OS CAMINHOS DA FRAÇÃO: DA ORIGEM DO CONCEITO AO SABER ENSINADO NA ATUALIDADE

Fraction paths: From concept origin to contemporary taught knowledge

Antonio Sales
Sérgio Freitas de Carvalho
Danise Regina Rodrigues da Silva

Resumo

Este trabalho tem por objetivo descrever o processo de transposição didática do conceito de fração desde a sua origem, entendendo-a não como um número, mas como parte de um inteiro, à ideia de número, componente de um conjunto numérico criado para preencher lacunas existentes no conjunto dos números inteiros. Como saber acadêmico, discute-se formalmente as suas propriedades com o olhar voltado para as questões estruturais da matemática. Finalmente, a fração retorna à ideia original de não número e como um saber a ser ensinando na escola da Educação Básica. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, descritiva, norteada pela Teoria da Transposição Didática e, mais especificamente, pela Transposição Didática *Stricto Sensu.*

Palavras-chave: Transposição Didática. Fração como Número. Estruturas Matemáticas.

Abstract

The aim of this work is to describe the Didactic Transposition process of the fraction concept since its origin, considering it not as number, but as part of an integer, the idea of number, part of a number set created in order to fulfill the gaps in the set of integers. Properties of integers are formally discussed as academic knowledge focusing on mathematical structure. Finally, the fractions back the original idea of non-number and as knowledge to be taught at elementary and secondary education. This is a bibliographic and descriptive research, based on Didactic Transposition Theory, especially Stricto Sensu Didactic Transposition.

Keywords: Didactic Transposition. Fractions with Number. Mathematical Structures.

Introdução

Pensar em caminhos de um conceito matemático, até que ele se transforme em um saber a ser ensinado em nossas escolas na atualidade, requer um estudo que extrapola a análise da trajetória histórica com a simplicidade com que, muitas vezes, essa trajetória é apresentada.

Pais (2000, p.13), por exemplo, destaca que "estudar o processo evolutivo por que passa a formação do seu objeto de ensino" é uma questão importante no Movimento da Educação Matemática. Estudar essa evolução permite identificar os múltiplos fatores que influenciam na determinação do saber a ser ensinado. Esses fatores podem ser externos ou internos ao ambiente escolar ou, até mesmo, ao próprio conceito, conforme será visto em parágrafos posteriores.

No presente trabalho, procuraremos analisar a evolução do conceito de fração à luz da transposição didática.

A transposição didática

Chevallard introduziu, na década de 1980, o conceito de transposição didática para caracterizar a rede de influências pela quais passa um saber científico ou acadêmico até se transformar em saber escolar. O seu trabalho leva em consideração o fato de que um saber acadêmico é descontextualizado, como destacou Pais (2000, p.14-15), ao afirmar que, "na linguagem usada no meio científico, o *saber* é quase sempre caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado a um contexto científico histórico e cultural".

Adiantamos que partimos do pressuposto de que saber e conhecimento são conceitos distintos. Eles se distinguem pelo fato de esse último ser pessoal, ter caráter experimental e aspectos utilitários, enquanto o saber, conforme visto no parágrafo precedente, é despersonalizado e descontextualizado. Neste trabalho nos deteremos no estudo do saber.

Um saber acadêmico, pela própria característica do conceito, perde o contato com a origem, afasta-se da motivação para o seu surgimento, rompe com o contexto social ou econômico que despertou no homem, ao longo de certo tempo, a idealização e a apresentação das primeiras formas. É um conhecimento que passou por um processo de transformação e que foi validado pela comunidade científica.

A transposição didática é entendida por Pais (2000, p.13-14) como um caso particular da transposição dos saberes ou "evolução das ideias". Esse autor admite que falar em transposição só faz sentido quando a relacionamos a um saber específico, e que admitir um determinado saber implica "pensar na existência de um movimento de transposição".

