

UMA ABORDAGEM DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DA EQUAÇÃO DE VAN DER WAALS

An approach to the Third Degree Equations in High School from the Van der Waals Equation

Erivelto Bauer de Matos

Luciane Gobbi Tonet

Lidiane Buligon

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma proposta didática elaborada para complementar o estudo de polinômios no Ensino Médio, a qual se baseia nos princípios da Engenharia Didática. O problema motivador está relacionado ao cálculo do número aproximado de moléculas de ar atmosférico (gás real) contido em um pneu de carro em condições de rodagem. A partir deste, obtivemos uma equação cúbica, denominada Equação de Van der Waals, a qual foi resolvida por meio de radicais. Este artigo é oriundo da dissertação de mestrado do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática (Matos, 2014).

Palavras-chave: Equações do Terceiro Grau. Polinômios. Equação de Van der Waals.

Abstract

In this work, we present a didactic proposal elaborated to complement the study of polynomials in High School. It is based on the principles of Didactic Engineering and it uses to the third degree equations. The motivating problem is related to the calculation of the approximate number of atmospheric air molecules (real gas) contained in a car tire under running conditions. We solve the cubic equation, called the Van der Waals equation, by the radical technique. This paper comes from the dissertation of the PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática (Professional Master's Course in Mathematics) (Matos, 2014).

Keywords: Third Degree Equations. Polynomials. Van der Waals Equation.

Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma proposta didática elaborada para complementar o estudo de polinômios no Ensino Médio. O interesse em abordar o assunto partiu do momento em que um colega, professor de Química, realizou um experimento no laboratório e solicitou ajuda para resolver o seguinte problema “Qual é o número de mols na Equação de Van der Waals?”.

A fim de responder a esta pergunta, adaptamos o experimento de forma a ser passível sua execução no ensino médio, lançando mão das ferramentas e materiais disponíveis na escola. Nosso problema, desta forma, passou a consistir no cálculo do número de moléculas do ar atmosférico (gás real) em um pneu de automóvel.

A partir deste experimento, obtivemos uma equação do terceiro grau, denominada Equação de Van der Waals, a qual, em seguida, resolvemos por meio de radicais, obtendo assim o número de moléculas do ar atmosférico (gás real) em um pneu de automóvel.

De um modo geral, a Educação Básica contempla o estudo das equações do primeiro e segundo grau e os livros didáticos, em sua maioria, não abordam equações de ordem superior. Acreditamos que muito disso se deve ao nível de dificuldade que o assunto vai adquirindo na medida em que avançamos os estudos na área. No entanto, isso não deve se tornar um entrave para a abordagem do assunto, que pode ser tratado de maneira mais simples e numa linguagem apropriada ao aluno, conforme defendemos no decorrer dessa proposta.

Nesse sentido, a contextualização do assunto ao seu cotidiano é uma das formas de adaptá-lo a realidade do estudante. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

O critério central do ensino em Matemática é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como a sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 1998, p. 43).

Além disso, criar uma situação que exija o envolvimento ativo do aluno faz com que o aprendizado se torne mais significativo. Segundo Lorenzato:

A experimentação é o melhor modo para se conseguir a aprendizagem com significado, uma vez que ela realça o “porquê”, a explicação e, assim, valoriza a compreensão. Além disso, ela possibilita:

- a integração de diferentes assuntos;
- a redescoberta;
- a memorização de resultados;
- a aprendizagem de diferentes estratégias de resolução de problemas;
- a verificação de conjecturas ou de resultados (LORENZATO, 2008, p. 72).

Nesse trabalho, contemplamos a estes ideais na medida em abordamos um problema de ordem prática, o qual envolveu um experimento que culminou no estudo da equação cúbica. Além disso, propiciamos a conexão com outras áreas de ensino, como por exemplo, a Química.

Segundo Rozenberg (2002), um gás ideal consiste de um gás hipotético que obedece rigorosamente a relação $PV = nRT$, conhecida por equação de Clapeyron, sendo P a pressão do gás na parede do recipiente; V o volume ocupado pelo gás; n o número de mols de moléculas; R a constante universal dos

gases e T a temperatura do gás a qual está submetido. Esta equação é satisfeita apenas por gases ideais e, por isso, não se aplicaria a gases reais. No entanto, todo gás real, a baixas pressões, comporta-se como um gás perfeito. Portanto, para efeito de cálculo, o gás real pode, muitas vezes, ser substituído por um gás perfeito.

Há diversos modelos que descrevem o comportamento de um gás real, sendo a Equação de Van der Waals um dos mais conhecidos. Para a obtenção desta equação, Van der Waals partiu de dois princípios, conforme destacamos a seguir.

a) Quando se faz variar o volume oferecido a uma dada massa gasosa, o que varia, efetivamente, não é o volume ocupado pelo gás, mas, sim, o volume dos espaços livres entre suas moléculas. Nessas condições, o volume \bar{V} que figura na equação de Clapeyron¹ deve ser substituído pela diferença $\bar{V} - b$, onde b representa o volume vedado ao movimento das moléculas existentes, no caso, em uma molécula-grama do gás. A constante b chama-se covolume.

b) A pressão que se exerce num ponto considerado no seio da massa gasosa não é apenas a pressão P exercida pela parede do recipiente que a contém e que é medida por um manômetro, mas a soma $P + p_i$, isto é, a soma dessa pressão com uma outra p_i , chamada pressão interna, a qual introduz as interações intermoleculares no modelo.

Assim, a equação de estado para uma molécula-grama de um gás real deveria ser escrita $(P + p_i)(\bar{V} - b) = RT$.

Segundo considerações teóricas desenvolvidas por Van der Waals, a pressão interna p_i , que dependeria do afastamento das moléculas entre si, deve ser independente da temperatura e proporcional ao recíproco do quadrado do volume: $p_i = \frac{a}{\bar{V}^2}$. (ROZENBERG, 2002, p.103).

Assim, substituindo $\bar{V} = \frac{V}{n}$ e $p_i = \frac{a}{\bar{V}^2} = \frac{an^2}{V^2}$ na relação $(P + p_i)(\bar{V} - b) = RT$, obtemos

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = \left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{V - bn}{n}\right) = RT$$

¹ $PV = nRT$ ou $P\bar{V} = RT$

de onde segue a Equação de Van der Waals $(P + \frac{an^2}{V^2})(V - bn) = nRT$.

Essa equação se difere um pouco da equação dos gases ideais e permite prever mais rigorosamente o comportamento de gases reais, dentro dos limites do modelo. Os parâmetros a e b , na equação acima, são chamados de constantes de Van der Waals, sendo a o fator de correção da pressão interna do gás, devido as atrações mútuas entre as moléculas, e b o volume vedado ao movimento das moléculas, o qual também diz respeito às forças de repulsão. Estes parâmetros, obtidos experimentalmente, aumentam com o crescimento da massa molecular e complexidade da molécula, sendo característicos de cada gás.

Aplicamos nossa proposta didática num grupo de 13 alunos do segundo ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete / RS no ano de 2014, no decorrer de sete aulas com duração de noventa minutos cada. A aplicação ocorreu no turno contrário às aulas, num grupo de alunos interessado em participar da atividade.

Metodologia de Pesquisa

A nossa proposta se fundamenta nos princípios da Engenharia Didática, que surgiu na década de 1980, na França, para tratar a pesquisa na sala de aula com maior controle através da realização de uma sequência metodológica aplicada à prática pedagógica. Segundo Artigue (1996),

A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p.196).

Esta metodologia de pesquisa consiste de um processo organizado em quatro fases. Na *primeira fase* são realizadas as análises preliminares, as quais norteiam o trabalho de pesquisa. Esta fase se destina ao estudo geral do conhecimento didático já adquirido. Nela, buscamos saber, de forma teórica, as dificuldades e obstáculos enfrentados pelos alunos em seu aprendizado.

Artigue (1996) sugere que essa análise seja diferenciada em três dimensões:

- a) a epistemológica: destinada ao estudo das características da teoria do saber ao qual será posta em prática no desenvolvimento do trabalho;
- b) a cognitiva: associada às características do conhecimento adquirido pelo aluno;
- c) a didática: associada às características do funcionamento do sistema de ensino, isto é, estuda o conteúdo a ser trabalhado nos livros didáticos e a sua evolução.

Dentro do nosso contexto, esta etapa consiste na elaboração de uma lista de exercícios de sondagem baseada em conteúdos matemáticos necessários para o desenvolvimento da prática pedagógica, com objetivo de verificar possíveis deficiências na aprendizagem dos alunos.

A *segunda fase* trata da Concepção e análise a Priori e formulação de hipóteses. Nesta fase, o investigador toma a decisão de agir sobre as variáveis de comando, as quais podem ser de dois tipos: macro-didáticas ou globais (referem-se à organização global da engenharia, de forma mais ampla e mais geral) e micro-didáticas ou locais (referem-se à organização local da engenharia, descrevendo cada atividade proposta). É a partir das escolhas globais ou macro-didáticas que se segue para um plano onde as ações intervêm nas escolhas locais ou micro-didáticas.

No âmbito da nossa pesquisa, esta etapa caracteriza-se pela listagem de todos os conceitos necessários para o desenvolvimento da experiência. Dentre eles, destacamos o estudo da resolução da equação cúbica por radicais conforme Lima (2011). Em aula, deduzimos a fórmula resolutiva das equações do terceiro grau por meio de radicais através de substituições adequadas que transformem uma equação cúbica completa em uma equação cúbica desprovida do termo cuja incógnita esteja elevada ao quadrado. Maiores detalhes acerca do assunto, bem como toda a minúcia envolvendo os cálculos pertinentes estão disponíveis em Matos (2014).

A *terceira fase* se detém na experimentação, ou seja, na aplicação das atividades elaboradas e analisadas cuidadosamente na segunda fase do processo. Nesta fase, o professor colocará em ação a sua proposta didática elaborada a partir da primeira e segunda fase através de relatos,

anotações e observações nas aulas aplicadas. O professor deverá, inclusive, analisar as produções dos alunos dentro e fora de aula (ARTIGUE, 1996).

Com relação a nossa proposta, esta etapa consiste na coleta dos dados através de um experimento, bem como a manipulação da Equação de Van der Waals de modo a encontrar uma equação cúbica na incógnita n .

A quarta fase trata da análise a Posteriori, a qual diz respeito à validação da experiência e onde são feitos os últimos ajustes nos possíveis erros e enganos cometidos durante a elaboração do trabalho. Nesta fase compara-se a hipótese e o produto final obtido através das observações realizadas na terceira fase. Neste sentido, são apresentadas as hipóteses validadas e, para as que não foram constatadas como verdadeiras, são sugeridas as modificações necessárias.

Conforme Artigue (1996, p. 208) “é no confronto das duas análises, a priori e a posteriori, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação”. Dessa forma, a não validação de uma ou mais hipóteses não implica na invalidação da engenharia. Neste caso, pode-se sugerir que esta hipótese seja reescrita, gerando assim uma nova reflexão sobre a proposta da pesquisa e a ampliação do conhecimento sobre o tema.

Em particular, nesta proposta didática, esta fase consiste na validação dos dados coletados experimentalmente através da sua aplicação na equação obtida na terceira fase. Além disso, criamos uma planilha eletrônica na qual esta verificação também pode ser comprovada.

Convém ressaltar que, conforme já destacamos anteriormente, esta proposta teve origem em um problema levantado no experimento de um colega professor de química. Neste experimento, não foi mantida a ordem das quatro fases da Engenharia Didática aqui salientada. Por isso, entendemos ser conveniente, durante nossa aplicação, abordar a terceira fase da Engenharia Didática antes da segunda, exatamente como no experimento original. Isso também se justifica ao considerarmos importante realizar previamente o experimento como forma de instigar os alunos e também elencar os

conteúdos que seriam necessários para a consequente resolução do problema.

Muitos estudos vêm abordando a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa no ensino de matemática. Citamos, por exemplo, Ferreira e Alves (2016) que tratou sobre equações do primeiro grau numa perspectiva de resolução geométrica. Pommer (2013) dissertou à cerca da resolução das Equações Diofantinas Lineares tendo como objetivo resolver situações problemas de forma intuitiva e numérica, não utilizando uma formalização algébrica. Destacamos também Ferreira e Alves (2017), cujo trabalho discutiu uma metodologia para resolução de equações quadráticas num caráter geométrico utilizando o software GeoGebra, o Método de Descartes e do Método das Semicircunferências Tangentes. Ou ainda Lima (1999), que estudou a resolução de equações de terceiro grau utilizando o método geométrico de Omar Khayyam (1050 – 1130) o qual consiste em fazer uma mudança de variável adequada para transformar uma equação cúbica em uma equação de uma cônica – parábola, elipse ou hipérbole.

Dedução da Fórmula Resolutiva da Equação de 3º Grau por Radicais

Nesta seção, deduziremos da Fórmula Resolutiva da Equação de 3º Grau por Radicais, seguindo Lima (2011). Sem perda de generalidade, podemos considerar

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

polinômio de grau 3 qualquer. Substituindo $x = y + m$ na equação (1) teremos:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + (3m + a)y^2 + (3m^2 + 2am + b)y + m^3 + am^2 + bm + c = 0.$$

Vamos supor que $3m + a = 0$. Então $m = -\frac{a}{3}$, $x = y - \frac{a}{3}$ e, com isso,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0 \quad (2).$$

a qual é uma equação cúbica desprovida do termo cuja incógnita esteja

elevada ao quadrado. Para simplificar, sejam $p = -\frac{a^2}{3} + b$ e $q = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} + c$ e, com isso,

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3)$$

Desta forma, para resolver a equação (1), devemos resolver, equivalentemente, a equação (3). Consideramos $y = u + v$, com $u, v \in \mathbb{R}$. Assim,

$$y^3 + py + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Note que, agora, u e v são nossas variáveis. Para obtermos essa igualdade a zero, vamos supor que u e v satisfazem o sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \cdot v = -\frac{p}{3} \end{cases} \quad (4)$$

Mostraremos que $y = u + v$ é solução da equação (3). Para facilitar, vamos elevar ambos os membros da segunda equação do sistema (4) ao cubo, obtendo

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (5)$$

Da primeira equação, no sistema (5), temos $v^3 = -(q + u^3)$ e com isso $u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}$, de onde segue que $u^3(q + u^3) = \frac{p^3}{27}$. Assim, $(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$. Através do método de completamento de quadrados,

$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = \left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 0.$$

o que implica que $u^3 + \frac{q}{2} = \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Portanto, $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Por outro lado,

$$v^3 = -(q + u^3) = -\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

e, desta forma, $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Logo, $y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ é uma solução da equação (3) e, portanto, $x = y - \frac{a}{3}$ é uma solução da equação (1).

Desenvolvimento da Prática Pedagógica

Conforme Gil (2010), este trabalho consiste numa pesquisa-ação, uma vez que proporcionou uma interação simultânea, de ordem qualitativa e exploratória, entre o pesquisador e os pesquisados.

No primeiro encontro, aplicamos uma lista de exercícios envolvendo conteúdos já estudados pelos alunos e outros de teor supostamente desconhecido, os quais, com um pouco de atenção e raciocínio lógico, também são passíveis de resolução. Nosso objetivo, a partir desta sondagem, consistia em diagnosticar o nível de entendimento dos alunos com relação aos conteúdos que, de forma direta ou indireta, seriam necessários para a resolução do problema motivacional. As questões propostas versavam sobre geometria e equações do 1º, 2º e 3º graus e estão disponíveis em Matos (2014).

Realizado o diagnóstico, utilizamos o segundo encontro para revisarmos os conteúdos em que os alunos apresentaram maior dificuldade. Esta etapa inicial contempla a primeira fase da metodologia da Engenharia Didática em suas três dimensões: epistemológica, cognitiva e didática.

A terceira fase da metodologia adotada contempla a realização do experimento proposto, para o qual utilizamos o terceiro encontro. Recordamos que nosso objetivo é descobrir o número aproximado de moléculas de gás existentes em um pneu de automóvel em condições de rodagem. Para tal, medimos a pressão, a temperatura e o volume do ar contido no pneu e, para isso, necessitamos de saca ventil², compressor, régua, trena, termômetro, barbante, equipamento manual para tirar o pneu do aro, caixa d'água de formato cilíndrico e manômetro, conhecido popularmente como

² É utilizado para retirar a válvula do ventil de uma câmara de ar para esvaziá-la.

calibrador, e usado para medir a pressão de ar nos pneus.

De posse do pneu, utilizamos o manômetro para medir a pressão do gás contido nele, obtendo 29 lb/pol.^2 ³, ou equivalentemente, $1,9732 \text{ atm}$ ⁴. Em seguida, medimos a temperatura do gás no pneu, a qual é idêntica a do ar externo visto que ambas estão em equilíbrio térmico, e igual a 18°C ou, equivalentemente, $291,15\text{K}$.

Para medirmos o volume de gás ocupado no pneu, inicialmente colocamos o pneu cheio de gás dentro de uma caixa d'água e, com uma régua, verificamos uma variação de 2cm na altura da água. Imediatamente, desmontamos o pneu, ou seja, separamos a parte de borracha do aro. Recolocamos a borracha e o aro na caixa d'água, o que ocasionou uma variação de $0,5\text{cm}$ na altura da água. Isso significa que o volume do gás no pneu corresponde ao volume de água na caixa d'água com uma espessura de $1,5\text{cm}$.

Como a caixa d'água é cilíndrica, para o cálculo de seu volume $V = \pi r^2 h$, precisamos conhecer o seu raio r . Para isso, com o auxílio de um barbante, descobrimos que a circunferência da caixa mede $4,11\text{m}$. Sabendo que o comprimento de uma circunferência satisfaz $C = 2\pi r$, os alunos obtiveram $r = 0,654\text{m}$. Logo, o volume de água será dado por $V = 0,02014 \text{ m}^3$ ou, equivalentemente, $V = 20,14$ litros.

A partir de agora, faremos uma análise das demais constantes do gás que aparecem na Equação de Van der Waals. Uma delas, denotada por R , representa a constante universal dos gases e seu valor é $R = 0,08205 \text{ atm.L.mol}^{-1}.K^{-1}$ ⁵. Além disso, temos as constantes de Van der Waals a e b , as quais dependem do gás analisado. No nosso caso, o gás contido no interior do pneu é o próprio ar atmosférico cuja composição aparece na tabela a seguir.

Tabela 1 – Gases que compõem o ar atmosférico.

Gases	Porcentagem
Nitrogênio	78,08
Oxigênio	20,95
Argônio	0,93
Dióxido de carbono	0,035
Neônio	0,0018
Hélio	0,00052
Metano	0,00014
Kriptônio	0,0001
Óxido nitroso	0,00005
Hidrogênio	0,00005
Ozônio	0,000007
Xenônio	0,000009

Fonte: <http://fisica.ufpr.br/grimm/aposmeteo/cap1/cap1-2.html> acessado em 10/10/2013

Conforme podemos verificar na Tabela 1, a partir do quarto elemento, os gases possuem uma representação insignificante se comparada aos três primeiros gases. Desse modo, podemos supor que o pneu contém apenas Nitrogênio, Oxigênio, Argônio e Dióxido de Carbono. Ressaltamos que, ao arredondar o valor da porcentagem do Dióxido de Carbono para $0,04\%$, obtivemos 100% de presença desses quatro gases no pneu.

Na tabela a seguir, apresentamos os valores das constantes de Van der Waals a e b para os gases considerados no interior do pneu, obtidos em Ball (2013).

Tabela 2 – Valores das constantes de Van der Waals.

Gases	Porcentagem	a (atm.l ²)	b (l)
Nitrogênio	78,08	1,389696	0,03913
Oxigênio	20,95	1,360086	0,03183
Argônio	0,93	1,345281	0,03219
Dióxido de Carbono	0,04	3,59268	0,04267

Fonte: dados de porcentagem obtidos em <http://fisica.ufpr.br/grimm/aposmeteo/cap1/cap1-2.html> acessado em 10/10/2013

O valor da constante a do gás contido no pneu é dado por $a = p_N a_N + p_O a_O + p_A a_A + p_{DC} a_{DC}$, onde p_G representa a porcentagem de cada gás e a_G sua respectiva

³ Libra-força por polegada quadrada.
⁴ 1 atm equivale a $14,6967 \text{ lb/pol.}^2$

⁵ No Sistema Internacional, $R = 8,314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$

constante de Van der Waals. Logo, $a = 1,384 \text{ atm l}^2$ e, de maneira inteiramente análoga, temos que $b = 0,0375 \text{ l}$. Com isso, já determinamos todas as variáveis e

constantes necessárias para o cálculo do valor de n na Equação de Van der Waals, resumidas na tabela a seguir:

Tabela 3 – Dados experimentais.

Pressão (atm)	Volume (l)	Temperatura (K)	Constante a (atm.l ²)	Constante b (l)	Constante R (atm.l.mol ⁻¹ .K ⁻¹)
1,9732	20,145	291,15	1,384	0,0375	0,08205

Fonte: Autor

Nesta terceira fase, também reescrevemos a equação de Van der Waals

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT \quad (6).$$

em função da incógnita n . Inicialmente, dividindo ambos os membros da equação (6) por $V - bn$, obtemos

$$p + \frac{an^2}{V^2} = \frac{nRT}{V - bn}. \quad (7)$$

Em seguida, subtraímos $\frac{an^2}{V^2}$ em ambos os membros da igualdade (7),

$$p = \frac{nRT}{V - bn} - \frac{an^2}{V^2} = \frac{nRTV^2}{(V - bn)V^2} - \frac{an^2(V - bn)}{(V - bn)V^2} \quad (8).$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (8) por $(V - bn)V^2$ encontramos

$$nRTV^2 - an^2V + abn^3 = pV^3 - pbnV^2 \quad (9).$$

Adicionando $-pV^3 + pbnV^2$ a ambos os membros da igualdade (9), obtemos

$$abn^3 - aVn^2 + RTV^2n + pbV^2n - pV^3 = 0$$

Observamos que $RTV^2n + pbV^2n = (RTV^2 + pbV^2)n$ e, com isso, chegamos a uma equação do 3º grau da forma

$$abn^3 - aVn^2 + (RTV^2 + pbV^2)n - pV^3 = 0 \quad (10).$$

De posse desta equação, fez-se necessário um estudo sobre a resolução das equações cúbicas por radicais (Lima, 2011; Matos, 2014), caracterizando a segunda fase da Engenharia Didática, a qual trata da concepção e levantamento de hipóteses. Nesta etapa, empregamos o quarto e o quinto encontros para relembramos algumas definições de natureza química e os princípios que levaram J. D. Van der Waals a elaborar

uma equação que descrevesse o comportamento de um gás real.

Além disso, achamos oportuno abordar, mesmo que brevemente, a história das equações do terceiro grau. Indicamos Matos (2014), ao leitor que esteja interessado em estudar um resumo acerca desta história. Para informações mais detalhadas sobre o assunto, reportamos a Lima (2011) e Garbi (2010). Para este artigo, enfatizamos os cálculos desenvolvidos nesse âmbito.

Boa parte dos estudantes compreendeu a metodologia desenvolvida, sendo que alguns, porém, apresentaram algumas dificuldades. Desta forma, estudamos a resolução de cinco equações do terceiro grau para que os estudantes tivessem uma maior clareza do objeto de estudo, o que em parte sanou as dificuldades apresentadas na aula anterior.

A quarta fase consistiu no cálculo de n em função dos dados obtidos na terceira fase, ou seja, nos direcionamos à resolução da equação (10). Para isso, dedicamos o sexto encontro com a turma. Sabendo que a e b são constantes positivas relativas ao gás no interior do pneu, podemos dividir ambos os membros da equação (10) por $ab \neq 0$, obtendo

$$n^3 - \frac{V}{b}n^2 + \left(\frac{RTV^2}{ab} + \frac{pV^2}{a}\right)n - \frac{pV^3}{ab} = 0$$

Apenas para simplificar, consideraremos $\lambda_2 = -\frac{V}{b}$, $\lambda_1 = \frac{RTV^2}{ab} + \frac{pV^2}{a} = \left(\frac{RT}{ab} + \frac{p}{a}\right)V^2$ e $\lambda_0 = -\frac{pV^3}{ab}$, para os quais teremos que $n^3 + \lambda_2n^2 + \lambda_1n + \lambda_0 = 0$.

Nosso próximo passo é eliminar o termo λ_2n^2 e, para isso, faremos a mudança de variável $n = x - \frac{\lambda_2}{3}$. Com isso, obtemos

$$n^3 + \lambda_2n^2 + \lambda_1n + \lambda_0 = x^3 + \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{3}\right)x + \left(\frac{2\lambda_2^3}{27} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{3} + \lambda_0\right) = 0.$$

a qual é da forma $x^3 + \alpha x + \beta = 0$, com $\alpha = \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{3}$ e $\beta = \frac{2\lambda_2^3}{27} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{3} + \lambda_0$ e, portanto, sua solução é $x = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$. Como $n = x - \frac{\lambda_2}{3}$ então, segue que

$$n = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} - \frac{\lambda_2}{3} \quad (11).$$

Após a determinação do valor de n , seguimos para a resolução numérica. A partir dos resultados destacados na Tabela 3, obtivemos $\lambda_0 = -310.817,57$, $\lambda_1 = 187.372,435$ e $\lambda_2 = -537,2$. Logo, $\alpha = 91.177,82$ e $\beta = 21.757.840,62$ e, com isso, o valor do radicando é $D = \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} = 1,464 \times 10^{14}$. Notemos que $D > 0$, o que significa que n possui apenas um valor real e dois complexos. Isso está de acordo com a resolução do problema, já que não teria sentido físico encontrarmos dois valores positivos para n . Com isso, segue de (11) que $n = 1,64$ mols, aproximadamente.

Utilizando o número de Avogadro, podemos concluir que há, no interior do pneu, $9,88 \times 10^{23}$ moléculas, aproximadamente, sendo 78,08% de Nitrogênio, 20,95% de Oxigênio, 0,93% de Argônio e 0,04% de Dióxido de Carbono.

No sétimo encontro da nossa proposta pedagógica criamos uma planilha eletrônica para calcular o número de mols na Equação de Van der Waals e, consequentemente, o número de moléculas. Entregamos aos alunos um arquivo em uma planilha eletrônica, o qual continha as informações dadas na figura a seguir.

Figura 1 – Planilha para cálculo do número de mols

Calculando o número de mols na Equação de Van der Waals						
λ_0	λ_1	λ_2	α	β	D	Condição da unidade do número de mols: D deve ser um número positivo.
p (atm)	V (litro)	T (kelvin)	a (atm.L ²)	b (L)	n (mols)	Número de moléculas

Fonte: Autor

Neste arquivo, os alunos definiram as células B4, C4, D4, E4, F4, G4, G7 e I7 que representam, respectivamente, λ_0 , λ_1 , λ_2 , α , β , D, n e o número de moléculas, cujas expressões foram determinadas anteriormente. Deste modo, para que um usuário obtenha o valor de n e o número de moléculas na Equação de Van der Waals, basta que ele digite nas células B7 (pressão), C7 (volume), D7 (temperatura), E7 (constante a) e F7 (constante b) os valores correspondentes.

As fórmulas a serem inseridas e todo o procedimento de validação está descrito detalhadamente em Matos (2014). A elaboração desta planilha, bem como a discussão realizada no final da quarta fase, demarcam a validação dos resultados da pesquisa.

Conclusões

Ao longo deste trabalho desenvolvemos uma proposta didática com alunos do segundo ano do Ensino Médio, abordando a resolução do problema de encontrar o número de moléculas de ar atmosférico em um pneu de automóvel utilizando a Equação de Van der Waals, a qual nos levou ao estudo da resolução de equações do terceiro grau por radicais. Desenvolvemos uma metodologia a qual, além de resolver equações do terceiro grau, nos permitiu abordar de forma integrada outros assuntos da matemática e também de outros campos do conhecimento através de um problema aplicado.

Elaboramos uma proposta de atividade prática que pudesse ser aplicada em sala de aula. No entanto, no decorrer da sua aplicação, percebemos que a logística de montagem e desmontagem do pneu na realização do nosso experimento não se torna muito viável para ser desenvolvida em um ambiente escolar que não disponha dos equipamentos por nós utilizados.

Concluímos que o estudo das equações do terceiro grau pode ser aplicado a alunos do Ensino Médio, mesmo que nossa pesquisa tenha sido realizada com alunos voluntários. No entanto, recomendamos que os conteúdos abordados sejam desenvolvidos

com mais tempo do que o exposto neste trabalho. Também ressaltamos que deve haver planejamento prévio por parte do ambiente escolar no intuito de disponibilizar materiais necessários, a fim de que o trabalho proposto seja realizado de uma forma mais prática e objetiva.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

- ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. Vol. 1. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. 726 p. Tradução de: Calculus, a new horizon.
- ARTIGUE, Michèle. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean (Direção). *Didáticas das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.
- ATKINS, Peter; PAULA, Julio de. **Físico-Química**. Vol. 1. Tradução de Edilson Clemente da Silva, Márcio José Estillac de Mello Cardoso, Marco Antônio França Faria e Oswaldo Esteves Barcia. 8ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- BALL, David W. **Físico-Química**. Vol. 1. Tradução de Ana Maron Vichi. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. Prefácio de Isaac Asimov; Revista por Uta C. Merzbach; Tradução de Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859>. Acesso em: 15 jan. 2014.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- FERREIRA, Guttenberg S. S.; ALVES, Francisco R. V. **Engenharia Didática para Discussão Geométrica e Resolução de Equações de 1º Grau: Análises Preliminares e a Priori**. Conexões - Ciência e Tecnologia, [S.l.], v. 9, n. 4, p. 78-82, may 2016. ISSN 2176-0144. Disponível em: <<http://www.conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/986/703>>. Acesso em: 17 mar. 2020. doi:<<https://doi.org/10.21439/conexoes.v9i4.986>>.
- FERREIRA, Guttenberg S. S.; ALVES, Francisco R. V. **Uma experiência num curso de Licenciatura em Matemática: Engenharia Didática com o tema Equações Quadráticas**. Revista Thema, [S.l.], v. 14, n. 1, p. 43-62, fev. 2017. ISSN 2177-2894. Disponível em: <<http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/323>>. Acesso em: 18 mar. 2020. doi:<<http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.43-62.323>>.
- GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- GIL, Antonio C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- LIMA, Elon L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- LIMA, Rosana N. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas**. Dissertação – Mestrado em Educação Matemática. PUC – SP. 1999.
- LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006; Coleção Formação de Professores.
- MATOS, Erivelto B. **Estudo das Equações do Terceiro Grau no Ensino Médio a partir da Equação de Van der Waals**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.
- MILIES, César P. *Revista do Professor de Matemática*, Vol. 25. São Paulo: RPM – IME – USP, 1 CD-ROM
- PAIVA, Manoel. *Matemática*. Vol. 3. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2009.
- POMMER, Wagner M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**, 2013. 72 p. ils.: Tabs.
- ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P. F. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. RIO DE JANEIRO: SBM, 2012.
- ROZENBERG, Izrael M. **Química Geral**. São Paulo: Blucher, 2002.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANA.
Departamento de Física. Disponível em:

<<http://fisica.ufpr.br/grimm/aposmeteo/cap1/cap1-2.html>>. Acesso em: 10 nov. 2013.

Erivelto Bauer de Matos: Mestre; Instituto Federal Sul-rio-grandense Campus Novo Hamburgo/IFFSUL, Novo Hamburgo, RS - Brasil. E-mail: prof.erivelto@hotmail.com.

Luciane Gobbi Tonet: Doutora; Universidade Federal de Santa Maria/UFSM, Santa Maria, RS - Brasil. E-mail: lucianegobbi@yahoo.com.br

Lidiane Buligon: Doutora; Universidade Federal de Santa Maria/UFSM, Santa Maria, RS - Brasil. E-mail: l.buligon@ufsm.br