CONSTRUÇÕES HISTÓRICAS E O CONCEITO DA DERIVADA: UM ESTUDO COM BASE NA TEORIA APOS

Historical constructs and the concept of the derivative: a study based on the APOS theory

Janice Rachelli
Vanilde Bisognin

Resumo

Neste artigo, relata-se um estudo que teve por objetivo a utilização de problemas históricos para analisar a compreensão do conceito de derivada por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Tendo a teoria APOS como referencial teórico e metodológico, elaborou-se a decomposição genética, em que foram descritas as possíveis construções mentais utilizadas pelos estudantes para a compreensão do conceito da derivada e desenvolveram-se atividades em sala de aula tendo como base o ciclo de ensino ACE. Os resultados obtidos evidenciam a construção de estruturas mentais pelos estudantes, o que lhes permitiu relacionar os problemas históricos com a derivada da função, utilizar a definição formal da derivada e interpretar a derivada como inclinação da reta tangente e como velocidade instantânea.

Palavras-chave: Cálculo. Construções históricas. Derivada. Teoria APOS.

Abstract

In this article, we report a study that aims to use historical problems to analyze the understanding of the concept of derivative by students of a master's degree in mathematics teaching. With the APOS theory as a theoretical and methodological reference, the genetic decomposition was elaborated, in which the possible mental constructions used by the students to understand the concept of the derivative were described, and classroom teaching activities were developed based on the ACE teaching cycle. The results obtained evidenced the construction of mental structures by the students, which allowed them to relate the historical problems to the derivative of the function, to use the formal definition of the derivative and to interpret the derivative as a slope of the tangent line and as an instantaneous velocity.

Keywords: Calculus. Historical Constructions. Derivative. APOS Theory.

Introdução

A derivada, um conceito fundamental do Cálculo, tem sua origem associada a problemas históricos que nos remetem à determinação de tangentes, ao cálculo das fluxões e das diferenciais e à necessidade de formalização de conceitos.

No entanto, no ensino de Cálculo, esse conceito é trabalhado com os estudantes dando ênfase aos processos algorítmicos e algébricos, sendo deixados de lado os problemas que deram origem ao conceito e a evolução histórica de sua formulação. O que se observa é que pela tradição em cumprir as ementas das disciplinas e pela própria organização de livros didáticos e a sua utilização em sala de aula, deixamos, muitas vezes, de tratar do processo de construção e validação do conhecimento matemático, que foi desenvolvido a partir de longas discussões e debates que perpassaram décadas.

No que se refere à derivada, estudos têm evidenciado dificuldades encontradas pelos estudantes no ensino e aprendizagem, das quais destacamos: o sistema educativo tem priorizado, em geral, processos de construção e avaliação formais, assim como aspectos algorítmicos em que os estudantes derivam, integram e calculam limites, mas não são capazes de dar um sentido mais amplo às noções envolvidas e revelam somente os aspectos mais essenciais e elementares presentes na construção dos conceitos (JUNQUEIRA, 2014; VRANCKEN; ENGLER, 2014); há baixo rendimento dos estudantes que ingressam no primeiro ciclo do ensino superior e, para superar as dificuldades, são necessárias práticas educativas que levem em conta as construções mentais que um estudante deve fazer para entender os conceitos matemáticos (VEGA; CARRILLO; SOTO, 2014) e abordagens de ensino que favoreçam a apreensão dos conceitos (IGLIORI, 2009); os estudantes, futuros professores, exibem dificuldades na resolução de tarefas relacionadas a distintas interpretações da derivada: inclinação da reta tangente, taxa de variação instantânea e velocidade (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015); os alunos têm dificuldades em relacionar os modos de representação analítico e gráfico da função e suas derivadas (PINTO; VIANNA, 2012; SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2013), entre outras. Algumas dessas dificuldades também são notadas em cursos de formação continuada, nos quais se observa que, mesmo os alunos que já estudaram os conceitos do Cálculo em disciplinas na graduação, apresentam sérios problemas em relação à compreensão do conceito, à interpretação e à representação analítica e gráfica da derivada (BISOGNIN; BISOGNIN, 2011).

No entanto, a utilização de enfoques teóricos, como a teoria APOS, que permite entender o processo de aprendizagem por meio das construções mentais desenvolvidas pelos estudantes, tem favorecido a compreensão do conceito da derivada. O estudo desenvolvido por Asiala et al. (2001), com dois grupos de estudantes, mostra que os alunos que tiveram aulas tendo como base a análise teórica do modelo cognitivo APOS, obtiveram melhores resultados no entendimento da compreensão gráfica de uma função e sua derivada quando comparados àqueles cujas aulas seguiram o método tradicional.

Além do mais, a utilização do contexto histórico no ensino da Matemática tem servido para pesquisadores como motivação para o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos. No ensino superior, pesquisas que tratam do ensino de Cálculo destacam alguns benefícios de trabalhar com o contexto histórico e epistemológico no ensino: a abordagem histórico-epistemológica demonstrou ser uma solução eficaz para que os alunos tivessem mais do que um aprendizado mecânico sobre os conceitos do Cálculo (BARROSO, 2009); o estudo do contexto histórico possibilitou entender a evolução das ideias, dos acertos e erros cometidos durante séculos (GRANDE, 2013); alguns dos obstáculos observados ao longo do desenvolvimento histórico também foram identificados em sala de aula quando do desenvolvimento de situações didáticas (ZUCHI, 2005), e a abordagem da história da Matemática foi adequada para problematizar os fundamentos e o ensino de Cálculo Diferencial (BRITO; CARDOSO, 1997), entre outros.

Para D'Ambrosio (1989), esta linha de trabalho parte do princípio de que "o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo trabalhado" (p. 18). Muitas vezes, as dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem são as mesmas dificuldades que foram observadas ao longo da história.