Levando em conta que a transposição que estamos considerando é aquela que transforma o saber acadêmico em saber escolar, recorremos a Lopes sobre as características desse segundo. Ela afirma que:

> [...] o conhecimento científico rompe com os princípios e formas de pensar cotidianos, com os quais o conhecimento escolar precisa dialogar, o que nos exige compreender como essas inter-relações entre diferentes saberes sociais podem acontecer, de forma a favorecer a socialização. (LOPES, 1999, p.20)

O saber escolar tem configurações próprias, criadas pela própria escola e, portanto, guarda características distintas do saber acadêmico ou científico. Essas configurações criadas pela escola não o tornam, necessariamente, menos importante ou menos complexo do que o outro, apenas o adapta aos seus objetivos de constituir novas estruturas cognitivas nos estudantes. Estruturas necessárias para a constituição de outras estruturas que comporão o amplo campo de conhecimento que a sociedade espera que o aluno domine. Portanto, ao criar as próprias configurações do saber que ensina, a escola não tem o objetivo de deturpar o saber de referência, mas torná-lo acessível. A escola não ensina saberes puros, postula Lopes (1999, p.215), mas "sim conteúdos de ensino que resultam de cruzamentos complexos, um projeto de formação e exigências didáticas".

Conforme Lopes (1999, p.19), a diferença entre o saber acadêmico, de referência, e o saber escolar "não é necessariamente indesejável", porque contribui para construir "novas configurações cognitivas" que seriam dificultadas pela transmissão direta do "saber de referência".

Caracterizando o saber acadêmico, Errobidart (2010, p.23) esclarece que esse saber sofre "descontextualização", isto é, uma desvinculação do problema que motivou a pesquisa. Ela ocorre também como forma de distanciar-se dos problemas ou saberes do cotidiano tornando-se "distorcidos" em relação a estes. Outro fator importante a considerar é a generalidade do saber acadêmico, cujas proporções não somente extrapolam, mas também rompem com os estágios iniciais do desenvolvimento cognitivo. Quando se trata do saber matemático, este, ao ser modelado, ganha um alto nível de generalização que o despersonaliza ocultando as influências pessoais e sociais, bem como "as ideologias dos produtores do conhecimento científico".

Astolfi e Develay (1991, p.116) caracterizam o conhecimento científico como um saber "construído", que conseguiu desprender-se da "experiência imediata". Um saber "coerente" porque permite organizar os dados e fazer previsões pela demarcação do "fluxo irreversível dos fenômenos" e, ao mesmo tempo, em deslocamento constante em decorrência das retomadas que faz toda vez que uma "exceção se figure".

O processo de transposição didática, portanto, inclui o processo de fragmentação, dessincretização, programabilidade e publicidade afirma Errobidart (2010). A modelização pela qual passa o saber para se tornar científico torna-o sincrético, uma vez que "constituído de conceitos que podem ser apreendidos em diferentes níveis de formulação e que não se organizam de maneira linear, mas de acordo com redes e trama conceituais" (ASTOLFI; DEVELAY, 1991, p.117), e a fragmentação torna-se um fator importante para reaproximá-lo do objeto de origem, do seu ponto de partida. Para trazê-lo próximo ao seu estado primitivo de modo a permitir uma nova reorganização e que sejam programáveis as atividades ou organizações didáticas que proporcionam a manipulação das ideias implícitas através de objetos explícitos e manipuláveis. O objetivo da transposição didática de um saber acadêmico em saber escolar é refazer rupturas, preenchendo as lacunas que a descontextualização e generalização provocaram. Uma aproximação da "experiência primeira" que antecede a crítica. Despojá-lo um pouco das suas "construções metafóricas" (BACHELARD, 2005, p.5-29).

