

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES: UMA ABORDAGEM NÃO USUAL PARA OS NÚMEROS REAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neda da Silva Gonçalves

Vera Regina da Rocha Bauer

Paula Chaves Carvalho

Thaísa Jacintho Müller

Resumo

Este é o relato de uma experiência realizada com alunos de Ensino Fundamental e Médio com o propósito de tentar tratar de modo mais objetivo o trabalho com números. Aproximar esse trabalho, tratado de modo tão abstrato nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, da resolução de equações, nos faz pensar que traria maior significado aos números irracionais, amenizando os problemas que são trazidos pela dicotomia racionais x irracionais.

Palavras-chave: Números. Conjuntos numéricos. Números algébricos. Números transcendententes.

Abstract

This paper presents an experiment carried out with Elementary and High School students and intends to try to deal more objectively with numbers. Bringing this work, taught so poorly on those grades, closer to solving equations, makes us think it would give a better meaning to irrational numbers, soothing the problems caused by rational and irrational dichotomy.

Keywords: Numbers. Number sets. Algebraic numbers. Transcendent numbers.

Introdução

Com base em experiências obtidas como professoras de Ensino Fundamental e Médio e como alunas ou professoras de Ensino Superior,

consideramos que a dificuldade em trabalhar com números é um dos problemas apresentados por alunos que ingressam nos cursos de graduação no desenvolver dos conteúdos programáticos. Observando alunos e colegas, notamos que essa problemática tem origem na Educação Básica. Por esse motivo, passamos a discutir, nos encontros de um grupo de estudos de Álgebra, o quanto nossas pesquisas poderiam auxiliar tais alunos.

O presente artigo refere-se ao tema escolhido pelo grupo no ano de 2005: números algébricos e transcendententes. Estudamos, a partir dele, maneiras de amenizar dificuldades que alunos do Ensino Fundamental e Médio costumam apresentar como consequência da divisão usual dos números reais em racionais e irracionais, pois pensamos que é no momento em que essa divisão é apresentada que são criados os maiores problemas.

Julgamos que a maneira, em geral, como são apresentados os números irracionais em salas de aula do Ensino Fundamental, assim como a pouca importância dada aos resultados numéricos de situações matemáticas no Ensino Médio, é de difícil compreensão e pouco estimulante aos questionamentos. Os números reais ficam sendo tratados como “a união daqueles que conhecemos com os que quase não conhecemos”. Segundo Moreira e David (2005):

No final, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. Fecha-se, assim, um ciclo de inconsistências, e não se

esclarece o sentido de se conhecer os irracionais como números ou o significado que possa a vir a ter essa espécie de número. (p.82)

Certamente a simples classificação dos números em algébricos e transcendententes não soluciona os problemas existentes, mas acreditamos que, desta forma, os números racionais e irracionais possam ser mais discutidos e as classes de equivalências de racionais possam ter um maior significado.

Nossa proposta tenta modificar, de uma maneira não radical, o modo de apresentação dos números irracionais.

Os problemas começam, na maioria das vezes, na sétima série, momento da introdução do conjunto dos números reais. Cabe salientar que, embora seja nesta série que o aluno toma contato com a expressão “número irracional”, desde o momento que calcula áreas ou comprimentos de circunferências, já está usando o número π (antes mesmo de trabalhar com os radicais inexatos). Dessa forma, números como o π não são tratados como números, chegando, em algumas situações, a serem considerados indeterminados.

Uma proposta não-usual para o ensino dos números reais

Vamos tomar como ponto de partida a definição de número algébrico. Como define Figueiredo (1985, p.21), “Qualquer solução de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ onde os coeficientes a_i ’s são inteiros, é chamado número algébrico”.

Assim, para verificarmos se um número é algébrico, de acordo com a definição, basta encontrarmos uma equação polinomial com coeficientes inteiros para a qual este número seja solução. Se não encontrarmos tal equação, o número será dito transcendente.