Ao prefacear o livro de Beltran, Saito e Trindade (2010), Goldfard enfatiza que "conhecer as ciências em seus contextos históricos enriquece a compreensão conceitual, motiva estudantes e agrega ao aprendizado prazer e curiosidade" (p. 7). A história da ciência como parceira do ensino de ciências, e particularmente da matemática, tem ganhado, a cada ano, presença, relevância e interesse por todos os que estão preocupados com a melhoria da aprendizagem dos estudantes em todos os níveis, fundamental, médio e superior.

Acreditamos que o uso de teorias e metodologias diferenciadas em sala de aula, em que o aluno trabalha com os conceitos e resolve problemas partindo das construções históricas e tendo a possibilidade de reflexionar sobre suas ações e discuti-las, em um trabalho com colegas e professores, propicia um ambiente favorável à compreensão de conceitos e teorias que estão sendo trabalhados sobre determinado conhecimento matemático.

Nesse sentido, o presente estudo, que se refere a um recorte da pesquisa de doutorado da primeira autora, tem como objetivo analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática de uma instituição comunitária do Rio Grande do Sul, levando em conta as construções históricas do conceito. Para tanto, utilizamos o modelo cognitivo APOS para a elaboração e implementação de atividades que permitem analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão do conceito da derivada.

Referencial teórico

O referencial teórico usado neste estudo é a teoria APOS, a qual tem como base os mecanismos mentais de interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade, que possibilitam a compreensão de um conceito matemático por meio da construção de estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema (ARNON et al., 2014).

Desenvolvida por Ed Dubinsky e seus colaboradores, a teoria APOS trata do estudo dos processos pelos quais o conhecimento matemático em nível universitário é construído e da descrição da natureza das entidades cognitivas construídas nesses processos. A teoria APOS toma como ponto de partida as ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante para descrever a construção de objetos mentais relacionados a objetos matemáticos específicos. Para Dubinsky (1991), a partir de situações matemáticas, os alunos são encorajados à construção dos objetos matemáticos, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constituem para resolver determinada situação. Assim, os esquemas mentais dos alunos evoluem à medida que novos esquemas são formados e nos quais o conhecimento matemático cresce.

Um esquema corresponde à totalidade de conhecimento que um indivíduo tem sobre um determinado conceito matemático. Assim, um indivíduo poderá ter, por exemplo, um esquema de gráfico, um esquema de função, um esquema de derivada. Os esquemas devem ser coordenados para formar estruturas que serão utilizadas na resolução de problemas matemáticos.

De acordo com Arnon et al. (2014), a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas.

Para analisar a compreensão de um conceito, introduz-se a ideia de decomposição genética, que consiste na descrição das estruturas e mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico (ARNON et al., 2014). A experiência dos pesquisadores no ensino e aprendizagem, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e pesquisas publicadas anteriormente servem de base para a elaboração da decomposição genética.

Em nosso estudo, buscamos, com base na decomposição genética, desenvolver atividades que envolvem, além do conceito da derivada estudado atualmente, alguns problemas históricos que motivaram o desenvolvimento do conceito como forma de promover os mecanismos de abstração reflexionante e fazer com que os estudantes compreendam como o conceito se desenvolveu ao longo dos tempos.

Metodologia

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), em que empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (ARNON et al., 2014): Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados.

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética tendo como base a compreensão matemática do conceito de derivada e as construções históricas, as pesquisas de Asiala et al. (2001), García, Gavilán e Llinares (2012) e Vega, Carrillo e Soto (2014) e livros didáticos de Cálculo, a qual descrevemos no que segue.

Ao iniciar os estudos, é desejável que o aluno tenha como pré-requisitos conhecimentos sobre o valor de uma função em um ponto, a representação gráfica de uma função, as operações entre funções, a inclinação da reta que passa por dois pontos, a sua equação e a representação geométrica e a velocidade média de um objeto.

A construção do esquema da derivada se inicia a partir do esquema de função em que o estudante deve desenvolver ações de substituir os valores da função em pontos específicos e calcular a variação da função e a razão das variações. Essas ações devem ser interiorizadas em um processo, ao considerar o limite da razão incremental, para obter o conceito de derivada. Esse processo deve ser coordenado para obter a derivada por meio do limite e encontrar a derivada de funções, utilizando regras de derivação.

Com a encapsulação desse processo, obtém-se a definição do objeto cognitivo – a derivada da função $\boldsymbol{f}$ no ponto $\boldsymbol{a}$ e a função derivada $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$. O aluno deverá generalizar o conceito de derivada para qualquer função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Utilizando os pré-requisitos, o aluno deverá coordenar as diversas interpretações de $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{a})$, como inclinação da reta tangente no ponto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$, como velocidade no instante $\boldsymbol{a}$ ou como taxa instantânea de variação de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{a}$. O objeto função derivada pode ser entendido como uma classe de objetos constituída por todas as derivadas das funções em cada ponto do domínio. Nesses objetos, podem ser realizadas novas ações, como o cálculo da derivada segunda.

A construção do esquema da derivada se constitui na coleção de todas as ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema, utilizando o conceito de derivada. Assim, a interiorização das ações necessárias para entender o processo da derivada, a coordenação das diversas interpretações da derivada, a encapsulação do processo da derivada, a coordenação e a generalização do esquema da função com sua derivada, aplicando o esquema da derivada em contextos distintos, a reversibilidade do processo, em que, conhecendo as características do objeto derivada, é possível obter as propriedades da função (crescente, decrescente, concavidade, pontos de máximo e mínimo), são mecanismos mentais de abstração reflexionante indispensáveis para construir o esquema da derivada.

Na etapa de Planejamento e implementação, elaboramos seis atividades que tratam de problemas históricos associados à determinação de tangentes, de fluxões e de diferenciais e que abordam a formalização do conceito clássico da derivada por meio do limite da razão incremental, além da interpretação da derivada como inclinação da reta tangente e como velocidade instantânea, tendo como base livros de história do Cálculo (BARON; BOS, 1985; BOYER, 1993) e livros texto de Cálculo.

Apresentamos as atividades propostas e uma descrição das construções mentais a serem efetivadas pelos estudantes quando da realização das atividades.