Em um dos seus trabalhos, Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.136) dão ênfase nas características que diferenciam e aproximam a matemática escolar da matemática acadêmica ou "obras matemáticas originais" focalizando a necessidade de "reconstrução" destas para que possam ser ensinadas na escola. A aproximação é tanta que fica difícil imaginar que o saber científico tenha chegado à escola por acaso. Essa "recriação" escolar é tão semelhante à obra original que pressupõe intencionalidade e múltiplos fatores não acidentais, sendo que nesse conjunto o professor é uma peça, porém, não a única e nem a mais importante.

Os autores afirmam ainda que "essa reconstrução escolar da matemática é absolutamente imprescindível" e intencional porque muitos elementos que se fizeram presentes na "origem da obra matemática" não são adequados ao uso no contexto escolar. A primeira etapa da TD acontece, segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.136) na "própria comunidade matemática". A própria escolha dos elementos que serão trabalhados na construção da "obra matemática" e depois reconstruídos para uso na escola acontece nessa comunidade.

A transposição didática de um conteúdo específico pode ser classificada em interna ou externa. Essa categorização aparece nos escritos de Errobidart (2010) e Pais (2000), porém com conceituação diferente. Errobidart, discutindo as relações que são estabelecidas no contexto da sala de aula tendo a transposição didática como fator de mudanças no saber, pensa na influência dos fatores externos a esse ambiente como sendo o Livro Didático, os Programas de Ensino e as Diretrizes Curriculares, entre outros, como integrantes da transposição didática externa. Esses fatores são conduzidos ou produzidos por "pedagogos, professores, técnicos do governo das esferas municipais, estaduais e federais, autores de materiais didáticos e demais responsáveis pelo ensino, membros de entidades menores que compõem a instância transformadora denominada noosfera" (ERROBIDART, 2010, p.12). Por outro lado, o que verdadeiramente acontece na sala de aula, as ações do professor, a sua forma de abordagem do conteúdo constitui a transposição didática interna. Portanto, ela fala de transposição didática interna ou externa à sala de aula onde o conteúdo específico do saber escolar está sendo ou há de ser trabalhado.

Pais (2000, p.19, os itálicos são do autor), por sua vez, analisa essa classificação sob outra perspectiva. Ao falar da transposição didática interna ou "*Transposição Didática Stricto Sensu*" ele se refere à evolução epistemológica do conceito científico que está sendo estudado. Em determinada época, o conceito é abordado sob uma perspectiva e, em outro momento histórico ou contexto social ou intelectual sob outra perspectiva, em conformidade com o nível de compreensão que se tem dele. Enquanto isso, a transposição didática externa, ou "*Transposição Didática Lato Sensu*", é uma referência aos fatores que decorrem da perda de objetivo do ensino de um conceito ou da má compreensão da proposta pedagógica original para a abordagem do mesmo. Temos em nossos dias exemplos de movimentos que trazem propostas de abordagem de conceitos matemáticos na Educação Básica. Uns defendem a perspectiva histórica do surgimento do conceito, outros propõem uma abordagem estruturalista, outros, ainda, entendem que eles sejam tratados do ponto de vista da linguagem, da semiótica, da aplicação social e assim por diante. Vista por esse ângulo, até a intervenção do professor é um fator da "*Transposição Didática Lato Sensu*". O autor cita o caso do Movimento da Matemática Moderna, que propôs o estudo da teoria dos conjuntos com o objetivo de apresentar a matemática em seu aspecto estrutural. No entanto, a não compreensão desse objetivo produziu "criações didáticas" diversas para trabalhar os "*diagramas de Venn*". O que devia ser um meio tornou-se um fim.

Neste trabalho, ao analisar a transposição didática do conceito de fração desde o conhecimento experimental dominado nos primórdios do conceito até o saber escolar atual, usaremos a categorização discutida por Pais, exposta no parágrafo precedente.

Frações: do conhecimento utilitário ao saber escolar

Ao analisar a transposição didática do conceito de fração desde o conhecimento individual, e utilitário, fundamentado na experiência, até o saber científico e, deste, ao saber escolar, nós o faremos na perspectiva da transposição didática "*stricto sensu*". Procuraremos acompanhar a sua evolução interna sem discutir os fatores externos que a motivaram.