Dessa forma, números como $\sqrt[n]{p}$, com p primo, podem vir a ser tratados com maior naturalidade, pois surgem como soluções de equações polinomiais e, nesse contexto, são classificados como qualquer número racional. Através desse tratamento, estaremos fazendo uma tentativa de amenizar as dificuldades que surgem quando do primeiro contato do aluno com números irracionais expressos por radicais. Sabemos que tais

números nem sempre são vistos com “simpatia” por alunos de Ensino Fundamental e Médio, uma vez que podemos perceber que a manipulação algébrica com estes irracionais costuma causar problemas a estudantes da Educação Básica.

A procura de uma equação que tenha como solução, por exemplo, o número π , passa a ser um desafio para qualquer aluno de Ensino Fundamental.

Por outro lado, trabalhando estes conceitos podemos obter vários outros benefícios para os alunos, como por exemplo:

- o melhor compreensão das equações equivalentes, pois elas têm o mesmo número como solução;
- o entendimento de que, mesmo existindo equações que não se enquadram na definição e das quais um determinado número seja solução, basta encontrarmos uma delas que satisfaça as condições dadas para classificarmos tal número como algébrico (o que exercita o uso de quantificações);
- o clareza nos conceitos de equação e solução de equação, uma vez que os alunos são solicitados a encontrar equações com determinadas soluções e, para isso, precisam dominar tais conceitos;
- o maior conhecimento dos conjuntos numéricos já trabalhados, pois os estudantes precisam, pelo menos, identificar os conjuntos a que pertencem os coeficientes de cada equação;
- o costume de refletir sobre a resposta obtida para um determinado problema, já que os alunos criam o hábito de verificar se um número é solução de uma dada equação.

Além disso, no dia-a-dia escolar, um dos conteúdos mais trabalhados com alunos é a resolução de equações, devido à forma como estas lhes auxiliam na resolução de problemas práticos. Acreditamos, então, que associar os números a soluções de equações poderia trazer para os estudantes um significado mais amplo, concreto e familiar para esses entes matemáticos.

A partir desta idéia, analisamos alguns livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio ([1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [10]) para sabermos em que momento os números algébricos e transcendententes poderiam ser trabalhados em cada série. Os resultados obtidos foram:

• 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

O primeiro contato com os números algébricos e transcendentais deveria ocorrer na 6ª série, com a inclusão de uma nova nomenclatura para os números. Essa nova abordagem ganha espaço com o estudo das equações de 1º grau, que tem início nessa série. Nossa proposta é que os alunos comecem a classificar os números a partir das soluções de equações. Estarão, dessa forma, preparando-se para o trabalho que se dará nas séries seguintes, quando as raízes inexatas terão um tratamento de destaque.

• 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Aqui, os números algébricos e transcendentais podem ser estudados com mais profundidade, uma vez que os alunos abordam mais “fortemente” o conjunto dos números reais, com a clássica separação em racionais e irracionais. É onde acreditamos que a nova abordagem amenizaria dificuldades, principalmente com relação aos números irracionais. Outras aplicações seriam feitas durante o estudo dos polinômios e dos sistemas de equações, que também são vistos nessa série.

• 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nesse nível, também percebemos uma grande possibilidade de aplicação do trabalho. A maioria dos livros analisados começa com uma revisão dos conjuntos numéricos, em que a potenciação e radiciação com os números reais são enfatizadas. Aí se tem a possibilidade de enriquecer o conjunto dos números irracionais. Depois, prevemos uma inclusão do assunto quando os alunos estudam: equações e sistemas do 2º grau, equações biquadradas, equações irracionais e funções.

• 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Podemos observar que, nesta série, o primeiro assunto trabalhado é Conjuntos, especialmente os conjuntos numéricos. Acreditamos que nesse momento, além de fazer uma revisão de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$, já conhecidos, é possível que o professor introduza dois conjuntos numéricos diferentes (o conjunto dos números algébricos, formado por todos os números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros, e o conjunto dos números

transcendentes) e apresente esta divisão não-usual dos números reais.

