

ATIVIDADES DE TRATAMENTO E CONVERSÃO EM OPERAÇÕES COM VETORES POR ESTUDANTES DE ENGENHARIA: DIFICULDADES IDENTIFICADAS

Treatment and conversion activities in operations with vectors by engineering students: Identified difficulties

*Viviane Roncaglio
Cátia Maria Nehring*

Resumo

O presente artigo traz a ampliação dos resultados da pesquisa desenvolvida no Mestrado da primeira autora, com orientação da segunda. Nesta produção, nosso objetivo é discutir as atividades de conversão e tratamento realizadas por estudantes de Engenharia a partir da proposição de um pré e um pós-teste, envolvendo o conceito de vetor, considerando como fundamentação teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2009). Considerando as análises realizadas, concluímos que os estudantes de Engenharia apresentam dificuldades em realizar conversões quando um dos registros envolvidos é o registro figural. Além disso, apresentaram confusão na representação de vetor no sistema cartesiano, erros de visualização espacial, entre outros. Marcamos a importância da intervenção do professor na compreensão do conceito de vetor.

Palavras-chave: Conceito de Vetor. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Estudantes de Engenharia.

Abstract

This paper presents an expansion of the research results developed in the first author Master's degree, under the orientation of the second one. In this production we aim to discuss

the conversion and treatment activities carried out by engineering students, from a proposition of a pre- and post-test, involving the Concept of Vector. It was considered as theoretical basis the Theory of Semiotics Representation Registers by Duval (2003, 2009). Considering the analyses we conclude that Engineering students have some difficulties in performing conversions when one of the records involved is the figural record. In addition, they presented confusion in the vector representation in the Cartesian system and spatial visualization errors, among others. We emphasize the importance of intervention from a professor, based on activities that prioritize treatment and conversion activities, making possible the elaboration of the vector concept.

Keywords: Vector Concept. Theory of Semiotic Representation Registers. Engineering students.

Introdução

A partir do entendimento de documentos oficiais que orientam o currículo e o ensino de Matemática para a Educação Básica (PCNEF, PCNEM, PCNEM+, OCEM),¹ constata-se que essa disciplina é parte fundamental do conhecimento

¹ Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Fundamental – PCNEF (BRASIL, 1998), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1999), Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio+ – PCNEM+ (BRASIL, 2002a), Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006).

humano e essencial para a formação dos sujeitos, pois contribui para a construção de uma visão de mundo, isto é, para ler e interpretar a realidade. A partir desse pressuposto, o ensino e o aprendizado da Matemática são de fundamental importância nos diferentes níveis² da educação nacional. Em cursos do Ensino Superior, a Matemática é uma área e ou disciplina que contribui no processo de formação acadêmica profissional dos sujeitos, pelo fato de ser um instrumento e/ou uma linguagem para expressar diferentes situações e contextos.

Em cursos de Engenharia,³ utilizam-se diferentes conceitos matemáticos na formação do profissional, o que pode ser observado ao analisar suas Diretrizes Curriculares. Vale destacar que essas Diretrizes Curriculares são as orientações para organização dos projetos pedagógicos dos cursos de graduação. De acordo com esse documento,

O Curso de Graduação em Engenharia tem como perfil do formando egresso/ profissional o engenheiro, com formação generalista, humanista, crítica e reflexiva, capacitado a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade. (BRASIL, 2002, p.1)

² Os níveis de ensino no Brasil, de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9.394/96 (LDBEN), são apresentados a partir da Educação Básica (a qual abrange a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio) e o Ensino Superior. Ainda de acordo com a LDBEN (Título V, Capítulo II, Seção I, art. 22), a Educação Básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o pleno exercício da cidadania e fornecer os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores. O Ensino Superior, de acordo com a LDBEN (Título V, Capítulo IV, Seção V, art. 43), tem, entre outras, a finalidade de formar diplomados nas diferentes áreas de conhecimento, aptos para a inserção em setores profissionais e participação no desenvolvimento da sociedade brasileira, colaborando na sua formação contínua.

³ Foco desta pesquisa, considerando, principalmente, as Engenharias tradicionais, ou seja, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica e Engenharia Mecânica.

Nesse contexto, para que os cursos de Engenharia consigam formar profissionais com esse perfil, é necessário que ofereçam condições para o desenvolvimento de diversas competências e habilidades, tais como:

I. aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à Engenharia;

II. projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;

[...]

III. identificar, formular e resolver problemas de Engenharia;

IV. desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas; [...] (BRASIL, 2002, p.1, grifos nossos)

Ao analisar as competências e habilidades apresentadas nas Diretrizes Curriculares para a formação profissional do engenheiro, destacamos quatro que têm relação direta com a Matemática, o que marca a importância do ensino e aprendizado dos conceitos matemáticos para os estudantes de Engenharia.

Considerando essas habilidades, os currículos de Engenharia apresentam disciplinas Matemáticas que exploram conceitos fundamentais necessários à formação do engenheiro. Um desses conceitos, trabalhados em praticamente todos os cursos de Engenharia, é o de vetor, estudado nos primeiros semestres do curso. Na maioria das vezes, é trabalhado na disciplina de Geometria Analítica e Vetores (GAV) ou na de Álgebra Linear. Em nossa pesquisa, o conceito de vetor foi trabalhado na disciplina de GAV. O conceito básico na disciplina é vetor, seu entendimento, suas operações e sua relação com outras disciplinas no decorrer do curso.

Vetor é um conceito essencial na formação profissional do engenheiro.⁴ Na Engenharia Civil, depara-se com situações como dimensionamento de vigas e treliças, elevadores, guindastes, carregamentos, reações de apoio, nas quais existem forças envolvidas e também envolvem grandezas vetoriais. Na Engenharia Elétrica, o vetor é utilizado para determinar a existência de campo elétrico. E, na Engenharia Mecânica, os

⁴ Sempre que falarmos de engenheiro ou Engenharia a partir de agora, estaremos considerando os cursos de Engenharia Civil, Elétrica e Mecânica.

conceitos básicos envolvidos são espaço, tempo, massa e força.