É difícil precisar a origem da ideia de fração. Sabe-se que em 2000 a.C. os babilônios já tinha uma notação própria para ela, a notação posicional, a mesma ideia dos números decimais de hoje, porém na base sexagesimal e com as restrições próprias da escrita da época. As frações também aparecem nos escritos egípcios mais ou menos na mesma época. No papiro de Rhind (1650 a. C.), elas aparecem na forma de frações unitárias tanto em hieróglifos como na escrita hierática (MAINVILLE JR., 1992, p.52-53). Ao que tudo indica, a ideia presente era de fração como pedaço ou parte de um inteiro, também denominada de relação parte/todo. As frações decimais, no entanto, só apareceram na Europa por volta de 1400, e a notação atual é atribuída aos hindus (MILLER; FEY, 1992, p.54-55).

Mainville Jr. (1992, p.54) informa que "A palavra árabe que designa fração, *al-kasr*, é derivada do verbo cujo significado é "quebrar". As formas latinas *fractio* e *minutun ruptus* eram traduzidas por antigos autores da língua inglesa como *broken numbers* (*números quebrados*) (destaques do autor).

Com essa ideia de número quebrado, ela chegou às escolas brasileiras ainda no século XIX conforme se vê em Trajano (1880), que, na definição, que recebeu o número 135, de seu livro "Arithmetica Progressiva", afirma que: "Fracção é uma ou mais partes iguaes de uma unidade. A palavra fracção vem do latim *frango,* que quer dizer: *Eu quebro.* Uma fracção é, portanto, uma ou mais partes iguais de um todo que na numeração tem o nome de unidade ou 1" (TRAJANO, 1880,[1] p.67 grifos do autor).

Na educação básica, a fração, como ocorria nos tempos antigos (IFRAH, 2001), não é estudada como um número, mas como parte de um todo. Segundo Boyer (1999, p.36), nos primórdios da Matemática na Grécia "uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação entre inteiros". É com essa visão que o assunto é tratado na educação básica.

Nos manuais didáticos, para esse nível educacional, fração é apresentada como pertencente ao conjunto dos números relacionados com medida. Por exemplo, o estudo das frações é introduzido com expressões do tipo: "um quinto de" (CENTURIÓN, 1995, p.220). Em realidade, essa expressão também nos remete à ideia de parte, pedaço, fragmento.

Nas considerações tecidas, a respeito do novo conjunto numérico que surge, aparecem expressões como a "partição de um todo", ou como " três fatias de um torta que foi dividida em quatro partes" (CENTURIÓN, 1995, p.221).

Sales e Felice (2014) observaram que, conforme definição de Iezzi, Dolce e Machado (2005), cujo livro foi aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em várias edições sucessivas, fração é um número composto por dois números e não um número composto por dois algarismos. É um número que associa duas quantidades: a quantidade de partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e a quantidade de partes que foram tomadas desse inteiro (numerador). Citando textualmente os autores de manual didático, encontramos que:

[1] O excerto foi extraído da 57ª edição, cujos elementos identificadores de local e data estão corrompidos. Segundo notas do próprio livro, a primeira edição data de 1880.

> Podemos dizer, então, que fração é um número que representa partes de um inteiro. Nas frações o número colocado abaixo do traço é chamado *denominador* e indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida. O número colocado acima do traço é chamado *numerador* e indica em quantas partes da unidade foram tomadas. (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p.154, grifos dos autores)

Encontramos também que

> Toda fração está sempre associada a duas ações:
>
> - dividir um todo em partes iguais, sendo, cada uma das partes, as unidades fracionárias;
>
> - considerar uma ou mais unidades fracionárias. (CENTURION, 1995, p.221)

No School Mathematics Study Group (SMSG), consta que:

> Houve tempo em que homem não conhecia as frações. Historicamente, ele introduziu as frações quando começou a medir e a contar. Se ele dividia um pedaço de corda em duas partes de igual comprimento, cada parte tinha ½ do comprimento da corda inicial. (apud CENTURIÓN, 1995, p.222)

O conceito de fração como número, como uma quantidade, só apareceu tardiamente na História. Em 1582, com a ideia de Simón Stevin de representar as frações como números decimais, já se concebia fração como número, inclusive do sistema decimal (IFRAH, 2001).