Atividade 1 – O problema das tangentes

As primeiras tentativas de traçar tangentes a curvas foram realizadas pelos gregos. Euclides, em seu *Elementos*, definiu a tangente a um círculo. Apolônio de Perga (262-190 a.C.) trabalhou o traçado de tangentes e normais às cônicas. Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) se inspirou na cinemática para traçar uma tangente à sua espiral. O método arquimediano atravessou séculos, sendo usado por Gilles Personne de Roberval (1602-1675), em 1638, e por Evangelista Torricelli (1608-1647), em 1644, para traçar tangentes à cicloide e a outras curvas. Entretanto, mesmo que esse método tenha resolvido alguns problemas não tratados pelo conceito euclidiano de tangente, o mesmo não se aplicava a outras curvas que nada tinham a ver com o movimento, sendo assim necessário encontrar novos métodos de traçar tangentes a curvas, cujo conceito fosse puramente matemático e não físico, como o arquimediano. O surgimento da Geometria Analítica, no século XVII, com a introdução das coordenadas cartesianas por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1655), fez com que fosse possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e utilizar equações e símbolos algébricos para descrever curvas, proporcionando, desta forma, um contínuo progresso no desenvolvimento do conceito de função, derivada, integral e outros tantos tópicos relacionados ao Cálculo.

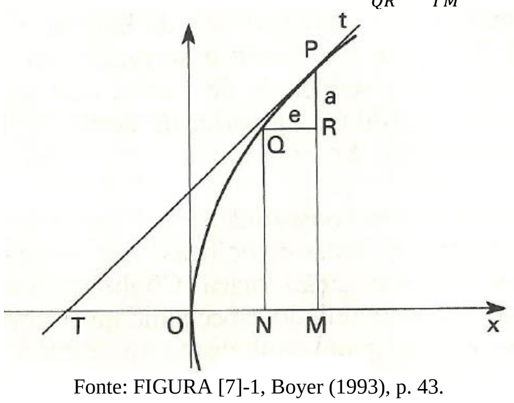
Na Atividade 1, foi solicitado aos estudantes, o desenho de uma circunferência e de uma reta tangente a um ponto nesta circunferência e a indicação de quais retas são tangentes ao gráfico das funções apresentadas. Os alunos deveriam ainda responder às questões:

- Como você define reta tangente a uma circunferência num ponto?
- Como você define reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado?

Essa atividade tem como objetivo verificar se o aluno compreende a diferença entre os conceitos de reta tangente a uma circunferência e de reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado. Também é necessário que o aluno utilize o mecanismo mental de generalização do conceito de reta tangente passando da concepção euclidiana (reta tangente à circunferência) para a concepção cartesiana (reta tangente a qualquer curva).

Atividade 2 – Barrow e a reta tangente

O método de Barrow para a determinação de tangentes a curvas foi extremamente significativo para o desenvolvimento posterior do Cálculo. Seu método publicado em 1669 em *Lectures on Optics and Geometry* faz uso do triângulo diferencial, às vezes chamado de triângulo de Barrow. Para construir a tangente t à curva no ponto P, Barrow determinava outro ponto T em t, do seguinte modo: Seja Q um ponto da curva; então como P e Q são pontos vizinhos, ΔPTM e ΔPQR são praticamente semelhantes, em especial quando o triângulo menor torna-se infinitamente pequeno, de modo que podemos escrever $\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$ (aproximadamente).



Fonte: FIGURA [7]-1, Boyer (1993), p. 43.

Ao indicar as coordenadas de P e Q, respectivamente por (x, y) e $(x - e, y - a)$, e substituir esses valores na equação da curva dada e desprezar os termos que envolvem potências de a e e de expoentes maiores que 1, podemos achar a razão $\frac{a}{e}$. Como M é um ponto conhecido, podemos agora achar T, sobre o eixo dos x usando o comprimento do segmento TM, dado por $y\frac{e}{a}$, o que é uma consequência direta da relação $TM = MP\frac{QR}{RP}$.

Na Atividade 2, os alunos deveriam seguir os passos indicados pelo método de Barrow para determinar a reta tangente à parábola $y^2 = 2x$ no ponto $P(1,2)$, além de relacionar o valor obtido para $\frac{a}{e}$ com a derivada y'. Para tanto, deveriam responder às questões:

- Que expressão você obtém quando substitui as coordenadas de $Q(x - e, y - a)$ na equação $y^2 = 4x$? Observe que isso pode ser feito, já que Q está na curva.

- Sendo a suficientemente próximo de zero (digamos 0,01), podemos desprezar o termo a^2. Qual é a expressão obtida para $\frac{a}{e}$?
- Se P é o ponto de coordenadas $(1,2)$ de $y^2 = 4x$, qual é o comprimento de TM? Quais são as coordenadas do ponto T?
- Qual é a equação da reta tangente à parábola $y^2 = 4x$ no ponto $P(1,2)$?
- Qual é a derivada y' em que $y^2 = 4x$? Compare o resultado encontrado com o valor $\frac{a}{e}$. O que você observa?

O objetivo desta atividade é que o aluno realize ações e processos para a obtenção, de acordo com as ideias de Barrow, da equação da reta tangente à parábola $y^2 = 4x$ no ponto $P(1,2)$ e que utilize o esquema da derivada ao relacionar o valor obtido para $\frac{a}{e}$ com a derivada y'.

Atividade 3 - Teoria das fluxões

Newton desenvolveu seu Cálculo - a Teoria das Fluxões, como instrumento auxiliar para suas pesquisas sobre mecânica. Para ele, o movimento era a base fundamental para o estudo de curvas e de outros tópicos relacionados ao Cálculo. Em sua teoria, publicada em 1736 no *De Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, utilizava os conceitos de "fluentes" e "fluxões". Fluentes são as quantidades que fluem (quantidades que se modificam). É o que hoje em dia chamamos de variáveis. Fluxões são as velocidades com que fluem; é o que chamamos de derivadas. Para Newton, derivada é uma velocidade de fluência. A velocidade horizontal e vertical são as fluxões de x e y associadas ao fluxo do tempo. A razão entre as velocidades de y e x em qualquer ponto (x, y) de uma curva, definia a tangente nesse ponto. Para a operação inversa (integração, na linguagem atual), a tarefa era apenas encontrar os fluentes para as fluxões dadas. Newton usou a notação $\dot{x}$ para representar a fluxão de x.

Em sua versão de 1669 para o Cálculo, Newton encontrou a inclinação da curva $x^3 - abx + a^3 - cyy = 0$, utilizando p e q como símbolos para taxas de variação (velocidades ou fluxões) de x e y. Para isso, substituiu x por $x + po$ e y por $y + qo$ na equação e, da equação assim obtida, subtraiu a equação original, dividiu por o e desprezou todos os termos que ainda continham o (visto que estes eram "infinitamente pequenos"). Assim, ele obteve a razão $\frac{q}{p}$, que hoje chamamos de inclinação da reta tangente. Mais tarde, no *De Quadratura*, publicado em 1704, Newton substituiu p e q pelas letras "ponteadas" $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e primeiro determinava a razão $\frac{q}{p}$ dos fluxos (ou $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$) e então fazia com que o o desaparecesse, para determinar assim o que ele chamou de "primeira e última razões" (o que seria chamado mais tarde de "limite da razão").

Na Atividade 3, inicialmente, os alunos deveriam utilizar o processo de derivação newtoniano para a função $y = x^3$ para determinar as fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e obter $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, e usar o conceito de "primeira e última razões" para encontrar a inclinação da curva $x^3 - abx + a^3 - cyy = 0$. Após, deveriam reconhecer, nas expressões obtidas, a derivada da função $y = x^3$ e a derivada da função y definida implicitamente pela equação $x^3 - abx + a^3 - cyy = 0$. Observamos que, nessa atividade, há a exigência de conhecimento sobre a derivada de funções de uma variável e de derivadas parciais. Nessa atividade, o objetivo é que o aluno desenvolva ações para a determinação das fluxões e das "primeira e última razões" para, após, com a interiorização dessas ações e com a generalização, relacionar o que foi determinado com o esquema da derivada.

Atividade 4 – O cálculo de Leibniz

Leibniz utilizou uma fundamentação bem diferente de Newton. Em vez de estudar o movimento para se chegar aos conceitos de derivada e integral, ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos e introduziu a notação de diferencial dx e dy para esses valores sucessivos.
Em seus estudos sobre o cálculo de áreas, Leibniz utilizou o símbolo $\int$ para representar a soma das áreas dos retângulos pequenos e o símbolo d para denotar a diferenciação como operação inversa da quadratura (área) de figuras planas. Também demonstrou que a melhor maneira de encontrar tangentes a curvas é obter $\frac{dy}{dx}$, em que dy e dx são as diferenças e $\frac{dy}{dx}$ representa um quociente.
Usando o símbolo d, Leibniz demonstrou as regras de operação de d e fez aplicações de seu método para demonstrar como calcular tangentes, máximos e mínimos ($dv = 0$); concavidade, convexidade e pontos de inflexão ($ddv = 0$) para diversas curvas. Foi Leibniz que, em 1714, usou a palavra função para representar quantidades que dependem de uma variável.
No primeiro artigo, publicado em 1684, no jornal *Acta eruditorum*, Leibniz justificou as regras simples de derivação, de maneira rude e numa linguagem que lembra as quantidades infinitamente pequenas de Newton.
Para achar a diferencial de xy, Leibniz substitui x por $x + dx$ e $y + dy$ sendo dx e dy as diferenciais, ou diferenças infinitamente pequenas, de x e y. A diferença $(x + dx) \cdot (y + dy) - xy$ representa a diferença infinitamente pequena no produto, ou seja, $d(xy)$, correspondente às diferenças infinitamente pequenas em x e y.

Na Atividade 4, solicitava-se que os estudantes utilizassem o método de Leibniz para encontrar as diferenciais $d(xy)$, $d(x^2)$ e $d(x^3)$ e observassem, nos resultados obtidos, para as diferenciais de x^2 e de x^3, a presença da derivada de $y = x^2$ e de $y = x^3$. Nessa atividade, os alunos deveriam realizar ações para obter as diferenciais e utilizar do esquema da derivada para observar que, nas diferencias de Leibniz, estão presentes as derivadas das funções consideradas.

Atividade 5 – Razão da variação incremental

Foi Cauchy quem deu ao Cálculo o caráter que tem hoje. No Cálculo de Cauchy, os conceitos de função e limite de função eram fundamentais. No *Résumé des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal*, publicado em 1823, Cauchy escreveu:
"Se a função for contínua entre dois limites dados da variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que $\Delta x = i$, os dois termos da razão das diferenças $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, enquanto esses dois termos aproximar-se-ão indefinidamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo. Esse limite, quando existe, tem um valor definido para cada valor específico de x".
Escreveu ainda: "(...) a forma da nova função que serve como limite da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função inicial $y = f(x)$. Indicamos essa dependência nomeando a nova função de função derivada, designando-a pelo uso de um apóstrofo na notação: y' ou $f'(x)$".

Na Atividade 5, os alunos deveriam completar uma tabela com os valores da variação $f(x + i) - f(x)$ e da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, para a função $f(x) = x^2$ e o valor específico $x = 3$, considerando valores de i fornecidos na tabela e responder aos seguintes questionamentos:

- O que você observou nos valores de $f(x + i) - f(x)$?
- O que você observou nos resultados correspondentes aos valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$?
- Qual é a derivada de f em $x = 3$?

Ainda, os alunos deveriam determinar a variação $\Delta y = f(x + i) - f(x)$ e a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ para $\Delta x = i$ e x qualquer, tomar $\Delta x = i$ suficientemente pequeno e responder:

- Qual foi a função obtida?
- Este resultado é conhecido para você? O que ele representa?

O objetivo dessa atividade é que o aluno utilize ações e processos para obter, por meio do limite da razão incremental, a derivada da função de $f(x) = x^2$ em $x = 3$ e a função derivada e depois relacione os resultados obtidos com o objeto derivada de uma função no ponto e a função derivada.

Atividade 6 – Inclinação da reta tangente, velocidade instantânea e função derivada

Inclinação da reta tangente - Qual é a equação da reta tangente à parábola $y = \sqrt{x}$ no ponto $P(1,1)$? Represente geometricamente.   **Velocidade instantânea** - A posição de uma partícula é dada pela equação do movimento $s = f(t) = \frac{1}{1+t}$, em que t é medido em segundos e s, em metros. Encontre a velocidade instantânea após 2 segundos.   **Função derivada** - Seja $f(x) = x^3 - x$. Use a definição de derivada para encontrar a função $f'(x)$.

Na Atividade 6, os alunos deveriam utilizar o limite da razão incremental para determinar a inclinação da reta tangente à parábola $y = \sqrt{x}$ no ponto $P(1,1)$, a velocidade instantânea em $t = 2$ de uma partícula com posição dada por $s = \frac{1}{1+t}$ e encontrar a função derivada de $f(x) = x^3 - x$. Nessa atividade, o objetivo é que o aluno desenvolva ações e processos ao substituir a função dada em pontos específicos e utilize o processo de interiorização para, por meio do processo de limite, obter os objetos matemáticos: derivada de uma função num ponto e função derivada. Além disso, é necessário que o aluno coordene as interpretações da derivada como inclinação da reta tangente e como velocidade instantânea.

Essas seis atividades foram desenvolvidas em sala de aula, seguindo como metodologia de ensino o ciclo de ensino ACE composto pelas três componentes: (A) Atividades; (C) Discussão em classe e (E) Exercícios (ARNON et al., 2014).

A coleta de dados se deu por meio do desenvolvimento das atividades, em sala de aula, em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo.

Os participantes desta pesquisa são cinco estudantes de um curso de mestrado, de um programa de pós-graduação em ensino de Matemática, de uma universidade comunitária do Rio Grande do Sul, licenciados em Matemática. Todos os estudantes aceitaram participar da pesquisa e assinaram o termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

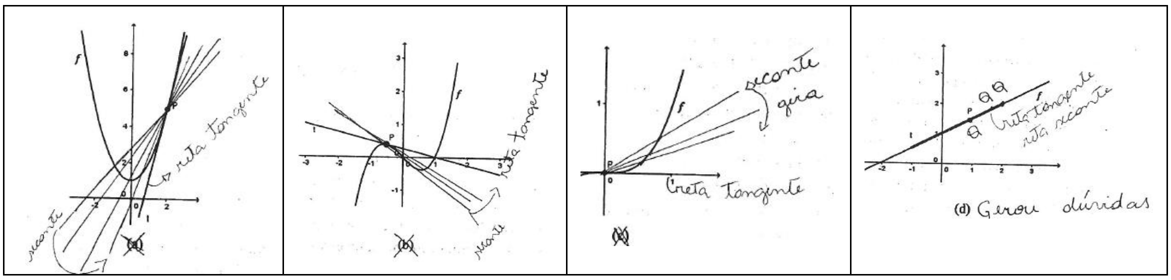
Análise dos dados e resultados

A análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas e das anotações no diário de campo, em que procuramos verificar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética.

A fim de exemplificar como se deu a compreensão do conceito de derivada, tendo por base as construções históricas e o desenvolvimento das estruturas mentais previstas na decomposição genética, apresentamos a trajetória individual de um dos estudantes em que descrevemos a forma como o aluno resolveu cada uma das atividades e as construções mentais desenvolvidas por ele. Em Rachelli (2017) encontra-se a análise de todos os dados da pesquisa.

Na Atividade 1, o estudante definiu reta tangente a circunferência como: "A reta que tangencia a circunferência em um ponto". Ao indicar quais retas são tangentes no ponto P ao gráfico das funções apresentadas (Figura 1), o aluno representou, nos gráficos (a), (b) e (c), retas secantes que passam pelo ponto P e que se aproximam da reta tangente.

Figura 1 – Reta tangente ao gráfico da função f no ponto P



Fonte: Dados da pesquisa.

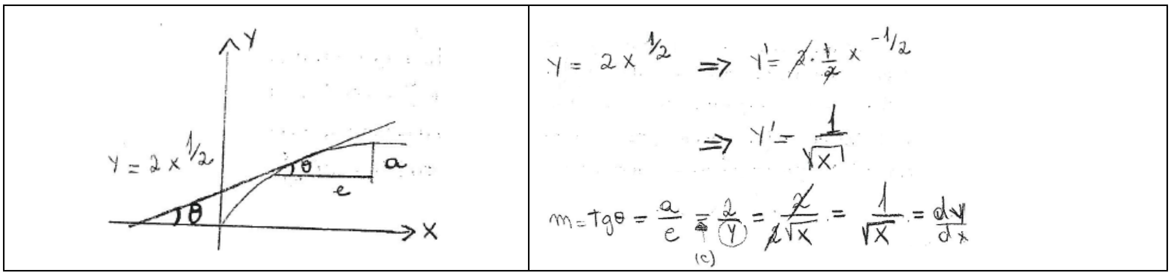
Cabe salientar que, em (b), a reta t corta a curva em outro ponto do gráfico de f; em (c), por ser P um ponto de inflexão, a reta t cruza o gráfico de f e, em (d), a reta tangente coincide com a própria curva. Somente em (a) a reta t tangencia o gráfico em um único ponto.

Embora no gráfico (d) o aluno tenha ficado em dúvida, há evidências de que ele utilizou o mecanismo mental de generalização ao compreender o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto, passando da concepção euclidiana que define reta tangente à circunferência, para a concepção cartesiana em que é possível definir reta tangente a qualquer curva utilizando a definição da reta tangente como o limite das retas secantes. Além disso, o aluno definiu reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado como: “A reta tangente é a reta limite da secante”. Acreditamos que, nesta atividade, o aluno interiorizou ações e processos que possibilitarão a compreensão do processo de obtenção do coeficiente angular da reta tangente por meio do limite da razão incremental.

Na Atividade 2, o aluno desenvolveu ações e processos ao aplicar o método de Barrow para a obtenção da reta tangente à parábola $y^2 = 4x$ no ponto $P(1,2)$. O aluno seguiu os passos estabelecidos em cada uma das questões e utilizou o esquema da equação da reta determinada pelos pontos P e T, para obter a equação $y = x + 1$ da reta tangente ao gráfico da parábola no ponto P. Ao comparar o resultado encontrado para o valor $\frac{a}{e}$ com a derivada $\frac{dy}{dx}$ em que $y^2 = 4x$, o aluno demonstra ter utilizado a estrutura mental objeto para o conceito da derivada. Como podemos observar na Figura 2, o aluno considerou $y = 2x^{\frac{1}{2}}$, que corresponde ao ramo da parábola com $y \geq 0$ e que contém o ponto $P(1,2)$ e utilizou regras de derivação para obter $\frac{dy}{dx}$. Após, comparou os resultados obtidos para concluir que $\frac{a}{e} = \frac{dy}{dx}$.

Além do mais, o aluno utilizou regras da potência e multiplicação por escalar para obter a derivada y' e observou ainda que o valor $\frac{a}{e}$ está associado ao coeficiente angular da reta tangente, o que nos fornece evidências de construção mental de conhecimento geométrico e analítico a respeito da derivada e de sua interpretação geométrica.

Figura 2 – Método de Barrow e a derivada



Fonte: Dados da pesquisa

No cálculo das fluxões na Atividade 3, o aluno mostra desenvolver ações ao substituir y por $y + \dot{y}o$ e x por $x + \dot{x}o$ na equação $y = x^3$, dividir pelo infinitésimo o, para após considerar $o = 0$, e concluir, de acordo com o processo de derivação newtoniano, que $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$, conforme pode ser observado na Figura 3. Ao ser questionado sobre o que representa a expressão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, o aluno respondeu: “Representa a derivada de $y = x^3$”, o que evidencia a utilização do esquema da derivada ao coordenar a derivada da função $y = x^3$ com o cálculo das fluxões.

Figura 3 – Cálculo das fluxões

$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^3$ $y + \dot{y}o = x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3$ $\cancel{y} + \dot{y}o = \cancel{x^3} + 3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3$ $\dot{y}o = 3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3$	$\frac{\dot{y}o}{o} = \frac{3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3}{o}$ $\dot{y} = 3x^2\dot{x} + 3x(\dot{x})^2 0 + (\dot{x})^3 0.0$ $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na determinação da inclinação da curva $x^3 - abx + a^3 - cyy = 0$, o aluno seguiu os passos estabelecidos para o cálculo das "primeiras e últimas razões" de Newton e obteve o valor $\frac{q}{p} = \frac{3x^2 - ab}{2cy}$. Porém, mesmo com as discussões em classe em que foi retomada a definição da derivada de uma função $y = y(x)$, dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, o aluno não interiorizou ações e processos para observar que a expressão $\frac{q}{p}$, que representa a inclinação da curva $x^3 - abx + a^3 - cyy = 0$, pode ser obtida por meio da derivada $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/_{\partial x}}{\partial f/_{\partial y}}$, sendo $f(x, y) = x^3 - abx + a^3 - cy^2$. Isso demonstra que o esquema das derivadas parciais, utilizado para achar a derivada de funções definidas implicitamente, não foi compreendido pelo aluno, visto que ele somente escreveu que a razão $\frac{q}{p}$ poderia ser obtida "Através da derivada parcial", sem efetuar os cálculos para confirmar o que foi obtido.

Para a Atividade 4, o aluno seguiu as orientações e determinou as diferenciais $d(x^2)$ e $d(x^3)$, conforme ilustrado na Figura 4. Porém, ao ser questionado sobre o que representa cada uma das expressões $d(x^2)$ e $d(x^3)$, o aluno não identificou, em cada uma das diferenciais de Leibniz, a diferencial $dy = f^{'}(x)dx$ para $y = x^2$ e $y = x^3$, ou seja, não houve coordenação do resultado obtido no cálculo das diferenciais de Leibniz com o objeto derivada das funções $y = x^2$ e $y = x^3$. O aluno somente escreveu: "O resultado dá a derivada". Isso poderia ter sido feito pelo simples cálculo da derivada de potências.

Figura 4 – Cálculo das diferenciais

$d(x^2) = (x + dx).(x + dx) - xx$
$d(x^2) = \cancel{x^2} + 2xdx + dx^2 - \cancel{x^2})$
$d(x^2) = 2xdx + \cancel{dx^2} \to 0$
$d(x^2) = 2x\,dx$

$d(x^3) = (x + dx).(x + dx).(x + dx) - x.x.x$
$d(x^3) = \cancel{x^3} + 3x^2dx + 3x\cancel{(dx)^2} + (dx)^3 - \cancel{x^3}$
$d(x^3) = 3x^2dx$

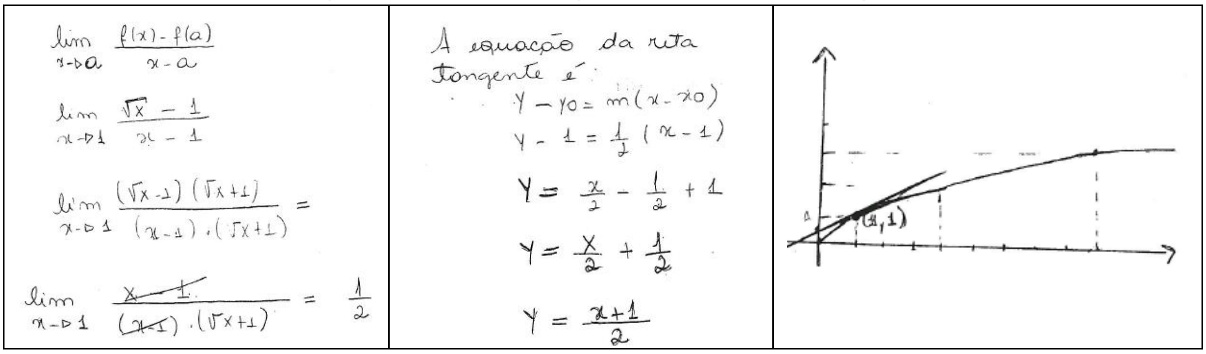
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Atividade 5, o aluno seguiu os passos de Cauchy para a função $f(x) = x^2$, o aluno fez os cálculos solicitados e observou que "Os valores de i são infinitamente pequenos, tendem para zero"; e que os valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ "estão tendendo para 6", além de observar que a derivada $f^{'}(x) = 2x$ para $x = 3$ é igual a 6, ou seja, coincide com o limite da razão incremental estabelecido por Cauchy.

Ao determinar o valor de $\Delta y = f(x + i) - f(x) = 2xi + i^2$ e da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + i$, considerando $\Delta x = i$ e x quaisquer, o aluno concluiu que o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fica igual a $2x$, quando o valor de i for considerado infinitamente pequeno. Além disso, o aluno observou que esse valor representa a derivada da função $f(x) = x^2$. Aqui, há evidências de que o aluno desenvolveu ações e processos para obter $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e, ao considerar o valor limite quando $\Delta x = i$ torna-se infinitamente pequeno, coordenou a expressão encontrada com a função derivada f'.

Na Atividade 6, para determinar a equação da reta tangente à parábola $y = \sqrt{x}$ no ponto $P(1,1)$, o estudante utilizou o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para o coeficiente angular da reta (Figura 6)

Figura 6 – Coeficiente angular e equação da reta tangente

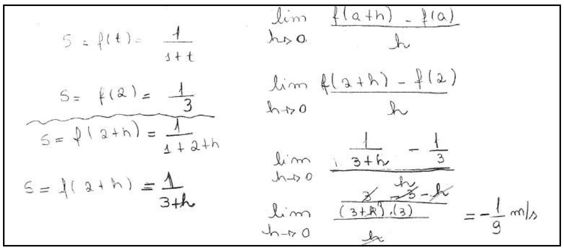


Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar que o aluno desenvolveu ações sugeridas pela decomposição genética para determinar o coeficiente angular e a equação da reta tangente e fazer a representação gráfica das funções. Ao ser questionado sobre o que representa o coeficiente angular da reta tangente dado pelo limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, o aluno evidencia ter encapsulado o objeto derivada $f'(a)$, pois sua resposta é: “Representa a derivada de f em a”.

Para determinar a velocidade instantânea após 2 segundos de uma partícula cuja posição é dada pela equação do movimento $s = f(t) = \frac{1}{1+t}$, o aluno utilizou o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ e substituiu o valor de f em 2 e em $2+h$ para, após, calcular a variação da posição e a razão das variações; interiorizou essas ações no processo do cálculo do limite da razão incremental para obter a velocidade instantânea igual a $-\frac{1}{9}$ m/s (Figura 7).

Figura 7 – Cálculo da velocidade instantânea

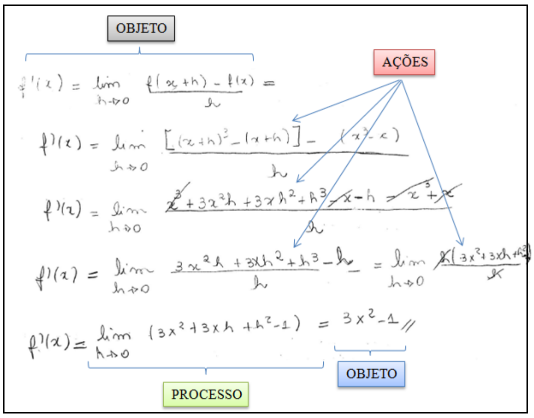


Fonte: Dados da pesquisa.

Da mesma forma, ao ser questionado sobre o que representa a velocidade instantânea dada pelo limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, novamente o aluno evidencia ter encapsulado o objeto derivada $f'(a)$, pois sua resposta é: “Representa a derivada de f em a”.

Para encontrar a função derivada de $y = x^3 - x$, o aluno realizou ações ao substituir a função em x e em $x+h$ e processos para determinar a variação $f(x+h) - f(x)$ e a taxa média de variação $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para, após, por meio da interiorização dessas ações, tomar o limite quando h tende a zero, para obter o objeto matemático função derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$. As estruturas mentais podem ser observadas na Figura 8.

Figura 8 – Função derivada e estruturas mentais utilizadas



Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme podemos observar, o aluno utilizou os pré-requisitos e desenvolveu todas as construções mentais previstas na decomposição genética para o conceito da derivada: ações de substituir a função em pontos específicos e calcular a razão das variações e interiorização dessas ações em um processo, ao considerar o limite da razão incremental, para obter a derivada da função indicada.

Assim, os dados obtidos com a descrição das atividades resolvidas pelo estudante, com a análise dos registros de todos os estudantes participantes desta pesquisa e das anotações do diário de campo, possibilitam-nos obter os seguintes resultados:

- Todos os estudantes tiveram certa dificuldade ao definir reta tangente ao gráfico de uma função num ponto. Nenhum dos alunos mencionou que “a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é a reta de equação $y - f(a) = m(x-a)$, em que $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sempre que existir o limite” (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2009, p. 165). O que observamos é que os alunos utilizaram apenas a ideia intuitiva ao responderem, por exemplo, que “A reta tangente é a reta limite das retas secantes”.

- Os estudantes utilizaram os mecanismos de interiorização e encapsulação, demonstrando desenvolver estruturas mentais de ação, processo e objeto para a obtenção do coeficiente angular da reta tangente, da velocidade instantânea e da função derivada. Além disso, eles utilizaram mecanismos de coordenação nas interpretações da derivada de uma função no ponto.
- O trato com os problemas históricos possibilitou aos estudantes compreender o processo gradativo de construção do conhecimento sobre a derivada, pois eles foram capazes de reconhecer, por exemplo, no problema das tangentes de Barrow, nas fluxões de Newton e no limite da razão incremental de Cauchy, a derivada da função.
- A decomposição genética, uma das principais ferramentas usadas na pesquisa baseada em APOS (ARNON el al., 2014), foi fundamental em nosso estudo, pois serviu como guia para a elaboração de atividades que permitiram aos estudantes o desenvolvimento de estruturas cognitivas, além de nos fornecer um meio de analisar se as construções mentais foram realizadas pelos estudantes.
- Dificuldades foram observadas durante o desenvolvimento da pesquisa e dizem respeito, principalmente, ao cálculo algébrico nos processos de limite, a representação gráfica de funções e em justificar e expressar corretamente suas ideias com a linguagem escrita. Algumas dessas dificuldades já haviam sido identificadas em outros estudos (PINTO; VIANNA, 2012; SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2013; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015). Porém, assim como na pesquisa de Vega, Carrilo e Soto (2014), apesar destas dificuldades, foi possível verificar que os alunos foram capazes de relacionar conceitos e integrar o conceito de derivada com outros esquemas.
- A resolução de problemas históricos que geraram o conceito da derivada foi um dos fatores que despertou interesse e contribuiu para compreensão do conceito de derivada pelos estudantes. Entendemos que o trato com o contexto histórico e epistemológico se constitui um meio eficaz para o ensino de conceitos matemáticos, conforme destacam Luccas e Lucas (2012), fazendo com que os estudantes compreendessem problemas que deram origem e que levaram a formalização do conceito de derivada**.**

Entendemos, assim, que as escolhas teóricas e metodológicas permitiram alcançar o objetivo desta pesquisa, que foi analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática, levando em conta as construções históricas do conceito e a teoria APOS como referencial teórico e metodológico.

Considerações finais

Apresentamos, aqui, resultados de uma pesquisa em que foi utilizada a teoria APOS como aporte teórico e metodológico. Partindo de problemas associados às construções históricas, os estudantes desenvolveram ações e processos para a resolução desses problemas, coordenando os resultados obtidos com o objeto derivada de uma função. Também resolveram problemas associados ao conceito formal da derivada e a interpretação da derivada como coeficiente angular da reta tangente e como velocidade instantânea.

O ciclo de ensino ACE, proposto como metodologia de ensino pela teoria APOS, proporciona uma forma diferente de trabalho em sala de aula, que foge da aula tradicional. Neste estudo, a discussão dos conteúdos e a resolução de exercícios com o acompanhamento da professora pesquisadora em um trabalho colaborativo com os colegas, fez com que os estudantes pudessem expressar os conceitos anteriormente construídos, as dificuldades e os erros e o entendimento de novos conceitos. Ao exporem suas ideias, observamos que os estudantes reflexionaram sobre o conhecimento tratado e estabeleceram novas relações com os conceitos anteriormente construídos que lhes permitiram criar novas ações, processos, objetos e esquemas para a assimilação do esquema da derivada. A resolução de atividades serviu para que os alunos reforçassem essas construções. Assim, por exemplo, o trato com os esquemas de funções, equação da reta, gráficos e razões, permitiu aos estudantes o desenvolvimento de mecanismos mentais de abstração reflexionante e a construção de estruturas mentais que favoreceram a compreensão do conceito de derivada e suas interpretações.

Com os resultados obtidos, acreditamos ser esta uma possibilidade de trabalho em sala de aula que poderá proporcionar uma melhoria no ensino de Cálculo. Os resultados evidenciam razões para que investigações futuras que tratem do ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos no ensino superior sejam realizadas.

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo.** v. 1, 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

ARNON, I. et al. **APOS Theory:** A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014.

ASIALA, M. et al. **The development of students’ graphical understanding of the derivative**.

Research in Collegiate Mathematics Education, p. 1-37, 2001. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/SlopeStudy.pdf.> Acesso em: 5 mar. 2016.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de J. R. Braga Coelho, R. Maier e M. J. M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARROSO, N. M. C. **Um modelo de ensino dos conceitos de Cálculo para os cursos de Engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da Engenharia Didática:** validação por meio do conceito de integral. 2009. 147 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Orgs). **História da Ciência.** Tópicos atuais. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BISOGNIN. E.; BISOGNIN, V. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo (SP), v. 13, n. 3, p. 509-526, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação.** Porto: Porto, 1994.

BOYER, C. B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo**. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1993.

BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas. **Zetetiké,** Campinas (SP), v. 5, n. 7, p. 129-144, 1997.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates SBEM,** II, n. 2, p. 15-19, 1989.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking**.** In: TALL, D. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GARCÍA, M.; GAVILÁN, J. M.; LLINARES, S. Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor**. Enseñanza de las Ciencias**, n. 30.3, p. 219-236, 2012.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.** 2013. 324 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Org.) **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 11-26, 2009.

JUNQUEIRA, S. M. S. **Experiências de estudantes na construção do conhecimento de derivada em aulas de Cálculo 1.** 2014. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

LUCCAS, S.; LUCAS, L. B. Abordagem histórico-epistemológica como aporte metodológico para o ensino do conhecimento científico e matemático. **Perspectivas da Educação Matemática,** Campo Grande (MS), v. 5, n. 10, p. 107-121, 2012.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante:** relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros professores sobre derivadas. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89, 2015.

PINTO, G. M. F.; VIANNA, C. C. S. Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de Cálculo semipresencial**. Revista de Educação, Ciências e Matemática,** Rio de Janeiro (RJ), v. 2, n. 3, p. 74-90, 2012.

RACHELLI, J. **Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca:** análise segundo o modelo cognitivo APOS. 2017. 294 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 27, n. 45, p. 281-302, 2013.

VEGA, M. A.; CARRILLO, J.; SOTO, J. Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p.403-429, 2014.

VRANCKEN, S.; ENGLER, A. Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468, 2014.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática:** do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. 2005. 255 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

Janice Rachelli – Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Vanilde Bisognin – Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN).