA, R. M. L.; KRIPKA, M.; PANDOLFO, P. C. N.; PEREIRA, L. H. F.; VIALI, L. LAHM, R.A. Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas. In: *Acta Scientiae*, Canoas/RS, v.19, n.4, p.544-562. 2017.
- LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de Trigonometria usando o *Software GeoGebra*. In: *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro/SP, v.27, n.46, p.631-644, 2013.
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.
- NCTM. *De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático para todos*. México, 2015.
- NÓVOA, A. *Desafios do trabalho do professor no mundo contemporâneo*. Palestra de António Nóvoa, 1–24, 2007.
- PEDROSO, L. W. *Uma proposta da Trigonometria com uso do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- PERRENOUD, P. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.
- REZENDE, R. L. *Utilizando materiais manipulativos e o GeoGebra para o Ensino da Trigonometria*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2015.
- SALAZAR, D. M. *GeoGebra e o estudo das Funções Trigonométricas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- SOUSA, J. M. *Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis*. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) Universidade de São Paulo, campus São Carlos, 2017.

---

**Jonata Souza dos Santos** – Acadêmico do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Luterana do Brasil.  
E-mail: jonatasantos1995@gmail.com

**Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa** – Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil. Professor da Universidade Luterana do Brasil. E-mail: iaqchan@ulbra.br