Até aqui, discutimos o conceito de fração em sua origem e como é, ou espera-se que seja, tratado na educação básica. No entanto, em âmbito acadêmico, a ideia de fração ou número racional adquire outra dimensão. É aí que o professor recebe a sua habilitação para discutir o assunto com os seus alunos da educação básica. Essa visão contrapõe-se ao que foi aprendido por ele quando aluno da educação básica. Nos casos em que o próprio estudante ou o professor da disciplina não se ocupa em discutir os múltiplos significados de uma ideia matemática ou as múltiplas formas de sua abordagem e aplicação, esse futuro professor da educação básica ficará sem um preparo prévio para proceder à transposição didática. Ficará sem um referencial sobre como discutir essa transformação do saber empírico ao saber acadêmico e deste ao saber escolar.

Os números racionais, na perspectiva da matemática acadêmica, surgem como uma extensão dos campos numéricos visando à inclusão da divisão, como operação. Ivan Níven introduz o assunto com as seguintes palavras:

> Vimos que os números naturais 1, 2, 3, 4, 5,... são fechados em relação à adição e à multiplicação, e que os inteiros ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,... são fechados em relação à adição, à multiplicação e subtração. No entanto, nenhum desses conjuntos é fechado em relação à divisão, porque a divisão pode produzir frações como 4/3, 7/6, -2/5, etc. O conjunto de todas as frações como estas é o conjunto dos números racionais. (NIVEN, 1984, p.30)

Número racional é denominado, pelo autor, de fração ordinária e é definido como quociente entre dois números inteiros. Todo restante do capítulo concentra-se nas propriedades operatórias dos racionais, representações decimais e racionalização (como forma de evitar que se confundam números irracionais com números racionais).

A mesma linha de raciocínio é seguida por Ayres Jr. (1979) que, em seu livro da “coleção Schaum”, voltado exclusivamente para o ensino superior, aborda o assunto a partir da ideia de que os conjuntos dos números naturais e inteiros deixaram “espaços” sem ser preenchidos na construção da estrutura da matemática. Os conjuntos citados não permitem a definição da operação de divisão, sendo imperioso que os números racionais fossem organizados. Toda a discussão se desenvolve em torno das propriedades operatórias, densidade, relações de ordem, representação decimal e periodicidade. Um tratamento estritamente algébrico.

Adler (1972) procura apresentar a Matemática de forma mais compreensível, em um texto menos sintético, menos "enxuto". O seu objetivo é atingir pessoas de "cultura mediana", isto é, não especialistas, porém, ainda assim mantém-se preso ao aspecto estrutural da Matemática.

No prefácio, o autor anuncia a sua intenção com as seguintes palavras:

> Este livro se destina, ao leitor médio que tenha curiosidade de conhecer os novos progressos da Matemática. Não é um curso de revisão da Matemática estudada no colégio. Não é uma rearrumação de velhas ideias, mas uma introdução às ideias novas, tradicionalmente ensinadas apenas aos especialistas, nas universidades. Mas, embora as ideias sejam avançadas, a apresentação é elementar. Qualquer pessoa que tenha estudado a Álgebra e a Geometria do curso ginasial poderá compreender o sentir prazer na leitura deste livro. (ADLER,1972, p.VI)

Pode-se ver que o autor anunciou uma nova abordagem, porém não conseguiu desprender-se da visão estruturalista. Foi mais prolixo do que os citados anteriormente, contudo o apego à estrutura não permitiu que os não especialistas tivessem fácil acesso ao texto. Ele continua:

> O modo de ver do matemático moderno é indicado pelo uso frequente do radical "MORF" que significa forma, como nas palavras "HOMOMORFISMO", "ISOMORFISMO" e ''HOMEOMORFISMO". O matemático vê o conjunto numérico como um complexo de estruturas interligadas. Ele estuda estas estruturas separadamente e nas suas relações umas com as outras, A exploração dessas estruturas revelou que temos não um conjunto numérico, mas conjuntos numéricos; não Álgebra, mas álgebras: não Geometria, mas geometrias; não Espaço, mas espaços. Enquanto as propriedades dos números e do espaço se generalizavam, o campo de estruturas da Matemática se multiplicava. (ADLER, 1972, p VI)

No capítulo quatro do seu livro (ADLER, 1972), o assunto dos números racionais é introduzido com a ideia explícita de medida, porém uma medida que poderíamos denominar de "interna", isto é, o autor não está preocupado em discutir como esses números podem ser usados para medir objetos do cotidiano, como um instrumental de uso para o iniciado em Matemática. Ele se ocupa em discutir o quanto um número mede outro, quantas vezes uma quantidade está contida na outra. É uma discussão interna, voltada para a compreensão da própria Matemática.

Textualmente, o autor diz: "o símbolo $\frac{-6}{2}$ na verdade nos põe a pergunta: 'qual é o inteiro que, multiplicado por 2, dá -6 como produto?'. Como a resposta a esta pergunta é -3, dizemos que $\frac{-6}{2}$ = -3" (ADLER, 1972, p.61).

Mantendo-se firme nessa linha de raciocínio, o autor discute a criação de um novo conjunto numérico, "a família das frações" (ADLER, 1972, p.63), discutindo todas as suas propriedades operatórias e estruturais.

Domingues (1991) introduz o assunto dos números racionais retomando a sua origem no Egito com enfoque na fração como resultado de uma divisão não exata. Em todo restante do capítulo, o autor discute as relações que são estabelecidas no conjunto dos racionais, as operações, respectivas propriedades e o módulo. O tratamento, embora apresente certa facilidade de compreensão, é teórico e levando em conta fatores estruturais.

Um pouco mais flexível na linguagem, Courant e Robbins (1984, p.62) introduzem o assunto falando de medidas de "comprimento, áreas, pesos e tempos" como fatores que impulsionaram o surgimento das frações para, em seguida, discutir o processo de abstração que nos conduz ao estudo dos racionais não mais sujeitos a uma "referência concreta ao processo de medir e às quantidades medidas e, ao invés disso, consideradas como um puro *número*" (itálico do original). Dessa forma, ele é elevado ao "mesmo nível dos números naturais" tendo o status de "entidade própria", em que o símbolo m/n, com m e n naturais e n diferente de zero, representa um único número e não dois números, como pode parecer à primeira vista.

O assunto passa, logo em seguida, a ser discutido pelos autores de um ponto de vista "puramente aritmético, e típico de uma tendência dominante do procedimento matemático" (COURANT; ROBBINS, 1984, p.65).

Os autores destacam que as operações, nesse conjunto numérico, são criações humanas. As definições são, portanto, arbitradas com base na lógica visando criar um instrumento útil. A operação $1/2+1/2$ poderia ser definida como resultando em 2/4. Esse resultado seria correto do ponto de vista da definição, porém seria necessário criar outra aritmética, e os números racionais fugiriam completamente do objetivo da sua origem, tornando-se um "jogo sem sentido". O que se procurou foi manter a "consistência e utilidade para aplicações" (COURANT; ROBBINS, 1984, p.64).

Dessa forma, Courant e Robbins descrevem o processo de transposição didática do conhecimento individual, e utilitário, fundamentado na experiência, ao saber acadêmico.

