

CONCEITOS BÁSICOS EM GEOMETRIA E AS HABILIDADES DE VISUALIZAÇÃO: ANTES E DEPOIS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

**Geometry basic concepts and visualization skills: before and after the training course
for teachers of mathematics.**

Raquel Polizeli Corradi
Valdeni Soliani Franco

Resumo

Esse artigo tem por objetivo analisar o conhecimento sobre conceitos básicos de geometria e a mobilização de habilidades de visualização na resolução de três tarefas, por dois grupos observando a existência ou não de diferenças entre eles. Acredita-se que esse é um primeiro passo para pensar em novos caminhos para o desenvolvimento e aperfeiçoamento dessas habilidades nos futuros professores. Tal pesquisa foi motivada pelos estudos do Grupo de pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, no qual a visualização, vem sendo estudada atualmente. Esse tema é considerado de grande importância em pesquisas, no ensino e a aprendizagem, em particular da Geometria, proporcionando concretude na aquisição do conhecimento matemático. Esse trabalho é de cunho qualitativo, pautado no paradigma interpretativo, segue a modalidade estudo de casos múltiplos e terá como unidades de análise: um grupo formado por acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, e a outra formada por membros que já cursaram as disciplinas de geometria deste curso. Os dados foram analisados segundo a técnica Análise de Conteúdo. Como resultado notou-se algumas diferenças e igualdades entre os dois grupos estudados. Ambos os grupos mobilizam algumas habilidades de visualização e apresentaram falta de conhecimento teórico de Geometria, sendo essa maior na turma dos ingressantes. Observou-se, no caso pesquisado, que as disciplinas de Geometria cursadas não aparentaram contribuir para melhoria da visualização e a defasagem do conteúdo prejudicaram as resoluções e a mobilização das habilidades de visualização.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino de Geometria, Habilidades de Visualização.

Abstract:

This article aims to analyze knowledge about basic concepts of geometry and the mobilization of visualization skills in the resolution of three tasks, by two groups, noting the existence or not of differences between them. It is believed that this is a first step in thinking of new paths for the development and improvement of these skills in future teachers. This research was motivated by the studies of the Research Group in Teaching Geometry - GPEG, in which the visualization, has been studied currently. This subject is considered of great importance in research, teaching and learning, in particular Geometry, providing concreteness in the acquisition of mathematical knowledge. This work is qualitative, based on the interpretative paradigm, it follows the multiple case study modality and will have as units of analysis: a group formed by academics entering the Licenciatura degree in Mathematics, and the other formed by members who have already studied the disciplines geometry of this course. Data were analyzed using the Content Analysis technique. As a result, we noticed some differences and similarities between the two groups studied. Both groups mobilized some visualization skills and presented lack of theoretical knowledge of Geometry, being greater in the group of the freshmen. In the case studied, it was observed that the Geometry of college subjects did not appear to contribute to the improvement of the visualization and the not know of theory compromised the resolutions and the mobilization of the visualization abilities.

Keywords: Mathematics Education, Teaching Geometry, Visualization Skills.

Introdução

O presente artigo é parte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida em um doutorado em Educação Matemática. Tal pesquisa foi motivada pelos estudos realizados no grupo de pesquisa Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, em que um dos principais assuntos de interesse é a visualização em Geometria.

Com base nas leituras desenvolvidas no grupo, a curiosidade nos levou a busca de novos materiais sobre visualização em Geometria. Dentre os materiais encontrados durante o levantamento realizado estão as pesquisas de Presmeg (1986, 2006), Gutiérrez (1992, 1992 b, 1996), Fernández Blanco (2011, 2014), Godino; Gonzato; Fernández Blanco (2011), Kawamoto (2016) entre outros.

Na Matemática Gutiérrez (1996) redefine e amplia o conceito de visualização, definindo-a como um tipo de atividade do raciocínio, capaz de integrar quatro elementos principais que são as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização. Imagens visuais (físicas ou mentais) são os objetos que são criados, usados e transformados na atividade de visualização espacial. Essa manipulação de imagens mentais ocorre através de certos processos que, segundo Bishop (1983; 1989, apud Gutiérrez, 1992, p.45), são de dois tipos:

1. Processamento visual: é o processo de converter informações abstratas ou não figurativas em imagens visuais. Este é também o processo que permite a transformação de algumas imagens visuais, já formadas, em outras.
2. Interpretação da informação figurativa: Este é o processo de ler, compreender e interpretar as representações visuais usadas na Matemática (figuras geométricas, gráficos e diagramas de todos os tipos) para extrair as informações que elas contêm. Portanto, esse processo pode ser visto como o inverso do anterior.

Gutiérrez (1996) diz que dependendo das características do problema de matemática a ser resolvido e das imagens criadas, os alunos devem poder escolher entre várias habilidades visuais (HV). Essas habilidades podem ter funções diferentes, sendo as principais:

1. "Percepção figura-fundo" ou Percepção de figura e contexto (PFC): a capacidade de identificar uma figura específica isolando-o de um fundo complexo.

2. "Constância perceptiva" (CP): a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer inconfundível quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações.
3. "Rotação mental" (RM): capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.
4. "Percepção de posições espaciais" (PPE): A capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo.
5. "Percepção de relações espaciais" (PRE): a capacidade de relacionar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para o outro, ou simultaneamente para si mesmo.
6. "Discriminação visual" (DV): a capacidade de comparar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Esses conceitos são utilizados também por Fernández Blanco (2011, 2014) que em seus estudos centra-se na visualização e no raciocínio espacial de futuros professores, graduandos em licenciatura da Universidade de Santiago de Compostela (Espanha). Segundo a autora

“Observou-se que esses alunos têm ideias muito vagas e limitadas sobre conceitos básicos como simetria, rotação, cubo, octaedro, paralelepípedo, etc. e muitas vezes o significado que eles atribuem a eles é baseado em exemplos prototípicos. Não estão acostumados a fazer cortes de sólidos, desenvolver corpos truncados e gerar sólidos de revolução. Da mesma forma, a representação plana de objetos tridimensionais não é parte de sua formação e há numerosos conflitos quando se trata de executá-lo ou interpretá-lo.” (FERNÁNDEZ BLANCO, 2014, p.31, tradução nossa)

De modo geral, pautada nas categorias de habilidades visuais de Del Grande (1987, p. 127) e Gutiérrez (1992), a autora conclui que os dados revelam deficiências importantes dos futuros professores em termos de conhecimento comum do conteúdo da visualização e do raciocínio espacial.