Por outro lado, nesta série também são trabalhadas algumas funções transcendentais, como a função exponencial. Então, este pode ser um bom momento para que os alunos, já sabendo da existência desses conjuntos um pouco menos “usuais”, conheçam mais um exemplo de número transcendente: o número de Euler (e).

• 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Como sempre estamos levando em consideração os conteúdos distribuídos na maioria dos livros, os assuntos de segundo ano que incluem matrizes e sistemas lineares também apresentam boas oportunidades para não deixar de ressaltar a importância dos números nas soluções das equações. Sabemos que, sejam quais forem os conteúdos, as equações sempre estarão presentes.

• 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

No último ano da Educação Básica, os alunos trabalham, entre outros tópicos, com números complexos e polinômios. Dessa forma, pensamos que os conjuntos dos números algébricos e transcendentais poderiam ser apresentados como subconjuntos do conjunto dos números complexos. Além disso, certamente há uma possibilidade de continuidade do assunto com o estudo dos polinômios, principalmente no momento em que procuramos suas raízes.

É importante ressaltar que esta é uma proposta que não pretende excluir dos conteúdos programáticos do Ensino Fundamental a classificação dos números em racionais e irracionais para, agora, classificá-los em algébricos e transcendentais. Além disso, não estamos propondo uma mudança total nos currículos escolares, uma vez que os conteúdos que costumam ser trabalhados continuarão aparecendo, isto é, não pretendemos deixar de “ensinar” os conjuntos dos números racionais e irracionais. Buscamos apenas maneiras de ajudar os alunos para que tenham uma melhor compreensão dos números e acreditamos que trabalhar com a divisão apresentada possa ser uma delas.

Relato de experiências no Ensino Fundamental

Com base nessas idéias, nos anos de 2005 e 2006 realizamos um trabalho com turmas de sexta série do Ensino Fundamental que foi aplicado exatamente no momento em que se julgou adequada a introdução do assunto números algébricos e transcendentais nessa série.

Nosso objetivo e nossa preocupação em iniciar o estudo desses números passaram a ser, então, introduzir uma nova nomenclatura de forma quase imperceptível, para que, se julgássemos estar causando dificuldade de entendimento aos alunos, pudéssemos retirá-la da mesma forma que introduzimos. Achávamos, também, que só veríamos os resultados em uma futura aplicação, na 7ª série, quando os alunos estudam os números racionais e irracionais, formando os reais. Porém, ao realizarmos as atividades, observamos dificuldades que não imaginamos que iriam aparecer e tivemos, assim, oportunidade de solucioná-las.

Descrevemos a seguir as atividades propostas, as dificuldades que os alunos tiveram em cada uma delas, bem como a maneira com que falamos nos números algébricos e transcendentais.

Exercícios de verificação de raízes

Essa atividade é comum de se encontrar nos livros didáticos da 6ª série. Foi durante esse tipo de exercício que começamos a falar nos números algébricos. A cada correção, comentávamos: “a solução desta equação é um número algébrico”. Assim, os alunos passaram a falar mais em *número*, uma vez que, em nossa opinião, nessa série eles deixam de lado esse conceito e o número deixa de ser número para virar apenas solução de equações.

Exercícios de criação de equações

Preparamos essa atividade para que o aluno criasse equações com coeficientes inteiros a partir de números, que deveriam ser soluções da mesma. A atividade foi um sucesso, superou todas as nossas expectativas, uma vez que, por meio dela, os alunos demonstraram algumas dificuldades que não conseguiríamos diagnosticar

em exercícios tradicionais de resolução. Percebemos que os alunos foram muito criativos e sua autonomia foi até surpreendente, pois cada vez mais eles queriam criar outras equações “difíceis e diferentes”.

A seguir, encontram-se alguns exemplos de equações que os alunos montaram a partir de um número dado.

Exemplo 1:

$$3 \longrightarrow x - 3 = 0$$

$$-4 \longrightarrow x + 4 = 0$$

Os primeiros números para os quais solicitamos esta atividade foram os inteiros. As duas equações acima representam os exemplos mais simples que os alunos trouxeram. A partir deles, discutimos sobre a existência de outras equações que tivessem as mesmas soluções propostas.

Aqui identificamos uma dificuldade que nos surpreendeu. Muitos alunos criavam, para essas soluções, as seguintes equações:

$$3 \longrightarrow x + 2 = 3$$

$$-4 \longrightarrow x - 1 = -4$$

Percebemos, assim, que apesar de, quando questionados sobre o que era a solução de uma equação, esses mesmos alunos responderem que era o valor encontrado para x que tornava a expressão verdadeira, ao montarem a equação, insistiam em colocar o número dado do lado direito da igualdade, sem verificar se este número era realmente a solução.

Sem esta atividade, talvez não detectássemos tal dificuldade, relacionada à não-compreensão do conceito de solução de equação, isto é, esses exercícios enfatizam efetivamente o “conceito” de solução de equação, quebrando a tendência de nos preocuparmos apenas com sua determinação.

Exemplo 2:

$$\frac{2}{5} \longrightarrow 5x - 2 = 0$$

A primeira equação que os alunos apresentaram para este número foi $x - \frac{2}{5} = 0$. Então, discutimos com eles o fato de que esta equação realmente tem como solução o número $\frac{2}{5}$ e os

desafiamos a achar outra equação com esta solução, mas desta vez usando apenas números inteiros. Foi então que, após conversas e tentativas, alguns alunos chegaram a realizar o seguinte processo:

$$x = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 0$$

A partir desta equação, houve alunos que, da mesma forma que fizeram com os números inteiros, criaram outras equações para essa mesma solução.

Exemplo 3:

$$0 \longrightarrow x = 0$$

A equação apresentada acima foi a mais simples que os alunos criaram, mas alguns deles foram bastante criativos e trouxeram equações do tipo $x^{10} = 0$.

A pergunta esperada:

Desde o início do trabalho, trazíamos a seguinte preocupação: ao apresentarmos os números algébricos a alunos de sexta série, era necessário que eles conhecessem um contra-exemplo, isto é, um número *transcendente*, uma vez que só conheceriam um deles (no caso, o π) no final do ano, ao estudarem as formas geométricas. Esperávamos que a dúvida partisse da turma, ou seja, que os alunos questionassem a existência de números que não fossem algébricos. Foi assim que, depois de algumas aulas trabalhando com números algébricos e de grande expectativa nossa em relação à reação dos alunos, surgiu a tão esperada pergunta: “Mas então todos os números são algébricos?”.

Trabalho de descoberta do número π :

Neste momento, resolvemos solicitar um trabalho aos alunos. A turma foi dividida em grupos e cada grupo faria consultas sobre o número π com a finalidade de apresentar para seus colegas o fruto da pesquisa, tendo sido realizadas pesquisas sobre: atividades de determinação, história, curiosidades, etc.

Depois de todos os trabalhos terem sido apresentados, elaboramos uma lista de exercícios de revisão; em uma das atividades os alunos foram desafiados a montar uma equação (de co-

eficientes inteiros) cuja solução fosse o número π . As tentativas de solução desse problema foram muitas. Depois de intenso trabalho alguns estudantes apresentaram $x - \pi = 0$. Outros disseram não existir tal equação.

A partir das respostas trazidas, salientamos que o número π é realmente solução da equação $x - \pi = 0$, mas que, usando apenas coeficientes inteiros, não é possível montar uma equação com esta solução, pois o coeficiente do termo independente é π , que não é inteiro. Concluímos com eles, então, que o π não é um número algébrico. Um dos nossos objetivos foi alcançado neste momento, quando os alunos consideraram o π como número e o inseriram em uma equação.

Relato de experiências no Ensino Médio

Foi realizado também um trabalho semelhante ao do Ensino Fundamental em duas turmas de primeiro ano do Ensino Médio; este, no ano de 2007. Desta vez, tínhamos como objetivo apresentar, aos alunos ingressantes no Ensino Médio, conjuntos numéricos diferentes dos estudados por eles, além de retomar as equações já trabalhadas, o que seria útil logo adiante, no estudo das funções polinomiais. Da mesma forma que no Ensino Fundamental, foram analisados livros didáticos do Ensino Médio e, desta vez, concluímos que seria interessante introduzir os números algébricos e transcendentos no momento em que os alunos estudassem (ou revisassem) conjuntos. Para isso, foram realizadas as atividades relatadas a seguir.

Pesquisa sobre os conjuntos numéricos:

Pensando em como introduzir o assunto na referida série, planejamos pedir aos alunos que realizassem uma pequena pesquisa, em casa, sobre os conjuntos numéricos já conhecidos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) e, ainda, os conjuntos dos números algébricos e transcendentos. Assim, esses dois conjuntos seriam encarados como todos os outros, com a única diferença de que eram ainda desconhecidos. Com isso, a introdução dos nomes *algébrico* e *transcendente* dar-se-ia de forma natural.

Porém, conforme já imaginávamos, quando esta atividade foi solicitada aos alunos, estes manifestaram que haviam encontrado as defi-

nições, mas não tinham conseguido entender perfeitamente o significado de número algébrico e número transcendente. Foi necessário, então, esclarecer todos os itens das expressões definatórias encontradas. Resolvida essa dificuldade inicial, seguimos com as próximas atividades.

Classificação das soluções das equações

Durante as duas primeiras semanas do ano letivo de 2007, a escola onde foi realizada esta pesquisa havia determinado que deveria ser feita uma revisão dos conteúdos considerados pré-requisitos para o ano que se iniciava. Sendo assim, um dos conteúdos mais trabalhados com o primeiro ano do Ensino Médio foi equações polinomiais, tanto do primeiro como do segundo grau.

Por isso, achamos conveniente, para introduzir o estudo dos conjuntos numéricos, retomar as equações já resolvidas na revisão, a fim de prestarmos atenção nos números que compunham cada conjunto-solução. Assim, o primeiro exercício proposto em aula foi o seguinte:

1) Observe as equações abaixo (que já foram resolvidas) com seus respectivos conjuntos-soluções. Classifique cada um dos números encontrados em naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais:

$$a) x + 5 = 7 \quad S = \{2\}$$

$$b) 2x + 4 = -8 \quad S = \{-6\}$$

$$c) 2x^2 + x - 5 = 0 \quad S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{41}}{4} \right\}$$

$$d) x^2 + x - 2 = 0 \quad S = \{1, -2\}$$

$$e) \frac{x}{4} - \frac{x-5}{6} = 1 + \frac{2(x-5)}{3} \quad S = \frac{38}{7}$$

$$f) 10 - (8x - 2) = 5x + 2(-4x + 1) \quad S = \{2\}$$

$$g) 4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$h) 5x^2 - 3x = 0 \quad S = \left\{ 0, \frac{3}{5} \right\}$$

$$i) x^2 + x - 20 = 0 \quad S = \{4, -5\}$$

$$j) x^2 - 6x + 7 = 0 \quad S = \{3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\}$$

Para resolver o exercício, entregamos cinco tiras de papel para cada dupla de alunos, de maneira que, em cada uma delas, eles deveriam escrever os números pertencentes aos conjuntos indicados em cada tira. Inicialmente, pensávamos que essa parte seria mais fácil, uma vez que os conjuntos numéricos (com exceção dos algébricos e transcendentais) já eram conhecidos desde o Ensino Fundamental. Mas essa idéia não foi confirmada. Quando pedimos que cada dupla de alunos fizesse essa classificação, percebemos que muitos estavam confusos, sem saber o que era um número inteiro, racional, etc. Neste momento, foi necessário retomarmos as definições de cada um desses conjuntos. Notamos que os números naturais e inteiros estavam bem compreendidos, que o maior problema estava nos racionais e irracionais. Quanto aos números reais, a solução foi mais fácil, pois eles sabiam que todos os números que conheciam até o momento eram reais.

Um aluno mencionou ter achado a seguinte definição de número racional: “número racional é todo número que pode ser escrito na forma de fração”. Então, comentamos que estava correto, mas que precisávamos apenas prestar atenção no fato de que numerador e denominador devem ser inteiros. Essa idéia gerou dificuldades, já que inicialmente muitos pensaram que números como $\frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$ eram racionais, pois eram “frações”. Muitos alunos fizeram confusão, também, com os números inteiros, achando que não eram racionais por não serem “frações”. Mas, então, concluímos que podemos escrever, por exemplo, $\frac{2}{1}$, ou $\frac{4}{2}$, que são frações e representam o número 2. Neste momento, pareceu-nos que as turmas compreenderam melhor a classificação dos números e fizeram corretamente a atividade. Durante as discussões, uma aluna perguntou se o número $\frac{28}{7}$ poderia ser classificado como natural, uma vez que estava escrito em forma de fração, mas, por outro lado, $28:7=4$. Achamos interessante, nesse momento, chamar a atenção que, às vezes, podemos representar um mesmo número de diversas maneiras (através de frações equivalentes), e, portanto, a fração que ela apresentou corresponde ao número natural 4.

A partir dos fatos relatados até aqui, podemos julgar que a formação do conceito de

número não se estabeleceu ainda nesse nível de ensino, para esses alunos. Percebemos que, de fato, a maioria deles terminou o Ensino Fundamental sem saber claramente o que são números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Depois de discutirmos bastante esta atividade, passamos para o exercício de número 2:

2) *Classifique os números utilizados no exercício anterior em algébricos e transcendentess.*

Nossa intenção, aqui, era que os alunos percebessem que todos os números do exercício 1 eram algébricos, pois estávamos considerando exatamente soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Muitos estudantes deram-se conta deste fato rapidamente, mas a dúvida que logo surgiu foi: mas então, quais são os números transcendentess?

Para responder a essa questão, apresentamos outros números e verificamos se eram algébricos ou não. Entre esses, estavam inteiros, frações, raízes não exatas e números do tipo $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ ($a, b \in \mathbb{Z}_+$), por exemplo. Fomos criando as equações e, como era de esperar, todos os números eram algébricos. Então, chamamos a atenção para o fato de que todos os “tipos” de números utilizados até então eram algébricos. Desta forma, precisávamos procurar um “candidato a transcendente”. Alguns alunos lembraram bem rapidamente do número π . Nesse momento, passamos para a próxima atividade, na qual apareceriam exemplos de números transcendentess.

Criação de equações a partir de sua solução

Quando surgiu a necessidade de apresentarmos aos alunos mais exemplos de números algébricos e transcendentess, comentamos que a única maneira de sabermos se um número é algébrico ou não é tentando construir uma equação polinomial com coeficientes inteiros da qual o número em questão fosse solução. Para isso, foi realizado o exercício número 3:

3) *Para cada um dos números abaixo criar, se possível, uma equação polinomial com coeficientes inteiros da qual o número dado seja solução. Depois, classifique estes números em algébricos ou transcendentess:*

a) 3

b) -4

c) $\frac{3}{4}$

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

f) $\sqrt[3]{5 + \sqrt{7}}$

g) π

h) $\sqrt{\pi}$

i) 0,333...

j) e

Neste exercício, os números que mais geraram dúvidas foram 0,333... e o número de Euler. O primeiro porque os alunos não lembravam como transformar uma dízima periódica em fração, o que foi uma boa oportunidade para revisão deste assunto. O segundo porque eles realmente ainda não conheciam o número. Nesse caso, foi necessário explicar que este é um número semelhante ao π , que também é um número decimal infinito e não periódico. Apresentamos algumas informações sobre Euler, já que o número leva seu nome, e que ele seria muito usado logo adiante, no estudo dos logaritmos. Depois, eles tentaram criar as equações solicitadas. Percebemos que este exercício foi feito com muito mais facilidade do que os anteriores, os alunos pareciam mais acostumados a “fazer contas”. Por outro lado, a separação dos números em algébricos e transcendentess também se deu de maneira bem natural. Nesse momento, novamente salientamos que, quando trabalhávamos com números inteiros, frações ou raízes, era possível montar a equação solicitada. Mas e o número π ?

Quando chegamos ao item (g), perguntamos se seria possível achar uma equação equivalente a $x - \pi = 0$ usando apenas coeficientes inteiros. Assim, concluímos que isso seria impossível, ou seja, não existe tal equação para π . Logo, π é um número transcendente. Porém, essa conclusão não surgiu tão facilmente, pois alguns alunos pensaram que a equação $x - \pi = 0$ era suficiente. Nesse momento, explicamos novamente que essa equação, de fato, tem π como solução, mas não possui apenas coeficientes inteiros, ou seja, é uma equação da forma $ax + b = 0$, mas com $b = \pi$, que é um número irracional. Então, esta não poderia ser a equação que estávamos procurando. Como consequência, os alunos rapidamente concluíram que o número e também é transcendente, pois, da mesma forma, poderíamos pensar na equação

$x - e = 0$ que, por sua vez, também não possui somente coeficientes inteiros.

Outro fato interessante ocorreu em relação a $\sqrt{\pi}$. Na tentativa de montar a equação solicitada, muitos alunos realizaram o seguinte processo: $x = \sqrt{\pi} \Rightarrow x^2 = \pi \Rightarrow x^2 - \pi = 0$ e acreditavam que essa seria uma resposta para o problema. Porém, depois que conversamos sobre o fato de a equação $x - \pi = 0$ não ter apenas coeficientes inteiros, eles perceberam que também estavam enganados em relação a essa, pois estavam com o mesmo problema, ou seja, não sabiam como “eliminar” π . Assim, rapidamente concluímos que $\sqrt{\pi}$ também é um número transcendente.

Operações com conjuntos

Imediatamente antes do estudo dos conjuntos numéricos, os alunos estavam trabalhando com operações entre conjuntos (união, intersecção e subtração). Então, achamos que seria interessante fazer um exercício sobre este conteúdo, envolvendo também os conjuntos numéricos. Por esse motivo, encerramos o trabalho com o exercício de número 4:

4) Considerando A o conjunto dos números algébricos e T o conjunto dos números transcendentais, determine:

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $N \cap Z$ | f) $R \cap A$ |
| b) $N \cup Z$ | g) $R \cup T$ |
| c) $Q \cap I$ | h) $Q \cap A$ |
| d) $R \cap Q$ | i) $Q \cup A$ |
| e) $Q \cup I$ | |

Neste exercício, surgiu uma dificuldade que não esperávamos: como usamos os símbolos dos conjuntos numéricos, alguns alunos disseram que não sabiam fazer o exercício porque não estava claro, no enunciado, quem eram os conjuntos. Outros pensaram que deveriam considerar, no conjunto N, por exemplo, apenas os números do exercício anterior. Então, explicamos que, agora, iríamos operar com conjuntos numéricos já conhecidos, cujos símbolos eram “universais” e, portanto, não precisavam ser explicitados no enunciado do exercício. Mostramos, também, que não estávamos trabalhando só com os números do exercício anterior, ou seja, que para o conjunto N, por exemplo, eles

deveriam considerar todos os naturais, para Z todos os inteiros, e assim por diante.

Depois dessa dúvida inicial, conversamos bastante sobre cada item, pensando sobre quem eram os números racionais e algébricos, reais ou transcendentais, etc. Acreditamos que este exercício foi bastante significativo, pois permitiu que os alunos percebessem a relação entre os conjuntos, independentemente da divisão utilizada para os números reais.

Conclusão

Após a realização de várias atividades com as turmas, pode-se dizer que a experiência teve um resultado positivo quanto às dificuldades apresentadas pelos alunos, que foram diminuindo com o desenrolar do trabalho.

Percebemos que o novo enfoque foi muito bem aceito pelos alunos, os quais nem perceberam que estavam aprendendo uma maneira não usual de classificação dos conjuntos numéricos, provocando uma partição diferente no conjunto dos números reais, e, portanto, aderiram rapidamente à nova nomenclatura. Além disso, ao final dos trabalhos, foi realizada uma pequena avaliação nas turmas, com a qual pudemos perceber que o assunto estava realmente bem compreendido. E, conforme já citamos anteriormente, com este trabalho foi possível detectarmos dificuldades e reações que não esperávamos dos alunos, o que, certamente, não teria sido possível se os conteúdos “equações” e “conjuntos” tivessem sido abordados de maneira tradicional, ou seja, as atividades realizadas enriqueceram o trabalho.

Não esperamos que essa ténue mudança faça com que os alunos saiam do Ensino Médio como exímios conhecedores de números e suas classificações. No entanto, o que observamos com o pouco tempo de trabalho realizado nos dá a certeza de que temos maneiras de melhor preparar esses alunos.

É necessário observar que, se cada vez que um aluno resolver uma equação sentir necessidade de avaliar e classificar a solução, muitas vezes vai colocar números como 2 e $\sqrt{2}$ no mesmo nível. Isso nos dá a convicção de que não haverá tantas dúvidas no momento de determinar o oposto ou o inverso multiplicativo de $\sqrt{2}$. Além disso, o conhecimento dos números transcendentais fornecerá maior intimidade com

números que muitas vezes os alunos nem sabem da existência.

Salientamos que o nosso propósito é de acrescentar um novo enfoque, de forma que os conteúdos usualmente trabalhados tenham uma maior aceitação e compreensão por parte dos alunos. Desta forma, um estudante que receba esse tratamento em alguma série ou escola não teria problemas em outras séries ou escolas, pelo contrário, estaria mais bem situado e com melhor embasamento. Porém, vemos a necessidade de termos professores que se disponham a fazer esse trabalho em suas turmas. Para isso, seria ótima a formação de grupos de estudos nas escolas, com o fim de organizarem discussões para decidirem como fazer essa abordagem, pensando sobre que metodologia seria mais adequada à realidade da escola.

Referências

- [1] BARROSO, J. M. (org.) **Matemática – Projeto Araribá**. São Paulo: Moderna, 2003.
- [2] BONGIOVANNI, O. R. V.; LAUREANO, J. L. T. **Matemática e Vida**. São Paulo: Ática, 1991.
- [3] DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2002.
- [4] DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2000.
- [5] FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.
- [6] GENTIL, N. et. al. **Matemática para o 2º grau**. São Paulo: Ática, 1997.
- [7] GIOVANNI, J. R. **Matemática: pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 2000.
- [8] GUELLI, O. **Matemática: uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 2002.
- [9] MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.
- [10] SMOLE, K. C. S.; KITYUKAWA, R. **Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1999.
- Neda da Silva Gonçalves – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Matemática. Av. Ipiranga, 6681. Prédio 30 – Bloco C. Telefone: 3320.3531. Professora do Departamento de Matemática. E-mail: neda@pucrs.br
- Vera Regina da Rocha Bauer – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Matemática. Av. Ipiranga, 6681. Prédio 30 – Bloco C. Telefone: 33203531. Professora do Departamento de Matemática. E-mail: verabauer@pucrs.br
- Paula Chaves Carvalho – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Matemática. Av. Ipiranga, 6681. Prédio 30 – Bloco C. Telefone: 33349003. Licenciada em Matemática (PUCRS). E-mail: paulacarv@terra.com.br
- Thaísa Jacintho Müller – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Matemática. Av. Ipiranga, 6681. Prédio 30 – Bloco C. Telefone: 3472.4069. Licenciada em Matemática (PUCRS). Mestranda em Matemática (UFRGS) E-mail: thaisamuller@gmail.com

RECEBIDO em 13/11/2007

APROVADO em 19/06/2008