Tendo em vista que a preocupação aqui é saber como ele chega ou espera-se que chegue à sala de aula do ensino fundamental, retomamos a discussão anterior à algebrização das frações. Buscamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para ensino fundamental (PCN) (BRASIL 1998) as orientações emanadas desse documento:

> O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. (BRASIL, 1998, p.66)

O mesmo documento orienta que o estudo dos números racionais deve ser estudado levando em conta "suas diferentes formas de expressão como fracionária decimal e percentual" (BRASIL, 1998, p.76).

No entanto, essa abordagem deve levar em conta a ideia de fração como parte, pedaço, de um objeto através da relação parte/todo, como medida de um número por outro ou divisão de certa quantidade em partes iguais (quociente), como comparação entre duas grandezas de naturezas diferentes (razão) e como fator de acréscimo ou diminuição de um número a partir de um dado referencial, e proporcional ao número a ser alterado (fração como operador). É o caso de usar a fração como fator de aumento (ou diminuição) percentual ou ainda reduzir um número a uma de suas partes como, por exemplo, reduzir um número a seus $\frac{3}{4}$.

Para Kieren (1980, p.131) são cinco ideias de número fracionário que constituem uma base para a construção de um número racional. São as cinco formas de pensar o número racional. Uma delas é a relação bipartida "parte/todo", que traz implícita a ideia de "quantificar a relação entre o todo e uma área específica para o número de peças".

> A notação par ordenado assume diferentes significados quando se trata de razão e quando se trata de comparações quantitativas de duas qualidades. Três décimos (3/10) de uma superfície de chão tem um significado muito diferente do que 3/10, quando compara o número de meninas e meninos em uma [sala de aula]. Esta distinção fica ainda mais confusa quando se trata de comparar 7 mortes por 1000 habitantes ou 450 automóveis por 1000 habitantes pelo conceito de equivalência. Nós representamos indistintamente 3 ratos para 4 gatos (3/4) e 30 acertos em 40 morcegos (30/40) com a decimal, 0,75. Eles são fenômenos claramente muito diferentes. No entanto, 75/100 [75 centímetros e 750/1000 de um metro (750 milímetros)] são a mesma medida. (KIEREN, 1980, p.135, tradução nossa, com adaptações)

O número racional como parte/todo nos remete também à ideia de quociente. No entanto, para o aluno, ele se apresenta aplicado a diferentes contextos, ora resultando em uma divisão, ora como resultado de uma equação do primeiro grau. Para nós, parece óbvio que dividir um inteiro em 4 partes e usar 3 $(\frac{3}{4})$ dá o mesmo resultado que dividir 3 por 4 resultando em 0,75. No entanto, são coisas diferentes para o aluno.

A ideia de fração como medida continua ligada à relação parte/todo. Entretanto, medir é atribuir um número a uma região em qualquer dimensão, um resultado que se obtém através de repetição do processo de contagem das unidades que cobrem a região. Na fração, porém, uma unidade arbitrária é dividida, e a relação parte/todo é obscurecida.

Assim, vemos fração como fragmento, a primeira ideia. Em seguida, ela estudada como o conjunto dos números racionais com operações criadas especificamente para manter a "consistência e utilidade para aplicações", conforme afirmou Courant e Robbins. Concomitantemente, é vista como um número que traz a ideia explícita de medida, conforme Adler, e, por último, volta para a escola como uma relação parte/todo, como quociente, razão e operador, de acordo com os PCN e carregada de subconstruções, conforme apontou Kieren.

Considerações finais

Os caminhos do conceito de fração, desde o conhecimento individual, e utilitário, fundamentado na experiência ao saber científico, a evolução interna desse conceito, teve que superar a ideia de que tudo que é menor do que o inteiro é somente um pedaço e não tem identidade própria. Identifica-se apenas como parte de um todo. No saber acadêmico, ele é um número, uma quantidade, uma relação, mas só tardiamente conseguiu esse *status* revelando a complexidade dessa ideia.