Kawamoto (2016), em seu estudo, teve por objetivo verificar se alunos de 3ª série do Ensino Médio mostram ter desenvolvido habilidades de visualização em Geometria Espacial e se, quando questionados ou não, preocupam-se em justificar o

raciocínio feito. Pela análise dos dados obtidos, a autora, pautada também nas categorias de Gutiérrez (1996), aponta falta de conhecimento de alguns conceitos de Geometria, tais como nomenclatura adequada, altura de triângulos e altura de pirâmides. Aponta também, que os participantes

[...] não utilizam habilidades de visualização, não sabem decodificar uma representação plana de figuras tridimensionais, não sabem associar figuras tridimensionais com uma dada planificação e não dão justificativa para a resposta apresentada, mesmo quando solicitada e, quando o fazem, usam argumentos perceptivo-dedutivos, ou seja, baseados apenas na observação. (KAWAMOTO, p.11, 2016)

A visualização vem sendo considerada um fator de grande importância para o ensino e a aprendizagem da matemática, em particular da Geometria. Muitas pesquisas ligadas à educação matemática passaram a enfatizar a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem matemática, como é retratado pelos autores Flores et al (2012, p. 33). Para Santos (2014) a visualização pode dar concretude na aquisição do conhecimento matemático por meio da analogia, pois o pensamento é capaz de construir por meio dela diferentes interpretações de um conceito matemático.

É consenso entre as pesquisas encontradas a importância da visualização para a aprendizagem da Geometria. Porém, por meio do levantamento realizado observou-se uma carência de pesquisas que versassem sobre a visualização em Geometria nos níveis superiores de ensino. Sendo assim, a presente pesquisa contribuirá para identificar as habilidades de visualização dos participantes dessa pesquisa, que é um primeiro passo para se pensar em novos caminhos para o desenvolvimento e aperfeiçoamento dessas habilidades nos futuros professores.

Essas pesquisas nos despertaram a curiosidade em saber como estão os alunos, ingressantes e egressos do curso de Matemática, em relação as habilidades de visualização em Geometria e se há indícios de mudança, com respeito a esse aspecto, após a conclusão do curso. Essas leituras nos levam as seguintes questões:

Como está o conhecimento em geometria e quais habilidades de visualização mobilizadas por acadêmicos ingressantes no curso de Matemática,

por alunos que estão terminando o curso e recente egressos?

A graduação em matemática altera a maneira de visualizar em Matemática, em específico na geometria?

Há indícios de diferenças na mobilização de habilidades de visualização na resolução de tarefas de geometria, entre os ingressantes em um curso de formação inicial em Matemática e aqueles que já fizeram as disciplinas de geometria desse curso?

Esse artigo tem por objetivo analisar, por meio da resolução de tarefas, o conhecimento sobre conceitos de geometria e a mobilização de habilidades de visualização na resolução destes, observando a existência ou não de diferenças entre os dois casos que serão aqui estudados, em uma universidade ao norte do estado do Paraná.

Materiais e métodos

Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo, no paradigma interpretativo e a modalidade escolhida foi um estudo de caso. Serão apresentadas e analisadas aqui três tarefas, como procedimento de coleta de informações. As tarefas foram obtidas ou baseadas em questões presentes nos trabalhos de Kawamoto (2016) e Fernández Blanco (2011).

Segundo Yin (2005, p. 32), “o estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real”. O propósito de um estudo de caso é reunir informações detalhadas e sistemáticas sobre um fenômeno (PATTON, 2002). Seguindo as especificações dadas por Yin (2005) essa pesquisa se encaixa nos preceitos do estudo de casos múltiplos, visto que nossa motivação é saber quais são as habilidades visuais dos acadêmicos ingressantes e daqueles que já cursaram as disciplinas de geometria da grade de Matemática, e como eles as utilizam nas justificativas das resoluções de problemas. Sendo assim, uma das unidades de análise é o grupo de ingressantes e a outra unidade o grupo formado pelos participantes que já cursaram as disciplinas de geometria.

Um dos casos estudado foi constituído por uma das três turmas do curso de Matemática de uma Universidade ao norte do Paraná, cujos alunos ingressaram no ano de 2018, e o outro caso foi constituído por alguns acadêmicos que estão nos anos finais do curso e que já terminaram as disciplinas de Geometrias, bem como egressos que terminaram o curso de Matemática, referido acima, no ano de 2017. O total de participantes foram 27

ingressantes e 15 que terminaram as disciplinas de Geometria ou são recém-formados.

Para a análise de dados obtidos foi escolhida a técnica Análise de Conteúdo de acordo com os pressupostos de Bardin. Para a autora análise de conteúdo é definida como:

um conjunto de técnicas de análise as comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (Bardin, 2011, p. 47).

Utilizamos nessa pesquisa a análise de conteúdo, por entender do mesmo modo como Câmara (2013), que segundo a perspectiva de Bardin, é uma técnica metodológica aplicável em discursos diversos e a todas as formas de comunicação, seja qual for à natureza do seu suporte. Deve-se buscar compreender as características, estruturas ou modelos que estão por trás dos fragmentos de mensagens. O analista precisa entender o sentido da comunicação, como se fosse o receptor normal, porém, e principalmente, precisa

desviar o olhar, buscando outra significação, outra mensagem, passível de se enxergar por meio ou ao lado da primeira. O processo de Análise de Conteúdo é composto por essas três fases, porém Câmara (2013) lembra que há muitas variações na maneira de conduzi-las. A autora rememora que as comunicações, objeto de análise, podem ser abordadas de diferentes formas, as unidades de análise podem variar. Ela diz que a forma de tratar as unidades também se diferencia, alguns procuram desenvolver a análise da estrutura lógica do texto ou de suas partes, e outros, ainda, centram sua atenção em temáticas determinadas. A seguir apresentaremos cada uma das três questões consideradas para esse artigo seguidas do resultado obtido por meio de uma categorização realizada em cada uma delas.

Resultados e Análise

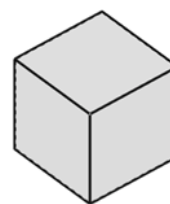
Para cada questão foram estabelecidos objetivos que nos nortearam na categorização para análise da Tarefa.

A seguir, apresentamos a primeira Tarefa aplicada, baseada em KAWAMOTO (2016):

Quadro 1 - Tarefa 1

O desenho da figura ao lado representa um cubo. Com esta informação, responda:

- Quantos vértices do cubo, não estão visíveis? Dê nome a todos os vértices desse cubo, utilizando letras maiúsculas (exemplo: A, B, C etc.).
- Quantas arestas do cubo não estão visíveis? Desenhe estas arestas na figura.
- Utilize os nomes dados aos vértices e escreva que vértice(s) está(ão) mais próximo a você? E o(s) mais distantes? Explique.
- Você tem arestas que pertencem a retas reversas? Se sim, indique essas arestas utilizando os nomes dos vértices dados em a.
- Existem faces opostas? Se sim, utilize os nomes dos vértices para representá-las.



Fonte: Os autores

Os objetivos desta tarefa foi verificar se o participante:

- Possui conhecimentos básicos de geometria e utiliza os termos corretamente. Por exemplo, se compreende os conceitos de cubo, face, aresta, vértice, lado oposto, retas reversas, entre outros;
- Interpreta e tem conhecimento das regras da representação plana dada. Por exemplo, se sabem que os segmentos ocultos são tracejados;

- Mobiliza a habilidade visual de percepção de posições espaciais (PPE). Por exemplo, se reconhece os segmentos “próximos” e “distantes”, face oposta.
- Mobiliza a habilidade visual de constância perceptiva (CP), por exemplo se consegue criar a imagem, mental ou física, das arestas ocultas, ou se reconhece que as faces do cubo são quadrados.