Mas pesquisas apontam diferentes dificuldades no enfrentamento desse conceito (CASTRO, 2001; KARRER; BARREIRO, 2009; RONCAGLIO; NEHRING, 2014; RONCAGLIO, 2015). Algumas dessas pesquisas apontam que as disciplinas de GAV e Álgebra Linear são responsáveis, juntamente com as disciplinas de cálculo, pelo alto índice de reprovação e desistência dos estudantes ao longo do curso de Engenharia. Também indicam a grande dificuldade que os estudantes possuem em relação a essas disciplinas, mais especificamente em relação ao conceito de vetor. Acreditamos que, para haver possibilidade de apropriação do significado do conceito de vetor pelo acadêmico, tratamentos considerando o campo da geometria e o da álgebra são fundamentais. Nessas tratativas, outros conceitos são determinantes e constitutivos de sua significação, entre os quais destacamos: a *relação de equivalência*, *segmentos orientados* e *classe de equipolência*, questão ainda pouco explorada nas pesquisas e na própria prática dos professores.

De acordo com Mota e Marrocos (2014, p.16), a compreensão de relação de equivalência é fundamental na construção de objetos geométricos. A construção de uma relação de equivalência em um conjunto, para os referidos autores, tem como principal objetivo o agrupamento em classes de elementos que têm as mesmas características escolhidas a priori, de tal forma que cada uma das classes seja representada por um de seus elementos. Esses autores apresentam a seguinte definição para a relação de equivalência:

Seja A um conjunto, uma relação \sim em A é uma relação de equivalência de gozadas propriedades:

Reflexiva Para todo $\alpha \in A$, $\alpha \sim \alpha$;

Simétrica Se $\alpha \sim b$, então $b \sim \alpha$;

Transitiva Se $\alpha \sim b$ e $b \sim c$, então $\alpha \sim c$. (MOTA; MARROCOS, 2014, p.16)

Como propriedade, a reflexividade tem a finalidade de garantir que a classe de equivalência de cada um dos elementos do conjunto é não vazia, e a simetria e a transitividade de garantir que as classes ou são iguais ou disjuntas. Para

Mota e Marrocos, “Isso é suficiente para garantir que cada elemento de uma classe a determine” (2014, p.17).

Quanto a segmento orientado, baseado em Mota e Marrocos (2014), definimos como um segmento para o qual se determinou uma ordem para as suas extremidades. Se A e B são pontos que determinam um segmento e forem mencionados em uma ordem de tal forma que um deles seja o ponto inicial do segmento e o outro o ponto terminal do segmento, então o referido segmento está orientado. Dessa forma, os segmentos orientados possuem, assim, características específicas, tais como: comprimento, direção e sentido. No conjunto de todos os segmentos orientados no espaço, é possível identificar aqueles de mesmo comprimento, de direção e de sentido. Nestes, há uma relação de equivalência que preserva as propriedades: reflexividade, comutatividade e transitividade.

A classe de equivalência do segmento orientado AB, isto é, o conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a AB, será indicada por AB . Os elementos de uma classe de equivalência são chamados representantes da classe, assim, o segmento orientado AB é um representante de AB . Uma propriedade importante da classe de equivalência, [...], é que duas classes de equivalência são iguais ou não se interceptam. Assim, $AB = CD$ se e somente se AB é equipolente a CD . (MOTA; MARROCOS, 2014, p.17)

Mota e Marrocos (2014) definem, então, o vetor como cada classe de equivalência determinada pela relação de equipolência, marcando a importância de explorar as relações de equivalência e equipolência no trabalho com o conceito de vetor.

Levando em consideração a importância do conceito de vetor para os estudantes de Engenharia, desenvolvemos um pré e pós-teste, permeado por atividades realizadas pela professora responsável pela disciplina, com o objetivo de analisar a capacidade dos estudantes em realizar atividades de conversão entre os registros figurais e da língua natural e/ou simbólica envolvendo o conceito de vetor. A problematização que norteia esse recorte da pesquisa é: quais as atividades de

conversão e tratamento realizadas por estudantes de Engenharia na perspectiva de apreensão conceitual do conceito de vetor? Essas atividades indicam a compreensão conceitual?

Registros de representação e o conceito de vetor

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica,⁵ desenvolvida por Duval (2003), tem sido utilizada, principalmente, em pesquisas que visam à aquisição de conhecimento e à organização de situações de aprendizagem. Segundo Castro (2001), essa teoria é uma rica contribuição às pesquisas em Educação Matemática, que tratam de aspectos do funcionamento cognitivo relacionados à aquisição de conhecimento.

As Representações Semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (DUVAL, 1993, apud DAMM, 2012, p.176). Para o autor, um mesmo objeto matemático pode ser representado de várias formas, ou por meio de vários sistemas. Por exemplo, uma função linear pode ser representada por uma expressão algébrica, por um gráfico ou mesmo por uma tabela. A comunicação em Matemática ocorre por meio de representações semióticas. Desse modo, é imprescindível que, ao aprendê-la, os estudantes não confundam os objetos e suas respectivas representações semióticas, pois uma coisa é o objeto matemático, outra é a sua representação. Nessa área de conhecimento, elas são utilizadas como suporte tanto para fins de comunicação como também para o desenvolvimento da própria atividade matemática.

Desse modo, a partir dos RRS é possível que os sujeitos elaborem a construção do seu conhecimento, uma vez que eles possibilitam o desenvolvimento de funções cognitivas essenciais ao pensamento humano. A importância primordial dos RRS deve-se a duas razões fundamentais:

[...] Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as ope-

rações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. [...] A seguir, há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. (DUVAL, 2003, p.13-14)

A Teoria dos RRS considera a mobilização de uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Nesse sentido, Duval (2003, p.14) enfatiza que “[...] a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação”. Damm, (2012) complementa que a apreensão conceitual dos objetos matemáticos pelo indivíduo que aprende somente é possível a partir da coordenação de diferentes registros de representação.

A compreensão da variedade de registros de representação utilizados em Matemática determina o seu ensino e sua aprendizagem. De acordo com Duval (2009), a aprendizagem de conceitos matemáticos constitui um campo de estudo privilegiado para análise de atividades cognitivas fundamentais, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas, e mesmo a compreensão de textos. Essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação que vão além da linguagem natural ou das imagens, ou seja: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que adquirem o *status* de linguagem, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Para analisar a atividade Matemática numa perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval (2003) afirma ser necessária uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações, consideradas fundamentais para esta análise: os tratamentos e as conversões de registros de representações semióticas. Por meio deles, é possível analisar as atividades Matemáticas desenvolvidas pelos estudantes em uma situação de ensino. Duval (2003, p.16) define os tratamentos como sendo

⁵ A partir deste momento, passaremos a designar por RRS os Registros de Representação Semiótica.

[...] transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexão e de simetria. [...] As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados; por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação a sua representação gráfica.

Duval (2003, p.21) complementa esta discussão, apontando que

Numerosas observações nos permitem colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes.

Damm (2012, p.182) destaca que a conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre o significado e o significante.

No ensino de Matemática, o problema se estabelece, justamente, porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre esses vários registros de representação.

A compreensão em Matemática, portanto, implica a capacidade de os sujeitos mudarem de registro. A dificuldade deve-se ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado

com o conteúdo da representação que o torna acessível. Ou seja, “o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado” (DUVAL, 2003, p.22). Passar de um registro a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é preciso também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Como já marcamos anteriormente, um dos objetos a serem ensinados nos cursos de Engenharia é o conceito de vetor e suas operações. O conceito de vetor surgiu na Mecânica, em 1586, com o engenheiro Simon Stevin, mais conhecido como Arquimedes Holandês, que apresentou o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para encontrar a adição de duas forças aplicadas em um mesmo ponto (VENTURI, 1949). Essa regra é conhecida como a Regra do Paralelogramo, a qual continua sustentando o atual processo de ensino. O método do paralelogramo é utilizado para desenvolver a representação geométrica da soma ou subtração de vetores quando estes possuem a mesma origem. Ou seja, consiste em colocar as origens de dois vetores coincidentes e representar um paralelogramo. O vetor resultante será dado pela diagonal do paralelogramo, cuja origem coincide com a dos outros vetores. Castro (2001, p.12), apoiada em Duval (1995), destaca que, em Matemática,

[...] as representações semióticas não são indispensáveis apenas para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da própria atividade matemática. De fato, a possibilidade de realizar tratamentos nos objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema semiótico de representação. [...] A utilização de representações semióticas parece primordial para a atividade matemática e parece ser intrínseca a ela.

Damm (2012, p.175) reforça que “[...] o ensino/aprendizagem de qualquer conhecimento está estreitamente vinculado à compreensão de diferentes registros de representação”. E continua: “[...] sem as representações semióticas,

torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende” (p.177). Desse modo, dada a natureza não real dos objetos matemáticos, os registros de representação semiótica possibilitam o acesso a esses objetos. Duval (2003) aponta para três tipos de RRS: o registro figural, o simbólico e o da língua natural, cujas representações apresentam dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado). De acordo com Castro (2001, p.13),

Um vetor \vec{v} pode ser representado pelos três tipos de registros, indicados por Duval. No simbólico através de n-uplas, ou como combinações lineares de vetores em relação a uma base fixada. No figural, por uma flecha, registro de um representante da classe de equipolência de \vec{v} . E, na linguagem natural, “vetor”. (CASTRO, 2001, p.13)

Com base em Castro (2001) e Duval (2003), apresentam-se os RRS utilizados nesta pesquisa. A representação do vetor pode ser realizada a partir de diferentes registros, isto é, no plano e no espaço, mas sempre por meio dos RRS.

Gráfico 1 – Tipos de RRS do vetor.



Fonte: a pesquisa.

O RS Figural considera as representações gráficas cartesianas (ou no plano cartesiano) e a sua representação geométrica. O registro figural de um vetor é representado por uma flecha, desde que o vetor não seja nulo. O RS Simbólico possui

as seguintes representações: a Representação da n-uplas – expressa em forma de par ordenado e ternas; a Representação das Combinações Lineares – expressa a partir da adição entre os vetores unitários da base canônica; a Representação Algébrica – expressa em forma de expressão e/ou equação algébrica, ou, ainda, em forma de identificação de um vetor, como por exemplo \vec{AB} , \vec{x} , \vec{u} , \vec{v} ; e a Representação Numérica – expressa em forma de valores numéricos. A representação de um vetor no registro simbólico, considerando a representação da n-uplas, é dada a partir de combinações lineares, da seguinte forma: considerando os vetores da base canônica⁶ do \mathbb{R}^2 , $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação dos vetores \vec{i} e \vec{j} .

O RS da Língua Natural é utilizado para descrever situações matemáticas na forma de definição, argumentação, associações verbais ou enunciados. Esse tipo de registro é encontrado em livros, tanto nas definições, na descrição da resolução de questões, em teoremas, propriedades de conceitos, como nos enunciados de questões – situações problema e/ou exercícios.

Procedimentos metodológicos

Os procedimentos metodológicos utilizados são caracterizados como quantitativos e configuram-se como um estudo de caso, a partir da análise dos registros produzidos por um grupo de acadêmicos de cursos de Engenharia. O ambiente desta pesquisa são aulas da disciplina de GAV, ministradas por uma professora de Matemática, em uma turma envolvendo os cursos de Engenharia Elétrica, Civil e Mecânica. A produção dos dados ocorreu no primeiro semestre de 2014, no decorrer do desenvolvimento da disciplina de GAV. A aula não foi preparada para a pesquisa, ela foi pesquisada, considerando os registros produzidos pelos estudantes a partir do encaminhamento da professora responsável pela disciplina. O grupo era constituído por 34 estu-

⁶ Existem, naturalmente, infinitas bases ortonormais no plano xOy. Uma delas, porém, é particularmente importante. Trata-se da base formada pelos vetores representados por segmentos orientados com origem em O e extremidade nos pontos (1, 0) e (0, 1). Estes vetores são simbolizados com \vec{i} e \vec{j} e a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamada de canônica (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.18).

dantes. Esses estudantes, a partir da participação no pré-teste, foram nomeados de E1 até E34.

Os instrumentos analisados neste artigo são o pré-teste e o pós-teste, o qual foi baseado na pesquisa de Castro (2001). O pré-teste teve por objetivo analisar o conhecimento que os estudantes possuíam em relação ao conceito de vetor, ou seja, definir o nível de apreensão conceitual dos estudantes no início da disciplina. Este foi aplicado no primeiro dia de aula, ou seja, 18 de fevereiro de 2014, a partir da explicação da professora da disciplina GAV. O pós-teste, por sua vez, teve por objetivo analisar o que os estudantes compreenderam do conceito de vetor e suas operações após a intervenção da professora. Este foi aplicado na aula anterior à primeira avaliação, no dia 1º de abril de 2014.

O pré e o pós-teste foram organizados em dois blocos, sendo o primeiro, intitulado *Diferentes Representações*, foi organizado a partir

de sete exercícios. Devido, porém, a um erro na redação do enunciado três, este foi desconsiderado na análise, sendo analisados somente os seis exercícios. O objetivo desse primeiro bloco foi analisar a capacidade dos estudantes em realizar atividades de conversão entre os registros figural e da língua natural e/ou simbólica. O segundo bloco, intitulado *Ênfase na Representação Gráfica*, que envolveu cinco exercícios, teve por objetivo analisar a capacidade dos estudantes em relacionar coordenadas de um ponto e de um vetor no espaço, ou seja, realizar conversões entre os registros figural e simbólico na representação de n-uplas. Apresentamos abaixo a descrição de cada exercício e o que se espera alcançar em termos de procedimentos dos estudantes. O Quadro 1 apresenta os exercícios referentes ao primeiro item do pré-teste e do pós-teste.

O Quadro 2, a seguir, apresenta os exercícios referentes ao segundo bloco, do pré e do pós-teste.

Quadro 1 – Questões referentes ao primeiro item do pré e pós-teste.

<p>Exercício 1 O Exercício 1, letra A, do teste, é formado por três questões, a, b e c, as quais exigem a mobilização da soma, subtração e a multiplicação de um vetor por um escalar. Os vetores possuem coordenadas bidimensionais, x e y, no plano. Além disso, o resultado das operações é um vetor. Nesse exercício, os registros de partida e de chegada são registros simbólicos, não sendo necessária a atividade de conversão, apenas tratamento interno ao registro simbólico. São dados dois registros de partida, o registro simbólico, na representação das combinações lineares e das n-uplas e, de chegada, a representação das n-uplas. O Exercício 1, letra B, é formado por três questões, a, b e c, as quais envolvem a soma e a subtração de vetor e a multiplicação de um vetor por um escalar. Nessa questão, os vetores possuem coordenadas tridimensionais x, y e z, sendo o resultado um vetor.</p>
<p>Exercício 2 O Exercício 2, é formado por quatro questões, a, b, c e d, nas quais se exige a mobilização da soma e da subtração de vetor e a multiplicação de um vetor por um escalar, na representação geométrica. Para resolver essas questões, os estudantes precisam considerar, em especial, a regra do paralelogramo, pois a origem dos vetores é a mesma. É necessário realizar atividade de conversão entre os registros de partida, simbólico e figural, e o registro de chegada, o registro figural.</p>
<p>Exercício 4 O Exercício 4, letra A, é formado por duas questões, a e b, nas quais os estudantes devem apresentar o vetor \vec{u} como combinação linear da base canônica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sendo necessário expressá-lo através da soma de múltiplos de seus vetores. Nesse exercício, os registros simbólicos envolvidos são as representações das n-uplas e das combinações lineares, não sendo necessária atividade de conversão, apenas tratamentos internos. O registro de representação simbólico de partida é a representação das n-uplas e o de chegada o das combinações lineares. O Exercício 4, letra B, formado por duas questões, a e b, apresenta vetores como combinação linear da base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pedese que se apresentem os vetores como coordenadas em relação a essa base.</p>
<p>Exercício 5 O Exercício 5 apresenta duas questões, a e b, considerando como “referência” o vetor u de coordenadas, $\vec{u} = (2,4,8)$. Na primeira questão, pede-se para encontrar outro vetor que possua o dobro do comprimento e o mesmo sentido do vetor dado. Na segunda questão, pede-se para encontrar um vetor que tenha a metade do comprimento e o sentido contrário do vetor dado. Nesse exercício, são dados dois registros de partida, o registro da língua natural e o registro simbólico e de chegada, o registro simbólico (representação da n-uplas), exigindo atividade de conversão e tratamento.</p>
<p>Exercício 6 O Exercício 6 é apresentado por três questões, a, b e c, todas a partir do registro figural na representação geométrica. É solicitado que os estudantes desenvolvam as operações de adição e subtração de vetores por meio de sua representação geométrica. Para tanto, eles devem utilizar a regra do paralelogramo. Nesse exercício, são apresentados dois registros de partida, o registro da língua natural e o registro figural e, de chegada, o registro figural.</p>

Fonte: a pesquisa.

Quadro 2 – Questões referentes ao segundo item do pré e do pós-teste.

<p>Exercício 1 O Exercício 1 apresenta quatro questões, A, B, C e D. Na questão A, solicita-se que o estudante identifique as coordenadas de pontos considerando o sistema de coordenadas, x, y e z. Na questão B, são dadas as coordenadas e pede-se que o estudante as represente no sistema de coordenadas x, y e z. Na questão C, são representados os vetores, no sistema de coordenadas x, y e z, e pede-se que sejam encontradas as coordenadas desses vetores. Já na questão D, são dados os vetores no registro simbólico e solicita-se o registro figural na representação gráfica. Nesse exercício, o estudante precisa realizar a conversão entre os registros figural e simbólico, tendo como registro de partida o registro figural e o de chegada o simbólico (considerando a representação das n-uplas).</p>
<p>Exercício 2 O Exercício 2 é formado por quatro questões, A, B, C e D. Na questão A, solicita-se que o estudante identifique as coordenadas de pontos representados considerando o sistema de coordenadas, x, y e z. Na questão B, são dadas as coordenadas e solicita-se que sejam representadas no sistema de coordenadas x, y e z. Na questão C, são representados vetores, no sistema de coordenadas x, y e z, e solicita-se que se determinem as coordenadas desses vetores. Já na questão D, são fornecidos os vetores na representação das n-uplas e solicita-se sua representação gráfica. Nesse exercício, o estudante precisa realizar conversões entre os registros figural e simbólico (n-uplas).</p>
<p>Exercício 3 No Exercício 3, solicita-se que sejam representados os pontos no sistema de coordenadas x, y e z. Após a representação desses pontos, solicita-se a construção de um paralelepípedo, considerando esses pontos como vértices do polígono. Para finalizar, pede-se que represente um último ponto, o ponto T. Nesse exercício, os estudantes precisam realizar conversões entre os registros simbólico e figural, sendo o registro de partida o registro simbólico (n-uplas) e o de chegada o registro figural (gráfico).</p>
<p>Exercício 4 No Exercício 4, o estudante é orientado a marcar um ponto, o ponto Q, no sistema de coordenadas. Marcar um segundo ponto, a partir da construção de uma reta paralela ao eixo OZ. Após a marcação dos pontos, o estudante é questionado sobre eles, devendo responder considerando os passos utilizados para a marcação dos pontos no sistema de eixos apresentado. Nesse exercício, são apresentados dois registros de partida e dois registros de chegada. De partida, o registro de representação da língua natural e o registro simbólico (representação n-uplas) e, de chegada, o registro figural (representação gráfica) e o registro da língua natural, necessitando realizar atividade de conversão.</p>
<p>Exercício 5 O Exercício 5 é composto por duas questões, A e B, e consiste na localização e na representação de vetores no sistema de coordenadas x, y e z. Nesse exercício, os estudantes precisam realizar conversões entre os registros figural (gráfico) e simbólico (n-uplas).</p>

Fonte: a pesquisa.

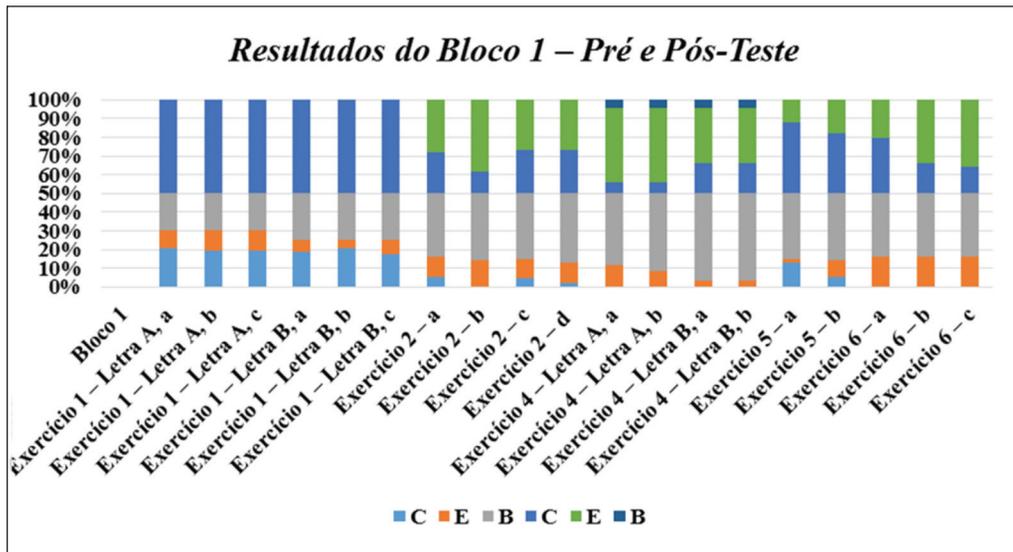
A forma de apresentar os dados foi a seguinte: explicitar o sentido da conversão e a atividade de tratamento realizada pelo grupo de estudantes. A análise considerou se os procedimentos realizados estavam: **C** – Correto; **E** – Errado; **B** – Branco (ou seja, não foram realizados). No item *sentido da conversão e atividade de tratamento*, utilizaram-se abreviações como:

- RLN – Registro de Representação da Língua Natural
- RRF – Registro de Representação Figural:
 - RG – Representação Gráfica;
 - RGe – Representação Geométrica.
- RRS – Registro de Representação Simbólica:
 - RNU – Representação da n -uplas;
 - RCL – Representação das Combinações Lineares;
 - RA – Representação Algébrica;
 - RN – Representação Numérica.

Discussão dos dados produzidos: busca de entendimentos

O Gráfico 2 e 3 apresentam a comparação dos resultados dos estudantes, considerando os procedimentos de tratamento ou conversão Corretos (C), Errados (E), Brancos (B) do pré e do pós-teste referentes aos exercícios do Bloco 1 e do Bloco 2, os quais estão organizados da seguinte maneira: de 0%-50% consideram os procedimentos realizados no pré-teste, e de 50%-100% são os dados referentes ao pós-teste. Na linha horizontal, é apresentado o exercício correspondente. Essa forma de apresentação facilita a comparação entre os dois instrumentos, considerando o mesmo exercício e parametrizando o número de estudantes que realizaram cada um dos testes.

Gráfico 2 – Dados referentes ao bloco 1 do pré e do pós-teste.



Fonte: a pesquisa.

Ao analisarmos o Gráfico 2, podemos compreender alguns movimentos realizados pelos estudantes em relação às atividades de conversão e tratamento antes e após a intervenção da professora. No pré-teste, chama a atenção a significativa porcentagem de exercícios em branco, em alguns exercícios chegando a até 94%. Ou seja, dos 34 estudantes que participaram do pré-teste, em alguns exercícios, como 2, 4 e 6, 32 estudantes ou deixaram em branco ou resolveram de forma incorreta. Esse dado se concentra em exercícios que envolviam atividade de conversão entre registros envolvendo o registro figural. O exercício que os estudantes mais conseguiram apresentar procedimentos corretos, no pré-teste, foi o Exercício 1, o qual exige basicamente a atividade de tratamento. Nas atividades de tratamento, os estudantes não precisavam mudar de RRS, só precisavam mudar de tratamento da representação das combinações lineares para a representação das n-uplas. Os dados indicam que entre 35% e 41% dos estudantes, sem contar com a intervenção da professora, conseguiram realizar os procedimentos para responder à questão. No pós-teste, após a intervenção da professora, apenas o Exercício 4 teve algumas questões em branco, num total de 9%. O restante dos exercícios todos os estudantes tentaram resolver de alguma maneira.

Considerando o Exercício 1 do pré e do pós-teste, pode-se destacar o significativo papel da intervenção do professor. A partir desta, todos os estudantes conseguiram realizar as atividades de tratamento corretamente, ou seja, trabalhar no registro de representação simbólico, considerando a representação das n-uplas e das combinações lineares. O movimento exigido do estudante era permanecer no mesmo registro de representação, porém estabelecer tratamentos diferentes. Esse dado reforça que os estudantes apresentam menor dificuldade na realização de procedimentos quando o exigido é a realização de tratamentos, porém não é qualquer tratamento, como podemos observar no Exercício 4, no qual os estudantes apresentaram dificuldades em realizar o tratamento entre as representações das n-uplas para o das combinações lineares e vice-versa.

No exercício 4 o estudante precisava realizar tratamentos internos ao registro simbólico. No pré-teste, nenhum estudante acertou, apesar de 24% tentarem fazer. Alguns estudantes representaram os pontos em um sistema de coordenadas cartesianas. De forma incorreta, alguns somaram as coordenadas do vetor e as igualaram a um número real, e outros com procedimentos equivocados nas representações

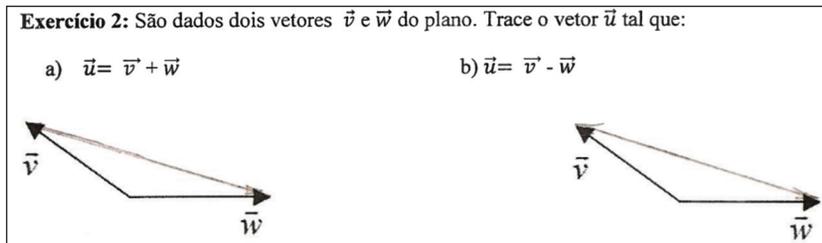
das n-uplas com os das combinações lineares. Nessa questão, o registro de partida é a representação das n-uplas, e o registro de chegada é o das representação das combinações lineares. Mesmo com a intervenção da professora, apenas 12% acertaram a atividade de tratamento quando esse era de representação das n-uplas para as combinações lineares e 34% quando o tratamento era das representações de combinações lineares para as n-uplas.

Pela análise dos dados, no exercício 2b e nos exercícios 4 e 6, sem a intervenção do professor, houve somente procedimentos errados ou em branco. Esse dado reforça o entendimento de que, para as atividades de conversão, é necessária a apreensão conceitual, pois, nesses exercícios, diferentemente do exercício 1, que envolve atividade de tratamento, é necessário que o estudante compreenda o conceito envolvido, o qual necessita da intervenção do professor, a partir de processos intencionais de ensino. Além disso, no exercício 2 b e no exercício 6, um dos registros envolvidos é o figural, no qual os apresentam maior dificuldade, confirmando o encontrado nas pesquisas de Castro (2001),

Karrer (2006), Karrer e Barreiro (2009) e Roncaglio e Nehring (2014).

O exercício 2 exigia mudança de registro, ou seja, atividade de conversão do registro de representação simbólica e figural para o registro de representação figural, movimento em que os estudantes apresentaram dificuldades, considerando o percentual de respostas erradas e em branco. Se compararmos os dados referentes a esse exercício no Gráfico 2, é possível perceber que, sem a intervenção da professora, a maioria dos estudantes não fez esse exercício, e, entre os que tentaram fazê-lo, poucos conseguiram respondê-lo corretamente. Já no pós-teste, após a intervenção da professora, houve uma significativa evolução, pois todos os estudantes desenvolveram o exercício, mesmo que nem todos o fizessem corretamente. Os 53% dos estudantes que o realizaram de forma incorreta denotam a dificuldade dos alunos em realizar conversões, principalmente quando os registros envolvidos são os registros figurais. A Figura 1, a seguir, apresenta os erros mais comuns realizados pelos estudantes de Engenharia na conversão entre os registros de representação simbólica e figural.

Figura 1 – Conversão realizada pelo E16 no pós-teste.



Fonte: a pesquisa.

Como podemos observar na Figura 1, o E16 não considerou a regra do paralelogramo utilizada para resolver a soma geométrica de vetores quando estes possuem as origens comuns; ele apenas traçou um segmento unindo as extremidades dos vetores, o que indica a falta de entendimento em relação à operação e, conseqüentemente, em relação à sua representação. Esse fato pode ser desencadeado quando, no processo de ensino, o registro figural não é considerado de forma efetiva, ou seja, quando

não há relação entre a álgebra e a geometria, o que é fundamental para que haja apropriação do significado do conceito de vetor e suas operações. Afinal, é através dessa relação entre a geometria ou a representação figural e a simbólica que outros conceitos importantes para a significação do conceito de vetor são abordados, tais como: a relação de equivalência, segmentos orientados e classe de equipolência.

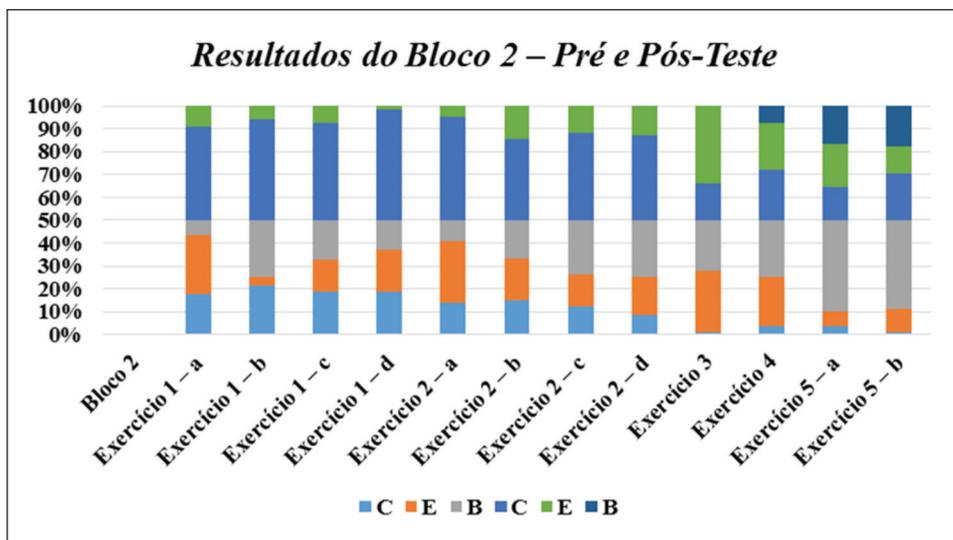
No Exercício 1, os estudantes conseguiram mobilizar a atividade de tratamento do registro

simbólico tanto no pré como no pós-teste, com a intervenção da professora, tendo 100% de acerto. Isto, porém, não significa que os estudantes compreenderam a adição de vetores, pois, no Exercício 2, que explora essa operação, exigindo a conversão entre os registros simbólico e figural, 76% dos estudantes realizaram os procedimentos de adição de forma incorreta, indicando uma não apreensão conceitual da operação com vetor, a partir da mobilização dos registros simbólico e figural. Os exercícios 2, 4 e

6 apresentaram um elevado percentual de erros, atingindo até 79%. As questões que apresentaram maior número de erros foram aquelas que exigiam do estudante a atividade de conversão e, na maioria das vezes, um dos registros envolvidos era o registro figural. Isso significa que os estudantes não conseguiram mobilizar efetivamente o conceito de vetor e suas operações.

O Gráfico 3 apresenta os dados referentes aos exercícios do Bloco 2.

Gráfico 3 – Dados referentes ao bloco 2 do pré e do pós-teste.



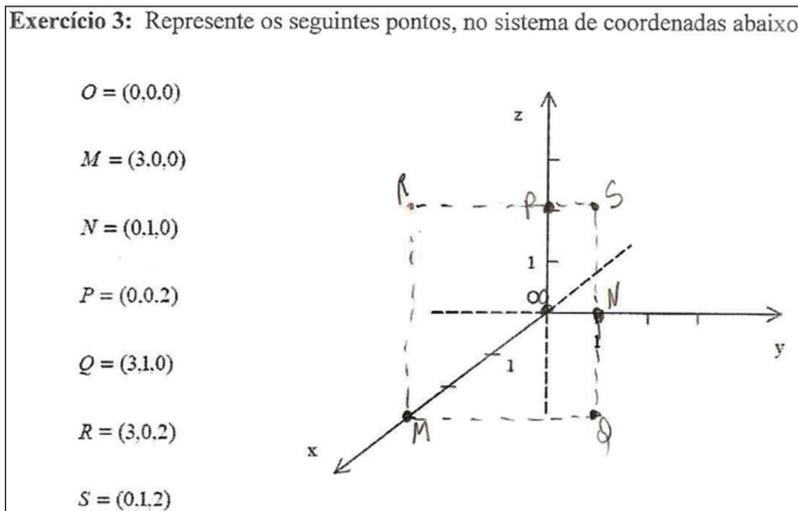
Fonte: a pesquisa.

Ao analisarmos o Gráfico 3, podemos identificar que houve uma significativa evolução por parte dos estudantes do pré para o pós-teste, em termos de acertos e de tentativa de resolver o exercício. Apenas três exercícios, no pós-teste, apresentaram questões em branco. Essa informação indica a fundamental importância da ação do professor quando os exercícios implicam

representação gráfica, questão apontada em outras pesquisas.

Nesse segundo bloco, os exercícios que mais chamam a atenção em relação aos erros são os exercícios 3, 4 e 5-a, nos quais os estudantes precisavam fazer conversão entre os registros figural e o simbólico. Os erros mais comuns encontrados no desenvolvimento do Exercício 3 no pós-teste está representado na Figura 2, a seguir.

Figura 2 – Conversão realizada pelo E17 no pós-teste.



Fonte: a pesquisa.

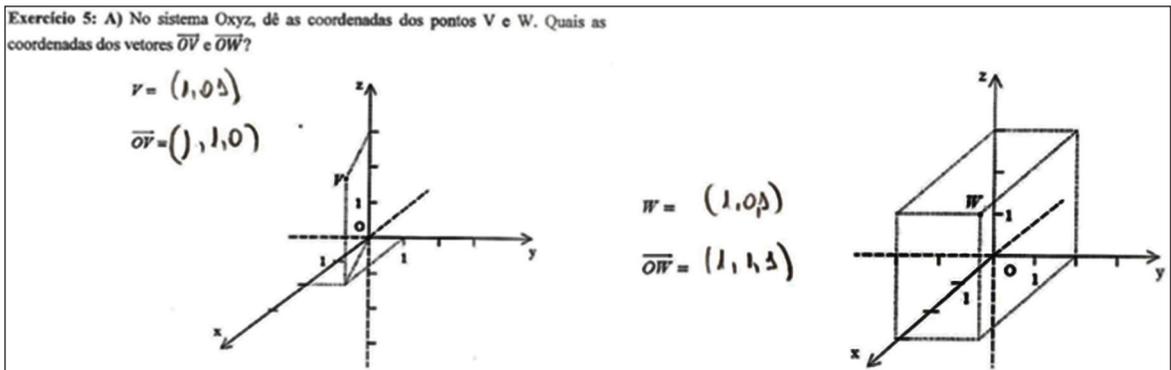
Nesse exercício, houve 68% de erro. A exigência era a atividade de conversão do registro simbólico para o figural, sendo solicitada aos estudantes a marcação de pontos no plano cartesiano tridimensional. Muitos estudantes representaram os pontos de forma incorreta, fazendo confusão com a representação de pontos no plano, ou seja, em duas dimensões. Alguns representaram o ponto e traçaram vetores, indicando a falta de compreensão da identificação entre grandezas – escalar e vetorial, questão fundamental de ser compreendida para significar o conceito de vetor. No exercício 3, os registros de partida eram – o registro da língua natural e simbólica, e o de chegada – o registro figural e da língua natural. Os estudantes precisavam marcar um ponto Q em um sistema de coordenadas em três dimensões (x, y, z) e, a partir deste, marcar um outro ponto – o ponto U . Nesse exercício, houve muitos erros relacionados à marcação do ponto Q no espaço e, conseqüentemente, à marcação do ponto U . Além disso, houve um número expressivo de estudantes que não resolveram esse exercício, tanto no pré quanto no pós-teste, o que marcou a falta de sentido e significado em relação à conversão do registro simbólico para o figural envolvendo atividades com coordenadas

em três dimensões. Aqui, o percentual de erros dos estudantes chegou a 41%.

No exercício 5-a, a conversão era do registro figural para o simbólico. Os estudantes precisavam determinar as coordenadas de um ponto que está sendo representado num sistema cartesiano e, na seqüência, determinar as coordenadas de um vetor com extremidade pertencente ao ponto representado. Nesse exercício, o número de erros foi significativo, atingindo um percentual de 38%. Além disso, muitos estudantes deixaram esse exercício em branco (33%). Houve confusão por parte dos estudantes em determinar a coordenada, sendo que alguns atribuíram como resposta apenas o vetor nulo, outros ainda atribuíram valor unitário para as coordenadas, sem considerar a representação gráfica, enquanto outros representaram o vetor.

Esses procedimentos indicam a falta de entendimento dos estudantes em relação à representação gráfica, considerando a dificuldade não apenas em representar graficamente, mas também de identificar a informação relevante, se esta estiver no registro figural. A Figura 3, a seguir, apresenta um procedimento incorreto realizado pelo estudante E21.

Figura 3 – Conversões realizadas pelo E21 no pós-teste.



Fonte: a pesquisa.

Considerações finais

A partir da análise dos dados produzidos, considerando o pré e o pós-teste, concluímos que os estudantes possuem dificuldades em realizar atividades de conversão, em especial quando um dos registros envolvidos é o registro figural, sendo esse registro de partida ou de chegada, o que reforça os dados já encontrados por Castro (2001). Um maior número de erros foi constatado nas questões 2, 4 e 6 do bloco 1, e 3, 4 e 5 do bloco 2, que envolviam atividades de conversão com o registro figural, em especial quando este era o registro de chegada. Castro (2001) apresenta os seguintes erros típicos dos estudantes, os quais foram encontrados no teste diagnóstico corroborado em nossa pesquisa: visualização espacial e dificuldade de representação no registro figural; dificuldade nas representações do registro simbólico; igualdade entre vetor e número real; erro de dimensão. Tais dificuldades deixam em evidência a falta de sentido e significado que os estudantes atribuem em relação ao conceito de vetor e de suas operações.

Erros como visualização espacial e dificuldade de representação no registro figural foram constatados nos exercícios 2 e 6, e dificuldade nas representações do registro simbólico foi encontrada no exercício 4. Houve erros como não identificação na representação de vetor no sistema cartesiano, com a representação de pontos e não vetores ou confusão em questões que solicitavam a marcação de pontos ou representaram o vetor. Os problemas de conversão e

tratamento encontrados em nossa pesquisa foram muito semelhantes aos encontrados por Castro (2001), sendo que no pós-teste houve uma incidência um pouco menor em relação ao pré-teste. Esse fato marca a dificuldade dos estudantes de Engenharia em relação ao aprendizado do conceito de vetor, e essa dificuldade se mantém, apesar de algumas pesquisas apontarem caminhos que poderiam enfrentar essa situação. Isso indica ser necessário enfrentarmos efetivamente como o estudante aprende o conceito de vetor, ou seja, somente identificarmos as dificuldades em relação ao RRS e suas atividades não é mais suficiente. É nesse sentido que estamos desenvolvendo nova pesquisa.

Referências

- BRASIL. Conselho Nacional de Educação (CNE). *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia*. 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES112002.pdf>>. Acesso em: 8 ago. 2013.
- CASTRO, Samira Choukri de. *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação*. 2001. 111f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.
- DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. 3.ed. São Paulo: EDUC, 2012.
- DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática:*

registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. *Semiosis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

KARRER, Monica. *Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

KARRER, Monica; BARREIRO, Simone Navas. Introdução ao estudo de vetores: análise de dois livros didáticos sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. *Anais... IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, Minas Gerais*, 2009.

MOTA, Cicero; MARROCOS, Marcus. *Introdução à álgebra geométrica*. Rio de Janeiro/RJ: SBM, 2014 (Mínicurso Colóquio Norte), 2014.

RONCAGLIO, Viviane. *Registros de representação semiótica: atividades de conversão e tratamento em vetores e suas operações a partir da argumentação de estudantes de engenharia*. 2015. 161f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2015.

RONCAGLIO, Viviane; NEHRING, Cátia M. Conceito de vetor: entendimento de acadêmicos de Engenharia. *Anais... Salão do Conhecimento da Unijuí, Ijuí*, 2014.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria analítica*. São Paulo: Person Makron Books, 1987.

Viviane Roncaglio é Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências – UNIJUÍ – GEEM.
E-mail: roncaglioviviane@gmail.com

Cátia Maria Nehring é Doutora em Educação. Docente da UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Orientadora do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências – UNIJUÍ/DCEEEng/GEEM.
E-mail: catia@unijui.edu.br