Ayres, Niven e Adler tratam-na em seu aspecto estrutural, levando em conta propriedades operatórias e sua relação com o todo, em que esse todo agora não é um objeto, mas o próprio campo do saber.

Finalmente, a fração chega à escola como um saber a ser ensinado, não mais como um componente da estrutura matemática, mas como parte de um inteiro, de um objeto, e como um não número. Quando volta para a sala de aula, no entanto, traz consigo maior complexidade. A ideia de que uma parte pode ser um todo em si mesmo exige a capacidade de isolar mentalmente essa parte do todo de tal modo que o restante "desapareça". Essa atividade mental, segundo visto em Ifrah, aparece somente em 1582, com Simón Stevin, ao representar as frações como números decimais. Da mesma forma, as subconstruções de que fala Kieren, quer sejam tratadas isoladamente, quer sejam abordadas em conjunto, estão longe de ser apenas pedaços de um inteiro.

Esse caminho percorrido rumo à formalização de um conjunto, em que a ideia de parte de um todo desaparece por completo, até o seu retorno à sala de aula, inicialmente como um pedaço e, logo mais, como um conjunto de subconstrutos que se interligam, é denominado Transposição Didática *Stricto Sensu*.

Referências

ADLER, Irving. *Iniciação à matemática de hoje*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. *A didática das ciências*. 2.ed. Campinas, SP: Papirus, 1991.

AYRES JR., Frank. *Álgebra moderna*. Barueri, SP: McGRAW-HILL do Brasil, 1979.

BACHELARD, Gastón. *A formação do espírito científico*. 5.reimpr. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998.

CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da Matemática:* números e operações. São Paulo: Scipione, 1995 (Série Didática – Classes de Magistério).

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar matemáticas:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 1984.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual 1991.

ERROBIDART, Nádia Cristina Guimarães. *O estudo qualitativo das transformações pelas quais passam os saberes até chegarem à sala de aula no conteúdo de Física Ondulatória*. Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS, 2010. (Tese de Doutorado em Educação).

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade*: 5ª série. 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

IFRAH, Georges. *Os números:* a história de uma grande invenção. 2.ed. Rio de Janeiro: Globo, 2001.

LOPES, Alice Ribeiro Casimiro. *Conhecimento escolar:* ciência e cotidiano. Rio de Janeiro: EdUERJ, 1999.

MAINVILLE JR., Waldek E. Frações. In: DAVIS, Harold T. *História da computação*. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos da História da Matemática para Uso em Sala de Aula, v.2).

MILLER, Leland; FEY, James. Frações Decimais. In: DAVIS, Harold T. *História da computação.* São Paulo: Atual 1992. (Tópicos da História da Matemática para Uso em Sala de Aula, v.2).

NIVEN, Ivan. *Números:* racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Alcântara (Org.). *Educação Matemática:* uma introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2000.

SALES, Antonio; FELICE, José. A racionalização de frações irracionais: ideias implícitas e adjacentes. *Perspectivas da Educação Matemática – UFMS*, v.7, número temático, 2014. Disponível em: <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/898/578>. Acesso em: 30 mar. 2016.

TRAJANO, António. *Arithmetica Progressiva*: curso completo theorico e pratico de Arithmetica Superior preparado para a mocidade brazileira. 57.ed. São Paulo; Rio de Janeiro; Belo Horizonte: Livraria Francisco Alves, 1880.

Antonio Sales – Licenciado em Matemática, Mestre e Doutor em Educação. Docente sênior da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul e docente da Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal. E-mail: profesales@hotmail.com

Sérgio Freitas de Carvalho – Mestre e Doutorando em Educação Matemática – UFMS. Professor temporário da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Unidade de Nova Andradina. Professor da Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal. E-mail: sergiofdcarvalho2012@gmail.com

Danise Regina Rodrigues da Silva – Mestranda no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação. Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. Professora da Rede Pública de Ensino em Campo Grande, MS. E-mail: daniseregina@yahoo.com.br