Nas tabelas 1 e 2 a seguir, estão sinalizados com X os objetivos, que concluímos terem sido

alcançados pelos participantes. Essas tabelas mostram o desempenho de cada participante ao realizar a tarefa. Sendo a Turma J, o grupo composto pelos participantes que já cursaram as disciplinas de geometria e a Turma I os alunos ingressantes.

No caso do objetivo 1 (O1), foi assinalado se o participante demonstrou utilizar os termos básicos de geometria referentes aos itens a e b, com uma ressalva referente ao conceito de retas reversas. Optamos em analisar separadamente o item d, que se refere ao as retas reversas, devido a grande dificuldade que a maior parte dos participantes

apresentaram em relação ao conceito. O objetivo 2 (O2) foi marcado nos casos em que foi visto que o participante fez na figura segmentos tracejados ao representar as arestas ocultas. Aqueles em que a resposta dos itens c e e mostravam haver o reconhecimento de segmentos “próximos”, “distantes” e de face oposta, tiveram o objetivo 3 (O3) assinalado. O objetivo 4 (O4) foi marcado, se a resolução permite inferir que o participante consegue criar a imagem, mental ou física, das arestas ocultas ou se reconhece que as faces do cubo são quadradas.

Tabela 1 - Dados da Tarefa 1 – Turma J

Participante	O1	O2	O3	O4	OBSERVAÇÕES	Categoria item d
J1	X	X	X	X	Não respondeu o item d.	1
J2	X	X	X	X	Respondeu correto o item d.	2
J3	X		X		Disse não se lembra o que são retas reversas, mas supõe se tratar de retas paralelas.	3
J4	X	X	X	X	Respondeu correto o item d.	2
J5	X	X	X	X	Disse não se lembra o que são retas reversas, mas supõe serem retas paralelas.	3
J6	X		X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
J7	X	X	X	X	Não respondeu o item d.	1
J8	X	X	X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
J9	X	X	X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
J10	X		X	X	Respondeu correto o item d.	2
J11	X	X	X	X	Diz não lembrar, e não respondeu o item d.	1
J12	X			X	Não respondeu o item d.	1
J13	X	X	X	X	Respondeu correto o item d.	2
J14	X		X	X	Diz não lembrar, e não respondeu o item d.	1
J15	X		X		Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a

Fonte: Os autores

Tabela 2 - Dados da Tarefa 1 – Turma I

Participante	O1	O2	O3	O4	OBSERVAÇÃO	Categoria item d
I1	X	X	X	X	Respondeu correto o item d.	2
I2	X	X		X	Respondeu correto o item d.	2
I3	X	X	X	X	Não respondeu o item d.	1
I4	X	X	X	X	Não respondeu o item d, diz não saber.	1
I5	X	X	X	X	Não respondeu o item d, diz não saber.	1
I6	X	X	X	X	Não respondeu o item d.	1
I7	X	X	X	X	Não respondeu o item d.	1
I8	X		X	X	Não respondeu o item d.	1
I9	X		X	X	Diz que não há arestas pertencentes a retas reversas	4

I10	X		X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
I11			X	X	Troca vértice por aresta. Aparenta desconhecer o que é face oposta. Não respondeu o item d.	1
I12			X	X	Confunde vértice/aresta. Diz que não há arestas pertencentes a retas reversas.	4
I13			X	X	Confunde vértice/aresta. Desconhece o que é face oposta. Não respondeu o item d, diz não saber.	1
I14	X	X	X	X	Não respondeu o item d, diz não saber.	1
I15	X	X	X	X	Não respondeu o item d.	1
I16	X		X	X	Não respondeu o item d.	1
I17	X	X	X	X	Escreve o que são retas reversas, porém diz que não há na figura.	4a
I18	X		X	X	Não respondeu o item d.	1
I19	X		X	X	Não respondeu o item d.	1
I20	X		X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
I21	X	X	X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
I22			X	X	Aparenta desconhecer o que é face oposta. Não respondeu o item d.	1
I23	X	X	X	X	Não respondeu o item d, diz não saber.	1
I24	X	X	X	X	Responde como se retas reversas fossem paralelas.	3a
I25				X	Confunde vértice/aresta. Só respondeu a), b)	1
I26				X	Nomeia os vértices corretamente. Troca vértice por face. Compreende o que é face oposta. Não respondeu o item d.	1
I27			X		Aparenta diferenciar corretamente vértice, aresta e face. Não respondeu o item d.	1

Fonte: Os autores

Pode se observar na tabela 1 que 100% dos participantes da Turma J atingiram o objetivo 1 proposto. Cerca de 73% apresentaram dificuldade em saber o que são retas reversas e apenas 22% responderam corretamente. No caso do objetivo 2, 60% o atingiram, aproximadamente 93,3 % atingiram o objetivo 3, em relação ao objetivo 4, aproximadamente 87% dos participantes cumpriram o que se esperava.

Em relação à Turma I, aproximadamente 74,1% dos participantes atingiram o objetivo 1. Cerca de 7% dos participantes somente mostraram compreender o que são retas reversas. Aproximadamente 48,1% atingiram o objetivo 2, 88,9 % atingiram o 3º objetivo da Tarefa e aproximadamente 96% atingiram o O4.

De acordo com as análises, apresentadas nas tabelas 1 e 2, elencamos seis categorias de respostas em relação ao item d, são elas: 1- Não respondeu; 2 - Respondeu corretamente; 3 - Disse não se lembrar o que são retas reversas, mas supõe

se tratar de retas paralelas; 3a - Responde como se retas reversas fossem paralelas; 4 - Diz que não há arestas pertencentes a retas reversas; 4a - Escreve o que são retas reversas, porém diz que não há arestas na figura que pertencem a retas reversas. Pode-se considerar que as categorias 3 e 3a, formam uma única, bem como 4 e 4a, pois o cerne da resposta é o mesmo. Tivemos que criar essa última categoria apenas devido as respostas dos participantes da turma I, ou seja, os participantes da turma J, não cogitaram a possibilidade de não haver arestas sob retas reversas. Dos 15 participantes da turma J, cinco tiveram respostas dentro da categoria 1, quatro responderam corretamente e estão na categoria 2, dois na categoria 3 e quatro na categoria 3a. Enquanto 18 dos 27 participantes da turma I tiveram respostas compatíveis à categoria 1, dois na categoria 2, ou seja que acertaram o item, quatro na categoria 3a, dois na categoria 4 e um na categoria 4a.

Tabela 3 - Comparação das categorias de respostas do item d da tarefa 1 (em %):

Turma	1	2	3	3a	4	4a
J	33	27	13	27	0	0
I	67	7	0	15	7	4

Fonte: Os autores

Como pode-se observar a porcentagem em relação à falha na resposta na turma J é de 40% e na turma I de 33%, já a falta de resposta é grande nas duas turmas, porém significativamente maior na turma I. Ou seja, há uma lacuna em relação ao conhecimento do conceito de retas reversas em ambas as turmas, mesmo a turma J apresentando sensivelmente um melhor desempenho referente a resposta esperada.

Pela análise dos dados, em relação a O1 observa-se uma diferença entre os participantes das turmas I e J. Os participantes da turma J não apresentaram dificuldade em relação a compreensão dos conceitos e regras básicos envolvidos na tarefa. Já aproximadamente 26% dos ingressantes apresentaram dificuldades como: confundem aresta e vértice, não sabem o que são retas reversas ou confundem com retas paralelas e alguns desconhecem o que é face oposta. O objetivo 2,

assim como O1 está relacionado à teoria, na verdade uma regra de representação, e com respeito aos dados foi notado também uma sensível diferença entre o desempenho das duas turmas, no caso os alunos da turma J tiveram um melhor desempenho nesse quesito, aproximadamente 40% dos participantes tiveram dificuldade com a representação dos segmentos ocultos, enquanto na turma I cerca de 52% deles apresentaram a mesma dificuldade.

Os objetivos 3 e 4 são relacionados as habilidades visuais, no caso do objetivo 3 ambas as turmas tiveram um desempenho muito próximo, na turma J, 7% apresentaram dificuldade no que foi avaliado e na turma I essa porcentagem foi de 11%. Com respeito ao O4, a turma I teve um melhor rendimento, apenas 4% dos pesquisados não atenderam ao esperado, enquanto na turma J, 13% não representaram mobilizar a CP.

Tabela 4 - Comparação de rendimento das turmas na tarefa 1, (em %):

Turma	O1	O2	O3	O4
J	100	60	93,3	87
I	74	48	89	96

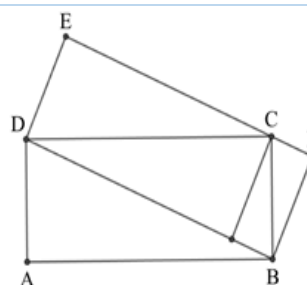
Fonte: Os autores

A segunda tarefa proposta, baseada em Duval (2015), foi a seguinte:

Quadro 2 - Tarefa 2

Observe a figura ao lado, e responda:

- Quais figuras geométricas você consegue visualizar?
- Quantas figuras geométricas de cada tipo você identifica no desenho?
- Compare a área da figura geométrica ABCD, com a área da figura geométrica BDEF. Como você pensou para dar esta resposta.



Fonte: Os autores

Objetivos: Verificar se os participantes:

1. Têm conhecimento de alguns conceitos de Geometria com retângulo, triângulo, triângulo retângulo, diagonal, se conhecem e utilizam os termos corretamente.
2. Resolve de modo algébrico (A), geométrico (G), ou com cálculo de medidas (C).
3. Mobiliza as habilidades de visualização (HV):
 - a. Percepção de figura e contexto (PFC) (ou figura-fundo). Por exemplo: reconhecer e identificar as várias figuras geométricas planas formadas.
 - b. Discriminação visual (DV). Por exemplo: reconhece os triângulos formados pelas diagonais, forma uma figura com várias peças dadas, sob a condição de que essas peças só possam ser movidas e giradas no plano, portanto, também é combinada com a ação de identificar uma figura em diferentes posições.
4. Responde a questão das áreas a contento.

As Tabelas 3 e 4 sinalizam o desenvolvimento dos participantes, quanto aos objetivos propostos na questão.

No caso do Objetivo 1, foi assinalado com um X, quando o participante demonstra visualizar e

utilizar, segundo suas propriedades, as figuras e subfiguras geométricas que compõe ilustração dada.

No Objetivo 2 foram marcadas as letras A, G ou C, dependendo do modo de resolução a que o participante optou por utilizar. Identificamos como algébrico (A), as resoluções em que os participantes procuraram justificar de modo textual, sem levar em consideração as relações geométricas que podem ser observadas através da figura, utilizando letras e/ou fórmulas (por exemplo da área), para a resolução. Foi marcada a letra G (geométrico), quando a resolução apresenta componentes que demonstram uso de relações geométricas obtidas a partir da figura dada e do enunciado. Nas resoluções em que se percebe a busca pelas medidas na ilustração e a tentativa de usar cálculos com essas medidas para responder à questão, foi marcada a letra C (cálculo).

O objetivo 3 está dividido em dois itens, o primeiro refere – se a percepção de figura e contexto (PFC) (ou figura-fundo), esse item foi marcado nos casos em que o participante reconhece e identifica várias figuras geométricas planas formadas pela justaposição ou superposição, na ilustração dada. O segundo corresponde a DV, foi marcado nos casos em que foram reconhecidos os triângulos formados pelas diagonais, identificando semelhanças, diferenças e feita a relação entre eles, e em relação aos retângulos da ilustração dada.

Por fim, no 4º objetivo, foram marcados com um X as resoluções que apresentaram a resposta esperada na tarefa.

Tabela 5 - Dados da Tarefa 2 – Turma J

Participante	O1	O2			O3		O4	OBS
		A	G	C	PF C	DV		
J1	X		X		X	X		Visualizou 1 trapézio, 4 retângulos, 6 triângulos. Áreas BDEF e ABCD são diferentes. Justifica que as alturas são diferentes.
J2	X	X			X	X		Visualizou 2 trapézios, 4 retângulos, 6 triângulos, 2 pentágonos, 2 hexágonos. Não concluiu nada sobre as áreas BDEF e ABCD.
J3	X	X			X	X		Visualizou 2 trapézios, 4 retângulos, 6 triângulos ret., 1 triângulo isósceles, 2 pentágonos. Área: BDEF < ABCD
J4	X		X		X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos, 1 pentágono. Fala que a diagonal divide o ângulo de 90° em 45°. Que a diagonal divide o retângulo em 2 triângulos congruentes. Áreas BDEF e ABCD são diferentes.
J5	X		X		X	X		Visualizou retângulos, e triângulos. Área: BDEF > ABCD
J6	X		X		X	X		Visualizou 4 retângulos, 4 triângulos ret., 1 polígono de cinco lados. Área: BDEF > ABCD
J7	X				X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Não respondeu o item sobre as áreas BDEF e ABCD.
J8	X	X			X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Não concluiu nada sobre as áreas BDEF e ABCD.

J9	X		X		X	X	X	Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos. Identificou triângulos semelhantes e concluiu que as áreas são iguais, pelas áreas dos triângulos que subfiguras de cada retângulo.
J10	X		X		X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos, 1 polígono de quatro lados, 2 de seis e 3 de cinco. Área: BDEF > ABCD
J11	X	X			X	X		Visualizou 4 retângulos, 5 triângulos, 1 trapézio. Área: BDEF > ABCD
J12	X				X	X		Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos. Em relação as áreas, fala que a para calcular a área de quadrilátero basta multiplicar a base pela altura.
J13	X		X		X	X	X	Visualizou 1 trapézio, 4 retângulos, 6 triângulos. Usando translação dos triângulos que são subfiguras de cada retângulo, concluiu que as áreas são iguais.
J14	X		X		X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Fala em rotacionar ABCD, mas conclui que Área: BDEF > ABCD
J15	X				X	X		Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos. Conclui que as áreas são iguais, porém argumenta de forma errônea dizendo que HB e CF tem mesma medida.

Fonte: Os autores

Tabela 6 - Dados da Tarefa 2 - Turma I

Participante	O1	O2			O3		O4	OBS
		A	G	C	PFC	DV		
I1	X		X		X	X		Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos e 2 pentágonos. Diz que BDEF > ABCD, justifica: a base de BDEF ser uma diagonal de ABCD.
I2	X	X			X	X		Visualizou 6 triângulos, 4 quadriláteros, 1 pentágono e 1 hexágono. Não conclui nada sobre as áreas.
I3	X		X		X	X		Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos retângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: BDEF está inclinado.
I4	X		X		X	X	X	Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: áreas das 5 subfiguras.
I5	X		X		X	X	X	Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Conclui que as áreas são iguais, justifica transladando BFC sobre DE.
I6	X		X		X	X		Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos retângulo e 1 pentaedro. Diz parecer que BDEF > ABCD. Justificativa: a base de BDEF ser uma diagonal de ABCD.
I7	X		X		X	X		Visualizou 4 retângulos, 5 triângulos e 1 pentágonos. Diz que BDEF > ABCD Justificativa: a base de BDEF ser uma diagonal de ABCD.
I8	X		X		X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: ao rotacionar BDEF teremos ABCD.
I9	X	X			X	X		Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos retângulo e 1 triângulo escaleno. Não conclui nada sobre as áreas.
I10	X				X	X		Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos retângulos. Conclui que as áreas são semelhantes. Justificativa: as duas são regiões retangulares.
I11	X		X		X	X		Visualizou 3 quadriláteros, 6 triângulos retângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: que BD é a diagonal de ABCD.

I12	X				X	X	Visualizou 4 retângulos, 5 triângulos e 1 pentágonos. Diz que $BDEF > ABCD$. Justificativa: a área de BDEF é maior.
I13	X	X			X	X	Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos retângulos. Conclui que as áreas são diferentes, justifica através da hipotenusa.
I14	X		X		X	X	Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos retângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: as áreas dos triângulos que compõe os retângulos.
I15	X				X	X	Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos. Não responde o item sobre as áreas.
I16	X		X		X	X	Visualizou 4 retângulos, 5 triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: as áreas dos triângulos que compõe os retângulos.
I17	X		X		X	X	Visualizou 3 losangos, 5 triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: sobreposição dos retângulos.
I18	X			X	X	X	Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos. Não conclui nada sobre as áreas por não haver a medida das arestas.
I19	X				X	X	Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos. Não responde o item sobre as áreas.
I20	X				X	X	Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Diz que as áreas aparentam ser iguais, não justifica.
I21	X				X	X	Visualizou 4 retângulos, 5 triângulos. Não responde o item sobre as áreas.
I22	X		X		X	X	Visualizou 2 retângulos, 5 triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: sobreposição dos retângulos.
I23	X	X			X	X	Visualizou 4 retângulos, 6 triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: usa a fórmula da área e pelo fato de as figuras terem um triângulo e dois vértices em comum.
I24	X		X		X	X	Visualizou 3 retângulos, 5 triângulos. Conclui que as áreas são diferentes. Justificativa: sobreposição das figuras BDEF tem um lado maior que ABCD.
I25	X				X	X	Visualizou 3 retângulos, 6 triângulos. Não responde o item sobre as áreas.
I26	X		X		X	X	Visualizou 4 retângulos, 5 triângulos. Faz uma exploração geométrica na figura, porém escreve que as áreas são iguais, mas na verdade não são.
I27	X		X		X	X	Visualizou retângulos e triângulos. Conclui que as áreas são iguais. Justificativa: sobreposição das figuras.

Fonte: Os autores

Com respeito as figuras geométricas que conseguem visualizar, a maioria da Turma J, aproximadamente 53%, só conseguiu identificar como subfiguras triângulos e retângulos, apenas 2, ou cerca de 13%, identificaram cinco subfiguras: triângulos, retângulos, trapézios, pentágonos e hexágonos. Os 15 participantes da Turma J atenderam o objetivo 1. Em relação ao segundo objetivo, 4 (ou aproximadamente 26%) apresentaram uma resolução algébrica, 8 (aproximadamente 53%) optaram por uma resolução geométrica e nenhum tentou utilizar medições e cálculo para responder a tarefa. Segundo nossa

interpretação dos dados, com respeito ao O3, todos os 15 mobilizaram as habilidades visuais de PFC (percepção de figura e contexto) e DV (discriminação visual), apenas duas resoluções contemplaram o item referente a constância perceptiva (CP), ou aproximadamente 13% da Turma J, sendo que foi marcado naqueles casos em que foi reconhecido propriedades dos triângulos que compões as subfiguras, como semelhança e a área.

O objetivo 4, a comparação das áreas, foi contemplado em apenas duas resoluções da Turma J, (aproximadamente 13%), uma delas usou semelhança de triângulos para estabelecer a

igualdade das áreas e a outra aplica a translação das subfiguras (triângulos), para responder. Os erros mais comuns foram afirmar que a área de ABCD é menor que a de BDEF, com 5 respostas (33% aproximadamente), 2 respostas (cerca de 13%) afirmam apenas que as áreas são diferentes e uma das respostas, ou aproximadamente 6%, afirma que a área de BDEF ABCD é menor que a de ABCD. De modo geral, a partir de nossa análise, inferimos que na maior parte das justificativas os participantes tendem a apresentar argumentos perceptivos, não relacionados à conhecimentos teóricos.

Em relação a Turma I, as figuras geométricas visualizadas pela maioria, aproximadamente 81%, foram as subfiguras triângulos e retângulos, apenas 4, ou cerca de 15%, identificaram também pentágonos, e apenas 1 viu como subfiguras: triângulos, retângulos, pentágonos e hexágonos. Todos apresentaram resoluções a contento em relação ao objetivo 1, assim como os da Turma J. Dentre os 27, aproximadamente 15%, optaram por uma resolução algébrica, aproximadamente 55% optaram pela geométrica e aproximadamente 4% (apenas 1 participante) fez através de medidas e cálculo. Segundo nossa interpretação dos dados, todos os participantes mobilizaram as habilidades visuais de Percepção de figura e contexto e Discriminação visual, cerca de 11% mobilizaram a CP, ao verificar que haviam subfiguras (triângulos) de áreas iguais, em posições diferentes.

Com respeito ao O4, comparação das áreas, apenas 4 resoluções (15% aproximadamente) se apresentaram completamente corretas, dessas uma apresenta como argumento a translação de subfiguras, as outras 3 são justificadas através da comparação das áreas dos triângulos que compõe os dois retângulos. Cerca de 29% das respostas dizem que as áreas são iguais, porém, a maior parte justifica pela sobreposição dos dois retângulos. Quatro respostas, ou cerca de 15 %, afirmam que a área de ABCD é menor que a de BDEF, duas ou aproximadamente 7% afirmam apenas que as áreas são diferentes.

Pela análise realizada nota-se, nessa segunda tarefa, que os participantes de ambas as turmas tem conhecimento de conceitos básicos de Geometria como retângulo, triângulo, triângulo retângulo, diagonal, os conhecem e utilizam. Porém pelas resoluções nota-se que há uma dificuldade em trabalhar os conceitos, conectá-los as relações tratadas na Geometria. Pôde-se notar também que mais de 50% deles tendem a recorrer a recursos geométricos ao resolver a tarefa e que aproximadamente 26% dos participantes que já fizeram as disciplinas de geometria no curso de matemática acabam tentando uma resolução algébrica, enquanto esse número nos iniciantes é menor, cerca de 15%. É possível notar nas resoluções, que esse recurso à uma resolução geométrica está permeada, não pela segurança na aplicação dessa teoria, mas sim, muito mais como uma forma intuitiva de resolver, feita com base em comparações visuais (muitas vezes sem validade real) ou por sobreposições. Distante das validações por meio de resultados teóricos, garantida por axiomas, definições e propriedades da Geometria Euclidiana; ou da abstração baseada em seu sistema axiomático.

É possível observar ainda que as duas turmas aparentam mobilizar satisfatoriamente as habilidades de visualização de Percepção de figura e contexto e Discriminação visual. Já a Constância Perceptiva não aparenta grande mobilização pelas duas turmas, pode ser observada em cerca de 13% das respostas da turma J e 11% da turma I. Ambas as turmas tem um desempenho muito próximo com respeito à solução esperada na tarefa, apenas, aproximadamente, 13% da turma J e 15% da turma I chegam à solução esperada.

Essa análise nos leva a pensar que, embora os participantes cheguem a mobilizar algumas habilidades de visualização, mas de modo geral, a falta de conhecimento teórico prejudica as resoluções, e até mesmo a mobilização e o desenvolvimento das habilidades de visualização.

Tabela 7 - Comparação de rendimento das turmas na tarefa 2, (em %):

Turma	O1	A	G	C	PFC	DV	CP	O4
J	100	26	53	0	100	100	13	13
I	100	15	55	4	100	100	11	15

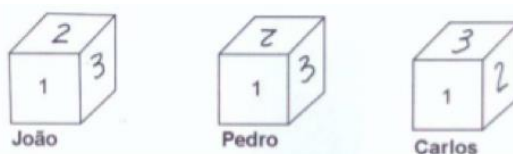
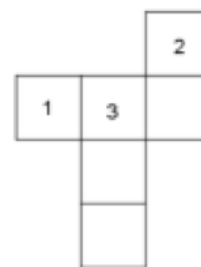
Fonte: Os autores

A terceira tarefa, baseada em Kawamoto (2016), que estará em análise neste artigo é a seguinte:

Quadro 3 – Tarefa 3

A figura ao lado representa uma das possíveis planificações de um cubo. Para completar um dado, as faces devem ser numeradas de 1 a 6. Se os números em faces opostas devem somar 7, complete a figura, com os possíveis números. Explique como você pensou.

Ainda em relação ao cubo, o professor pediu para João, Pedro e Carlos desenharem o cubo montado. Observe os desenhos deles e diga qual(is) o(s) correto(s). Explique sua resposta.



Fonte: Os autores

Objetivos: Verificar se os participantes:

1. Identificam que: 5 é face oposta de 2, 6 de 1 e 4 de 3, em relação a planificação.
2. Mobiliza as habilidades de visualização (HV):
 - a. Discriminação visual. Por exemplo: há uma comparação entre as figuras;
 - b. Percepção de relações espaciais. Por exemplo: para perceber as posições relativas entre os números 1 e 3, entre 3 e 2, e em especial a posição correta que o número 2 deve estar em relação a 1 e 3;
 - c. Rotação mental. Por exemplo: para criar a imagem do dado montado a partir da planificação e vice-versa.
 - d. Percepção de posições espaciais. Por exemplo relaciona partes do dado consigo mesmo.
3. Identificam a imagem correta.

As Tabelas 5 e 6 ilustram o desenvolvimento dos participantes, quanto aos objetivos propostos na questão.

No caso do Objetivo 1, foi assinalado com um X, quando o participante identifica, na planificação do cubo dada, as faces opostas as que contém os números 1, 2 e 3.

O Objetivo 2 refere-se à mobilização das habilidades de visualização: discriminação visual (DV), percepção de relação espacial (PRE) e rotação mental (RM). Marcamos DV no caso de o participante apresentar em sua resolução evidências ou indícios de que compara a imagem do cubo planificado dado com a(s) figura(s) de cada menino, por exemplo, quando a resposta apresenta expressões como: montagem, ou fechamento, ou dobra do cubo (ou dado), ou há expressões que remetem ao inverso, a planificação dos cubos de João, Pedro e Carlos; ou quando há desenhos ilustrando alguma das duas relações descritas. As respostas em que os indivíduos percebem as posições relativas entre os números 1 e 3, entre 3 e 2, e em especial a posição correta que o número 2 deve estar em relação a 1 e 3, são marcadas como PRE, pois entendemos que dessa forma foi mobilizada essa HV. Se a resolução apresenta indícios, descritos e/ou por ilustração, de uma transformação do dado planificado que está no plano, 2D, em um cubo que pertence ao espaço 3D, ou vice-versa, consideramos que a habilidade de visualização RM foi mobilizada. No caso da Percepção de posições espaciais (PPE), será marcado se, na resolução, por exemplo há evidências de que o participante relaciona partes do dado consigo mesmo.

Por fim, se a resolução apresenta os lados opostos na figura planificada e o dado de Pedro como o correto, está satisfeito o O3.

Tabela 8 - Dados da Tarefa 3 - Turma J

Participante	O1	O 2				O3	OBS
		DV	PR E	RM	PPE		
J1	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
J2	X						Diz que todos estão corretos.
J3	X	X	X	X	X	X	Diz que o 2 deve estar “de ponta cabeça” para quem observa.
J4	X	X	X	X		X	Diz que todos estão corretos, mas diz que o de Pedro é o que se assemelha ao planejado.
J5	X			X			Refere-se a montagem do cubo. Diz que João e Pedro estão corretos.
J6	X						Diz que todos estão corretos.
J7	X	X	X	X		X	Refere-se a fechar o cubo. Desenha uma rotação do cubo.
J8	X						Diz que todos estão corretos.
J9	X			X			Refere-se a montagem do cubo. Responde João, não observando a posição do número 2.
J10	X	X	X	X		X	Friza a posição correta do número 2.
J11	X	X		X			Refere-se a dobrar aplanificação. Diz que João e Pedro estão corretos. Desenha uma rotação do cubo, não observando a posição do número 2.
J12	X	X		X			Desenha uma rotação do cubo, não observando a posição do número 2.. Diz que todos estão corretos, apenas Carlos rotacionou o dele.
J13	X						Escreve que não conseguiu identificar o dado correto.
J14	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Diz que João e Pedro montaram corretamente, não observando a posição do número 2.
J15	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.

Fonte: Os autores

Tabela 9 - Dados da Tarefa 2 - Turma I

Participante	O1	O2				O3	OBS
		DV	PRE	RM	PPE		
I1	X	X		X			Refere-se a fechar o Dado. Responde João.
I2	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I3	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Responde Carlos e Pedro.
I4	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I5	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Responde João.
I6	X			X			Não justifica, só diz que João e Pedro estão corretos.
I7	X	X	X	X		X	Monta o dado usando uma identificação dos vértices coincidentes.
I8	X	X	X	X		X	Refere-se a fechar o Dado.
I9	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I10						X	Só escreve Pedro, mas não justifica nada.
I11	X	X	X	X		X	Refere-se a dobrar da planificação.
I12	X	X		X			Escreve apenas que João e Pedro estão corretos.
I13	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Diz nenhum está correto.
I14	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.

I15	X	X	X	X		X	Refere-se a dobrar da planificação.
I16	X	X	X	X		X	
I17	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Responde João e Pedro.
I18	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I19	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I20	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I21	X	X	X	X		X	Refere-se a montagem do cubo.
I22							Não fez
I23	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Responde João e Pedro.
I24	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Diz que todos estão corretos.
I25	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Responde João e Pedro.
I26	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Diz que todos estão corretos.
I27	X	X		X			Refere-se a montagem do cubo. Responde João e Pedro.

Fonte: Os autores

Todas as 15 respostas da Turma J atenderam o objetivo 1, isto é, foram identificadas na planificação todas as faces opostas. Dentre as resoluções, há evidências que, 9 colaboradores, ou seja, em 60% observa-se que a discriminação visual (DV) fez-se presente, enquanto 6 (40%) mobilizaram a percepção de relação espacial (PRE), e 11 (cerca de 73%) da mobilização da rotação mental (RM). Com respeito a PPE, somente 1 das respostas nos permitiu inferir que houve a mobilização de tal HV (ou 7% aproximadamente), o participante J3 diz: “Diz que o 2 deve estar “de ponta cabeça” para quem observa.”. No caso ele próprio está se considerando o observador, desse modo cremos que houve a mobilização da PPE. Dentre as resoluções, 6 identificaram o cubo correto, ou seja, 40% trazem como resposta Pedro, atendendo ao O3.

No caso da Turma I, 25 das 27 respostas atenderam o objetivo 1, ou seja, cerca de 92% das resoluções. Dentre as resoluções, há evidências que, 24 mobilizaram a discriminação visual (DV) e a rotação mental (RM), ou aproximadamente 89%. Enquanto 13 (aproximadamente 48%) mobilizaram a percepção de relação espacial (PRE). Com respeito a PPE, não houveram registros que nos possibilitasse inferir se houve a mobilização de tal HV. Por fim, foram 14 as respostas que atenderam o O3, ou seja, cerca de 52% responderam Pedro.

Em relação aos dados da terceira tarefa, observa-se que, todos os participantes do grupo J identificaram as faces opostas do dado em relação a planificação, enquanto cerca de 8% no grupo I tiveram dificuldades e não o fizeram. Os integrantes da turma J aparentam uma maior familiaridade em identificar as faces opostas na planificação. Com relação as habilidades de visualização que se esperava serem mobilizadas nessa tarefa, os participantes da turma I aparentam mobilizar mais as habilidades de Discriminação visual e de Rotação mental que os da turma J. Na turma I aproximadamente 11%, não mostraram ter mobilizado tais habilidades, enquanto na turma J, cerca de 40% não mostraram mobilizar a Discriminação visual e 27% aparentam não mobilizar a Rotação mental. Com respeito a Percepção de relações espaciais, aproximadamente 60% da turma J e 52% da turma I não demonstraram mobilizar tal habilidade. Ou seja, foi observada uma certa dificuldade em relação à posição do número 2 em relação aos demais, em mais de 50% dos participantes. Apenas 7% dos participantes da turma J mobilizaram a Percepção de Posição espacial e essa mobilização não foi observada em nenhum dos participantes da turma I nessa tarefa. Pouco mais de a metade da turma I, 52%, chegaram a identificar a imagem do dado esperada nessa tarefa e 60% da turma J não identificaram a imagem do dado correto.

Tabela 10 - Comparação de rendimento das turmas na tarefa 3, (em %):

Turma	O1	DV	PRE	RM	PPE	O3
J	100	60	40	73	7	40
I	92	89	48	89	0	52

Fonte: Os autores

Discussões

Como foi descrito anteriormente, as resoluções de cada tarefa foram analisadas buscando categorizá-las com respeito aos objetivos estabelecidos para cada uma delas. Feito isso, foram comparados os desempenhos de cada grupo, o que nos levaram a algumas inferências.

Os dados da primeira tarefa revelam uma diferença entre os participantes das turmas I e J em relação a compreensão dos conceitos e regras básicos envolvidos na tarefa. Os participantes dos dois grupos apresentam falhas no conhecimento sobre o conceito de retas reversas e nas regras de representação dos segmentos ocultos. Porém, os ingressantes apresentaram mais e maiores dificuldades, como a confusão dos conceitos aresta e vértice, faces opostas, entre outros. Nessa tarefa as duas turmas apresentam um desempenho muito próximo em relação a mobilização da percepção de posições espaciais (PPE), grande parte dos participantes demonstraram reconhecer arestas e vértices “mais próximos de si”. Ambas mostraram uma boa mobilização da Constância perceptiva (CP), demonstrando compreender e reconhecer arestas ocultas, por exemplo.

Na análise da segunda tarefa, viu-se que ambas as turmas tem conhecimento de conceitos básicos de Geometria requeridos nessa tarefa. Porém notou-se dificuldades teóricas em relação a Geometria em si. Pôde-se notar também nas resoluções, que o recorrer à uma resolução geométrica está ligada a uma forma intuitiva de resolver, distantes das validações por meio de resultados teóricos, ou da abstração baseada em seu sistema axiomático. Nessa tarefa as duas turmas aparentam mobilizar satisfatoriamente as habilidades de visualização de Percepção de figura e contexto (PFC) e Discriminação visual (DV), porém a Constância perceptiva (CP) não aparenta grande mobilização pelas duas turmas, diferente do ocorrido na primeira tarefa. A maior parte dos participantes de ambas as turmas não chegaram à solução esperada.

Em relação a terceira tarefa, observou-se que, todos os participantes do grupo J e grande parte

do grupo I identificaram as faces opostas do dado em relação a planificação. Nessa pesquisa ocorreu algo diferente do visto por Kawamoto (2016) em que os resultados indicaram ser

[...] mais fácil o aluno identificar faces opostas no cubo montado do que na planificação, pois esta exige que o sujeito crie uma imagem mental dinâmica do cubo todo “montado”. Segundo Gutiérrez (1996a), uma possível origem desse tipo de dificuldade é a falta de certas habilidades de visualização, tais como a de rotação mental e a percepção de relações e posições espaciais. (KAWAMOTO, 2016 p. 62)

Com relação as habilidades de visualização que se esperava serem mobilizadas nessa 3ª tarefa, os participantes da turma I aparentam mobilizar mais as habilidades de Discriminação visual (DV) e de Rotação mental (RM) que os da turma J. Com respeito a Percepção de relações espaciais (PRE), foram observadas dificuldades em relação à posição do número 2 em relação aos demais, em ambos os grupos. A Percepção de posição espacial (PPE) não apresentou grande mobilização dos participantes das duas turmas nessa tarefa. Houve uma significativa diferença entre os dois grupos em relação a identificação da imagem do dado esperada nessa tarefa. A turma I teve um melhor desempenho, sendo cerca de 48% da turma I e 60% da turma J que não identificaram a imagem do dado correto.

De modo geral, pode-se inferir através das análises, com respeito aos conhecimentos prévios mobilizados nas tarefas, que os participantes dos dois grupos apresentam dificuldades em determinados conceitos, porém os componentes da turma I, os ingressantes, apresentam um pouco mais de dificuldade nesses conceitos básicos. E embora alguns conceitos sejam conhecidos as resoluções, muitas vezes seguem uma forma intuitiva, sem a preocupação com a validação por meio de uma sequência lógica com resultados teóricos, ou com a abstração baseada no sistema axiomático da Geometria Euclidiana.

Com relação a Mobilização das habilidades de visualização, nas duas primeiras tarefas não há uma significativa diferença entre os dois grupos em termos da mobilização das habilidades requeridas,

na terceira tarefa é observada uma pequena diferença. Pelo desempenho dos grupos, pode-se inferir que o grupo I está um pouco a frente do grupo J na mobilização das habilidades de Discriminação visual (DV), de Percepção de relação espacial (PRE) e Rotação mental (RM).

Essa análise nos leva a pensar que, embora os participantes cheguem a mobilizar algumas habilidades de visualização, a dificuldade e a falta de conhecimento teórico de Geometria os prejudica nas resoluções, e até mesmo na mobilização e no desenvolvimento das habilidades de visualização.

Algo dessa ordem também é observado por Kawamoto (2016) que em sua pesquisa conclui: “os participantes apresentam dificuldades de naturezas variadas”. A autora diz que já na análise das respostas às questões do instrumento diagnóstico há dificuldades relacionadas à:

[...] habilidade de visualização, à associação de uma planificação com uma figura tridimensional, às regras para representação plana de figuras tridimensionais e/ou planas, ao conhecimento de conceitos de Geometria e à utilização de nomenclatura inadequada. (KAWAMOTO, 2016 p. 152)

Considerações Finais

Como já exposto, a visualização vem sendo considerada um fator de grande importância para o ensino e a aprendizagem da matemática, em particular da Geometria. Vem sendo também tema de muitas pesquisas ligadas à educação matemática, que passaram a enfatizar a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem matemática.

Nesse estudo de caso, buscamos analisar o conhecimento sobre conceitos de geometria e a mobilização de habilidades de visualização na resolução de três tarefas, observando a existência ou não de diferenças entre os dois casos estudados.

Buscou-se com essa investigação levantar dados que pudessem contribuir para respostas às questões que emergiram durante as leituras que embasaram esse trabalho.

Com respeito à questão: Como está o conhecimento em geometria e quais habilidades de visualização mobilizadas por acadêmicos ingressantes no curso de Matemática, por alunos que estão terminando o curso e recente egressos? Pôde-se notar que há algumas uma diferença entre os dois grupos estudados. Os participantes dos dois grupos apresentam dificuldades em determinados conceitos,

porém os componentes da turma dos ingressantes, apresentam um pouco mais de dificuldade nesses conceitos básicos. Os participantes dos dois grupos mobilizam algumas habilidades de visualização, como a Discriminação visual (DV), Percepção de relação espacial (PRE), Percepção de posição espacial (PPE), Percepção de figura e contexto (PFC), Constância perceptiva (CP) e Rotação mental (RM). Porém, observa-se nos dois grupos que a dificuldade e a falta de conhecimento teórico de Geometria prejudicam as resoluções, e até mesmo a mobilização das habilidades de visualização.

Em relação as questões: A graduação em matemática altera a maneira de visualizar em Matemática, em específico na geometria? Há indícios de diferenças na mobilização de habilidades de visualização na resolução de tarefas de geometria, entre os ingressantes em um curso de formação inicial em Matemática e aqueles que já fizeram as disciplinas de geometria desse curso? Nos casos investigados, observou-se que as disciplinas de Geometria realizadas pelos alunos durante o curso, no caso da turma J, não aparentaram contribuir para melhoria em relação à visualização.

Pretende-se dar continuidade a essa pesquisa, com um grupo menor de colaboradores, buscando aprimorar os instrumentos de coleta de dados e de análise. Pretendemos elaborar tarefas mais direcionadas, visando uma maior precisão na verificação de quais habilidades são mobilizadas pelos ingressantes e pelos pesquisados que já cursaram as disciplinas de Geometria do curso de Matemática.

Referências

- CÂMARA, R. H. Análise de conteúdo: da teoria à prática em pesquisas sociais aplicadas às organizações. **Gerais: Revista Interinstitucional de Psicologia**, Brasília, Brasil, v.6, n. 2, p. 179-191, jul./ dez., 2013.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.
- DEL GRANDE, J. **Spatial sense. Arithmetic Teacher**, 37 (6), p. 14-20, 1990.
- DUVAL, R. Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. Publié dans Baillé, J., Lima, J. (Eds) 2015. **Du mot au concept**. Figure, p. 147-182. Grenoble: Presses Universitaires. 2015.
- FERNÁNDEZ BLANCO, M. T. Atendiendo habilidades de visualización en la Enseñanza de la geometría. Universidad de Santiago de Compostela.

IX Festival Internacional de Matemática, Quepos, Puntarenas, Costa Rica, 12 a 14 de jun., 2014. p. 21 – 33. Disponível em: <<http://revistas.tec.ac.cr/index.php/memorias/article/view/2505/2293>> Acesso em: 13/03/2018.

FERNÁNDEZ BLANCO, M. T. **Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial**. 2011.465 f. Tesis doctoral. Santiago de Compostela. Universidad de Santiago de Compostela, Espanha, 2011.

GUTIÉRREZ, A.; GUILLÉN, G.; JAIME, A.; CÁCERES, M. **La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.** (memoria final del proyecto de investigación). Valencia: Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”, Valencia, Espanha, 1992.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), **Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 1, Universidad de Valencia, Valencia, p. 3-19, 1996.

GODINO, J. D.; GONZATO, M.; FERNÁNDEZ BLANCO, M.T. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial, **Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 77, p. 99–117, jul. de 2011.

KAWAMOTO, M. **Habilidades de visualização em Geometria espacial: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio**. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-Graduação – Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016.

PATTON, M. G. **Qualitative Research and Evaluation Methods**, 3 ed., Thousand Oaks, CA: Sage, 2002.

PRESMEG, N.C. Visualization in high school mathematics, **For the Learning of Mathematics 6**, Fl M Publishing Association Montreal Quebec, Canada, p. 42-46, 1986.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics. **Emergency from psychology**. 2006.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

Raquel Polizeli Corradi: Doutoranda do programa de pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, professora do Departamento de Matemática da UTFPR – Campo Mourão, vinculada ao Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG.

Valdeni Soliani Franco: Doutor em Matemática pelo ICMC/USP-São Carlos, professor associado do Departamento de Matemática e do programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, vinculados à Universidade Estadual de Maringá. Atua na área de Educação Matemática, com ênfase em recursos didáticos e midiáticos e formação inicial de professores de matemática. Vinculado ao Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG.