

INVARIANTES OPERATÓRIOS DE RECURSIVIDADE ALGÉBRICA PRESENTES NAS ESTRATÉGIAS DE ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Operative Invariants of Algebraic Recursiveness Present in the Student Strategies of the 3rd Grade of Elementary School

Vinicius Carvalho Beck

João Alberto da Silva

Resumo

O objetivo do presente trabalho é descrever e analisar os invariantes operatórios de recursividade algébrica presentes nas estratégias de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental. Para a coleta de dados desta pesquisa foi elaborada uma atividade adaptada de uma situação apresentada na literatura, na qual os autores pretendiam abordar, ao mesmo tempo, duas das principais noções algébricas: recursividade algébrica e padrão algébrico. Na presente pesquisa nos concentramos na noção de recursividade. Foram realizadas entrevistas clínicas com 24 estudantes de uma escola pública do interior do Rio Grande do Sul. Foi constatado o uso de seis invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “regra de associar acrescentando um”, “regra de dobrar as quantidades” e “construção da regra a partir da realidade observada”; e os respectivos conceitos-em-ação “relação biunívoca entre grandezas”, “existência de relação proporcional entre quaisquer grandezas” e “necessidade de experimentar para inferir a regra”.

Palavras-chave: Estratégias. Recursividade. Pensamento Algébrico.

Abstract

The aim of this study is to describe and analyze the operative invariants of algebraic recursiveness present in the strategies of students of the 3rd grade of elementary school. For the data collection of this research, an activity adapted from a situation presented in the literature was elaborated, in which the authors intended to address, at the same time, two of the main algebraic notions: algebraic recursion and algebraic default. In the present research we focus on the notion of recursiveness. Clinical

interviews were conducted with 24 students from a public school in the interior of Rio Grande do Sul. We verified the use of six operative invariants: the theorems-in-action "rule of associating adding one", "rule of doubling quantities" and "construction of the rule from the observed reality"; and the respective concepts-in-action "biunambiguous relationship between greatness", "existence of proportional relationship between any greatness" and "need to experience to infer the rule".

Keywords: Strategies. Recursion. Algebraic Thinking.

Introdução

Segundo Boyer (1991), foram os matemáticos árabes e hindus que, por volta dos séculos VIII e IX, introduziram o conceito algébrico de equação e estabeleceram os primeiros métodos de resolução para equações do primeiro e segundo grau. Entretanto, isto não significa que os povos antigos não possuíam nenhum tipo de intuição algébrica. No Papiro Rhind, por exemplo, há evidências de que os egípcios já sabiam resolver alguns tipos particulares de equações.

Da mesma forma que a formalização algébrica historicamente procedeu a intuição algébrica, esta última mais primitiva, podemos pensar que em termos psicológicos este processo se repete individualmente, isto é, a formalização algébrica que se pretende ensinar na escola pode ser melhor compreendida se partirmos do pressuposto de que alguma intuição algébrica precisa ser desenvolvida desde o início da escolaridade.

O objetivo do presente trabalho é descrever e analisar os invariantes operatórios de recursividade algébrica presentes nas estratégias de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do estado do Rio Grande do Sul.

Pensamento algébrico nos anos iniciais

A inclusão da Álgebra no currículo dos anos iniciais é consequência de vários estudos realizados nas últimas décadas, no âmbito do que ficou conhecido como *pensamento algébrico* (BLANTON; KAPUT, 2005; CARPENTER; LEVI; FRANKE; ZERINGUE, 2005; IRWIN; BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII; STEPHENS, 2008; STEPHENS; WANG, 2008; BLANTON; STEPHENS; KNUTH; GARDINER; ISLER; KIM, 2015). Blanton e Kaput (2005, p. 413) definem, mais precisamente o pensamento algébrico como:

processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

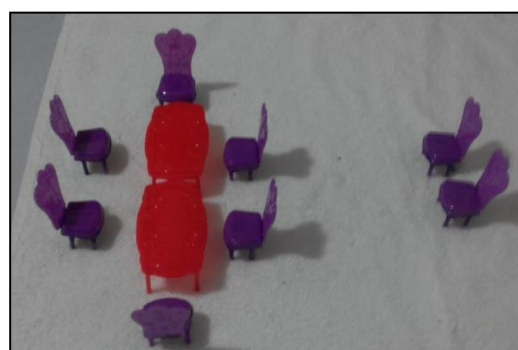
Ressalta-se que o pensamento algébrico aparece pela primeira vez em documentos oficiais do Brasil, através da publicação pelo MEC intitulada *Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental* (BRASIL, 2012), desde então fazendo parte oficialmente do currículo da educação básica brasileira.

Procedimentos metodológicos

Para a coleta de dados desta pesquisa, foi elaborada uma atividade adaptada de uma situação apresentada por Blanton *et al.* (2015, p. 85), na qual os autores pretendiam abordar, ao mesmo tempo, duas das principais noções algébricas: recursividade algébrica e padrão algébrico. Na presente pesquisa nos concentramos na noção de recursividade.

Os participantes da pesquisa foram 24 alunos do 3º ano do Ensino Fundamental (14 meninos e 10 meninas). O estudo foi realizado em uma escola pública localizada na periferia de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul. A escolha por estudantes do 3º ano ocorreu porque este é o final do Ciclo de Alfabetização, e, além disso, a atividade aplicada nesta pesquisa foi adaptada do trabalho de Blanton *et al.* (2015), que também utiliza sujeitos do nível escolar equivalente no sistema educacional dos Estados Unidos.

Figura 1 - Material de Aplicação da Atividade



Fonte: Autoria própria.

Cada estudante foi entrevistado, seguindo os protocolos do Método Clínico de Manipulação-Formalização (DELVAL, 2002). Propõe-se uma situação fictícia na qual um garoto, Bruno, convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Na casa de Bruno há uma mesa retangular com quatro lugares, mas ele teve a ideia de juntar outra mesa. Pergunta-se ao participante: quantos amigos poderão sentar com duas mesas juntas? Em seguida, aumenta-se gradativamente o número de mesas para analisar a capacidade de prever resultados do participante, a fim de captar a forma como ele percebe a regra que se forma quando o número de mesas aumenta, e também se consegue identificar que existe uma relação entre o número de mesas e de lugares.

A análise dos dados aconteceu em três etapas: categorização dos procedimentos realizados pelos participantes, análise a partir das estratégias construídas pelos estudantes e classificação

dos níveis de respostas obtidas a partir das entrevistas.

Pressupostos teóricos

O referencial teórico deste trabalho são os estudos de Gérard Vergnaud (1990, 1997, 2009). Para ele, a base da aprendizagem está centrada no processo de conceitualização, isto é, na medida em que o sujeito se aprofunda no entendimento de um conceito, ele avança de um estado do conhecimento para outro.

Para Vergnaud, um campo conceitual é uma síntese de três elementos: situações vivenciadas pelo sujeito, invariantes operatórios (estratégias e esquemas mentais construídos) e representações simbólicas. Os invariantes operatórios, foco deste estudo, podem ser de dois tipos: conceitos-em-ação, que são as primeiras representações que o sujeito elabora sobre os conceitos; e teoremas-em-ação, que constituem as primeiras estratégias e procedimentos que os sujeitos utilizam para se adaptar às situações que a ele se apresentam.

É interessante destacar que a situação apresentada neste trabalho se trata de um problema de *comparar* quantidades, o que demanda a ação mental de ligar três elementos entre si, tal como Vergnaud (2009, p. 24-25) destaca, pois, neste caso, é necessário comparar o número de lugares com o número de mesas, pois espera-se que o participante conclua que para cada mesa adicionada se deve incluir dois lugares.

A habilidade de comparar quantidades pode ser entendida como um dos tipos de pensamento algébrico, denominado como *pensamento algébrico funcional*, o qual já foi analisado em trabalhos anteriores (BLANTON; KAPUT, 2005; BLANTON *et al.*, 2015; BECK; SILVA, 2015), e está relacionado com a construção da ideia de *variável*, ou seja, de uma grandeza que varia em função de outra grandeza.

Resultados e discussão

Apresenta-se nesta seção os resultados obtidos a partir da exploração da atividade que envolveu a ideia de recursividade algébrica. Ressalta-se que o foco da análise esteve na tentativa de

perceber nos estudantes traços de previsão de resultados a partir de uma regra de associação entre duas variáveis, no caso, as mesas e as cadeiras da situação apresentada.

Procedimentos Funcionais

A análise teve como foco o pensamento dos estudantes para prever o resultado dos lugares, a partir da variação do número de mesas. A primeira categoria emergente foi a que denominamos Sem-Justificativa, ainda que apenas um estudante tenha apresentado este tipo de resposta. Algumas falas do estudante [2] são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Categoria Sem-Justificativa

Sem-Justificativa	[2] _Com três mesas, quantos lugares tu acha ele vai ter? _Três mesas? (demonstrando dúvida, não conseguindo responder).
--------------------------	---

Fonte: Autoria própria.

O estudante [2] não conseguiu verbalizar nenhuma resposta frente à situação apresentada. Isto dificulta bastante a análise de como se estruturou o pensamento desta criança. Mesmo com outras tentativas de se obter uma resposta do estudante, não houve possibilidade de análise, pois não captamos sua resposta.

Outro procedimento que constatamos foi o que chamamos de *Espacial*. Durante a realização da atividade, principalmente no início do enunciado da pergunta feita para os participantes, deixava-se claro que o próprio sujeito manuseasse os materiais para formular sua resposta. No entanto, a estudante [21] foi uma das poucas que optaram por não manipular o material, conforme está ilustrado no Quadro 2.

Quadro 2 – Categoria Espacial

Espacial	[21] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _Hã, dez. _Por que dez? _Porque eu acho.
-----------------	---

Fonte: Autoria própria.

A estudante [21] olha para as mesas e responde o que estima espacialmente ser

uma quantidade suficiente para preenchê-las, e no seu julgamento, acredita que dez lugares é o suficiente para resolver o problema. A estimativa espacial da estudante pode estar relacionada com o formato retangular da mesa, ainda que o pesquisador tenha deixado claro no início que cada mesa só poderia ter quatro lugares, com uma cadeira em cada lado da mesa. As dimensões diferentes da mesa podem ter dado a impressão de que mais cadeiras poderiam ser introduzidas, ou seja, a estudante pode ter adotado critérios estritamente físicos para estimar o número de lugares.

Outra resposta isolada que optamos por analisar de forma diferenciada foi a da estudante [11], que respondeu à pergunta adicionando um lugar a mesa. Para esta participante, existe uma relação entre o número de mesas e cadeiras, e a regra é adicionar mais uma cadeira para cada mesa acrescentada, conforme está ilustrado no Quadro 3.

Quadro 3 – Categoria Um-Lugar-Mais

Um-Lugar-Mais	[11] _Se ele botar outra mesa (já havia duas, seria adicionada uma terceira mesa), quantos lugares vai ter? <i>_Sete.</i>
----------------------	---

Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que a estudante [11] apresenta um pensamento mais avançado em relação aos procedimentos de pensamento funcional apresentados anteriormente. Existe a ideia de dependência quantitativa entre as grandezas *mesa* e *cadeiras*. No entanto, não houve um esforço para relacionar de forma mais completa os possíveis resultados, e a forma mais simples de expressar esta regra de associação foi responder que bastava adicionar uma cadeira. Ou seja, a regra, para esta estudante, seria ter uma nova cadeira para cada mesa adicionada.

O segundo procedimento mais utilizado pelos estudantes foi aquele que denominamos Dobra-Lugares. Os participantes dessa categoria de procedimentos estavam conscientes de uma regra de associação entre o número de lugares e o número de mesas, acreditando

que ao dobrar o número de mesas, deveria ser dobrado o número de lugares, sem se dar conta de que deveriam juntar as mesas. Os trechos das falas relacionadas com esta categoria são ilustrados no Quadro 4.

Quadro 4 – Categoria Dobra-Lugares

Dobra-Lugares	[1] _Com duas mesas, ele precisaria de quantas cadeiras? <i>_De oito?</i> (demonstrando dúvida).
	[3] _Com duas mesas, quantos lugares ele vai ter agora? <i>_Oito.</i> _E com três mesas? <i>_Vai dá nove.</i> _E como é que tu pensou para dar nove? <i>_Porque três mais três mais três dá nove.</i>
	[4] _Se ele juntar duas mesas, quantos lugares vai ter? <i>_Oito lugares.</i>
	[14] _Quantos lugares tu acha que vai ter com duas mesas juntas? <i>_Oito. Deu oito.</i>
	[15] _Se ele juntar uma outra mesa, quantos lugares ele vai ter? <i>_Oito.</i>
	[19] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? <i>_Oito.</i>
	[20] _Se ele juntar uma outra mesa, quantos lugares tu acha que ele vai conseguir? <i>_Oito.</i>

Fonte: Autoria própria.

A fim de aprofundar mais a questão da regra de associação entre o número de cadeiras e mesas, perguntou-se para o estudante [3] quantos lugares seriam necessários ao adicionar mais outra mesa. Ele responde que daria nove “porque três mais três mais três dá nove”. Curiosamente, neste caso, ele parte de três lugares iniciais, ainda que tenha manuseado a mesa inicialmente com quatro lugares.

Com relação aos procedimentos adotados pelos estudantes [1], [4], [14], [15], [19] e [20], destaca-se que não foi levado em consideração o fato de que as mesas deveriam estar juntas, o que fez com que simplesmente as cadeiras fossem colocadas em duas mesas, separadamente. Em alguns casos, após o pesquisador chamar a atenção

para este fato, a regra de associação foi alterada, e o procedimento de dobrar o número de lugares era abandonado. Destaca-se também a necessidade lógica de manusear e precisar ver, de fato, as cadeiras nas duas mesas para chegar a uma conclusão sobre o número de lugares.

O tipo de procedimento mais utilizado pelos estudantes foi o que denominamos Junta-Mesas, escolhido por 14 participantes. Este procedimento consistia em juntar as mesas e contar o número de lugares, conforme é apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 – Categoria Junta-Mesas

Junta-Mesas	[5] _Com duas mesas quantos lugares ele consegue? <i>_Seis.</i> [6] _Com duas mesas, quantos lugares ele consegue? <i>_Seis cadeiras.</i> [7] _Com duas mesas, quantos lugares ele tem? <i>_Oito.</i> _Mas quantas cadeiras tem aqui? <i>_Uma, duas, três, quatro, cinco, seis.</i> _então é seis ou é oito? <i>_Seis.</i> [8] Ele viu que se ele colocar mais uma mesa, ele consegue mais lugares. Quantos lugares têm aqui agora. (e junta duas mesas) <i>_Sete.</i> _Não, não, conta aí direitinho. <i>_Ah é, seis.</i> _Se ele colocar mais uma mesa, quantos lugares ele vai ter? <i>_Nove!</i> _Tu podes me mostrar os nove? <i>_Aqui, com mais três cadeiras (e começa a montar outra mesa ao lado das duas).</i> _Tá, mas tu não juntou né? <i>_Ah é, aqui dá oito.</i> [9] Se ele juntar duas, quantos lugares eles vai ter aqui? <i>_Seis.</i> [10] _Quantos lugares ele vai ter então com duas mesas? <i>_Seis.</i> [12] _Quantos lugares ele consegue com duas mesas? <i>_Cinco, não, seis.</i> [13] _Quantos lugar vai ter se ele juntar duas mesas? <i>_Seis.</i> [16] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? <i>_Seis.</i> [17] _Se ele quiser juntar uma outra mesa, quantos lugares ele vai ter? <i>_Seis.</i> _Como é tu fez a conta? Pode pegar aqui as mesas, as cadeiras. <i>_Um dois, três, quatro, cinco, seis</i> (apontando e contando os lugares). [18] _Se ele juntar mais uma mesa nessa daqui, quantos lugares ele vai ter? <i>_Nove.</i> _Por que nove? Tu pode me mostrar aqui com essa mesa e essas cadeiras, se quiser (a estudante faz vários testes com as mesas e cadeiras). E aí, quantos lugares vai ter? <i>_Seis.</i> [22] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? <i>_Oito.</i> _Tu pode mostrar para mim os oito? (o estudante junta as mesas, e percebe diferença da sua resposta). _Então quantos lugares tem? <i>_Cinco.</i> _Tem certeza? (o estudante olha para a mesa, e conta novamente as cadeiras). <i>_Seis.</i> [23] _Se ele juntar as mesas, quantos lugares ele vai ter com duas mesas? <i>_Oito.</i> _Tu pode mostrar para mim? <i>_É, porque se juntar essa mesa com essa daí vai ficar assim.</i> _Tu não juntou as mesas tem que juntar as mesas. <i>_Ah é, assim?</i> _Isso. <i>_Daí coloco essa aqui, essa.</i> _Essa cadeira aqui ficou no meio das mesas, daí não pode, tem que ficar num lugar só. <i>_Ah tá.</i> _Quantas tem aí com duas mesas? <i>_Seis.</i> [24] _Se ele quiser colocar outra mesa aí, juntar as mesas, duas mesas, quantos lugares ele vai ter? <i>_Oito.</i> _Tu pode mostrar para mim? <i>_Posso.</i> (depois de juntar as mesas, o estudante muda sua resposta). <i>_Não, seis.</i>
---------------------------	--

Fonte: Autoria própria.

Os estudantes que apresentaram procedimentos classificados como Junta-Mesas chegaram à resposta correta, devido

ao fato de perceberem a necessidade de encostar uma mesa na outra, e ainda, utilizar

a contagem de um até seis para responder à pergunta realizada pelo pesquisador.

Ressalta-se que o procedimento de juntar as mesas foi mais decisivo do que a obtenção da regra de associação entre o número de mesas e lugares, como pode ser percebido pelas falas do estudante [8], que só consegue acertar o número de lugares para duas e três mesas após contar, com o dedo apontado para as cadeiras, os lugares ao redor da mesa.

Alguns estudantes, como o estudante [23], colocaram uma cadeira no espaço entre duas mesas, o que não era permitido, conforme esclarecimento do pesquisador. Assim, a disposição das cadeiras, além da junção das mesas, também foi determinante para o acerto, mais do que a tentativa de formular uma regra de associação entre as duas grandezas.

Vários estudantes tentaram responder sem manipular as cadeiras e as mesas, porém alteraram suas respostas assim que realizaram a disposição física dos lugares, o que demonstra forte dependência manipulativa para responder a questões que envolvam o pensamento funcional. Este foi o caso dos estudantes [1], [7], [8], [12], [18] e [22].

Discussão das Categorias à Luz das Estratégias

O problema das mesas foi adaptado para esta pesquisa, do trabalho de Blanton *et al.* (2015), sem muitas alterações, sendo essencialmente a mesma proposta daqueles autores. Blanton *et al.* (2015) constataram o uso de duas estratégias na resolução deste problema: pensamento recursivo e pensamento covariacional.

O *pensamento recursivo*, neste problema, se caracteriza pela necessidade de visualização das cadeiras que faltam quando se introduz a segunda mesa. Pode resultar em uma resposta correta, mas depende principalmente da percepção dos objetos concretos para agir nesta situação. Por exemplo, o estudante diz que vê dois lugares vazios depois de juntar a segunda mesa.

Já o *pensamento covariacional* se caracteriza pela previsão do resultado a partir de uma regra, a qual é construída pela criança, experimentando diferentes

configurações das mesas e cadeiras, ou dispondo mentalmente as mesas e cadeiras. Por exemplo, quando o estudante chega à conclusão de que para cada mesa adicionada, ele precisa introduzir mais duas cadeiras, isto indica que ele domina a regra de associação entre mesas e cadeiras.

Nenhum dos estudantes entrevistados nesta pesquisa apresentou espontaneamente traços de pensamento covariacional. Ao longo das entrevistas, sob intervenção do pesquisador, os participantes foram levados a formular uma regra de associação. Porém esta regra não deve ser considerada como uma estratégia espontânea. A estratégia mais sofisticada registrada em nossa coleta de dados foi o pensamento recursivo.

Pode-se dizer que as categorias Sem-Justificativa e Espacial não estão associadas com nenhuma das estratégias já conhecidas na literatura. Esses procedimentos não apresentam uma relação de causalidade. Por isso, podemos dizer que este tipo de procedimento está associado com estratégias *pré-operatórias*, ainda que não se tenha encontrado este termo no trabalho de Blanton *et al.* (2015).

Os procedimentos de Um-Lugar-Mais, Dobra-Mesas e Junta-Mesas estão relacionados com o pensamento recursivo. Os participantes que utilizaram estes tipos de procedimentos criaram uma relação entre as grandezas *mesas* e *cadeiras*. Os participantes que optaram por procedimentos de Um-Lugar-Mais e Dobra-Mesas não chegaram à resposta correta por utilizarem uma regra falsa, mas apenas o fato de compreender que deveria haver uma relação entre mesas e cadeiras já indica um entendimento de relação de causalidade, faltando apenas a verificação de consistência com os resultados da experiência de manipulação dos materiais, que não concordava com as respostas dadas pelos estudantes.

Os procedimentos da categoria Junta-Mesas se mostraram eficazes porque os estudantes que optaram por este tipo de procedimento tomaram consciência de que deveria haver concordância com a experiência prática, além de atentar para as condições estabelecidas para o problema, sobretudo o fato de que as mesas deveriam

estar juntas, o que eliminou a possibilidade de dobrar o número de lugares, e culminou na ideia de que duas cadeiras teriam que ser adicionadas.

Sendo assim, apenas estratégias pré-operatórias e de pensamento recursivo foram utilizadas pelos participantes, não sendo constatado o uso espontâneo da estratégia de pensamento covariacional.

Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

O Quadro 6, a seguir, apresenta os níveis de respostas constatadas com a aplicação da atividade. Ressalta-se que as respostas foram divididas em dois níveis principais, seguindo o critério da presença de causalidade nas estratégias associadas com os procedimentos utilizados pelos estudantes.

Quadro 6 – Níveis de Respostas da Atividade

Categoria	Descrição
Nível IA	A criança não consegue expressar uma resposta com justificativa.
Nível IB	A criança realiza uma estimativa espacial do número de lugares, sem apresentar argumentos numéricos na sua resposta.
Nível IIA	A criança acredita que para cada mesa introduzida deve-se adicionar uma cadeira, sem considerar a junção das mesas.
Nível IIB	A criança acredita que para cada mesa introduzida deve-se dobrar o número de cadeiras, sem considerar a junção das mesas.
Nível IIC	A criança percebe a importância da junção das mesas, e através de tentativas de introduzir as cadeiras, isto é, por abstração empírica, constata que para cada mesa deve-se adicionar duas cadeiras.

Fonte: Autoria própria.

Os níveis I e II estão associados, respectivamente, com estratégias pré-operatórias e recursivas. A subdivisão dos níveis foi baseada nos procedimentos utilizados pelas crianças. A relação entre procedimentos, estratégias e níveis de respostas para a atividade envolvendo recursividade algébrica está sintetizada no Quadro 7.

Quadro 7 – Procedimentos, Estratégias e Níveis de Recursividade Algébrica

Procedimento	Estratégia	Nível
Sem-Justificativa	→ Pré-Operatória	→ IA
Espacial	→ Pré-Operatória	→ IB
Um-Lugar-Mais	→ Recursiva	→ IIA
Dobra-Lugares	→ Recursiva	→ IIB
Junta-Mesas	→ Recursiva	→ IIC

Fonte: Autoria própria.

Com relação aos invariantes operatórios, podemos dizer que as estratégias recursivas apresentaram três tipos de teoremas-em-ação, os quais foram fundamentados em três respectivos conceitos-em-ação.

O primeiro teorema-em-ação que destacamos é “regra de associar acrescentando um”, que está baseado em um raciocínio direto de proporção unitária. Para cada unidade de determinada grandeza, deve-se adicionar um na outra, nesta perspectiva. Percebe-se aqui um distanciamento da situação, maior uso de abstração reflexiva, sem atentar para as especificidades da realidade apresentada. Neste caso, este teorema-em-ação está baseado no conceito-em-ação “relação biúnivoca entre grandezas”.

O segundo teorema-em-ação é a “regra de dobrar as quantidades”. Neste teorema-em-ação está presente a ideia de proporção. No entanto, existe a observação aqui de algumas propriedades dos objetos. No caso das mesas, os estudantes que utilizaram este teorema-em-ação são capazes de perceber que uma mesa tem quatro lugares, logo, duas mesas têm oito lugares. O fato de as mesas precisarem estar juntas não é levado em consideração. Podemos dizer que este segundo teorema-em-ação está baseado no conceito-em-ação “existência de relação proporcional entre quaisquer grandezas”. Na situação apresentada, a relação entre as grandezas propostas não é proporcional, sendo exatamente isto que caracteriza o problema como uma oportunidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico funcional.

O terceiro teorema-em-ação é caracterizado pela forte dependência da realidade observada nas estratégias utilizadas pelos participantes. O fato de

considerarem a junção das mesas acaba se sobrepondo à construção da regra matemática, fazendo com que os estudantes construam, de forma autônoma, uma nova regra a partir da realidade observada. Podemos dizer que houve uso do teorema-em-ação “construção da regra a partir da realidade observada”. Este teorema-em-ação está baseado no conceito-em-ação “necessidade de experimentar para inferir a regra”.

Considerações finais

Pode-se explicar a dificuldade de alguns estudantes para atingir o nível mais elevado de respostas pelo fato de que a relação de *comparar* quantidades é uma relação ternária, isto é, que liga três elementos entre si, já que o número de seis cadeiras é dois *a mais* que quatro. Esta é uma relação mais complexa que a relação binária “seis é maior que quatro”, por exemplo, que representa a ligação de apenas dois elementos.

Foi constatado o uso de seis invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “regra de associar acrescentando um”, “regra de dobrar as quantidades” e “construção da regra a partir da realidade observada”; e os conceitos-em-ação “relação biunívoca entre grandezas”, “existência de relação proporcional entre quaisquer grandezas” e “necessidade de experimentar para inferir a regra”.

Referências

- BECK, V. C.; SILVA, J. A. Pensamento Algébrico Funcional: O Uso da Previsão de Resultados em Problemas Aditivos. **Teoria e Prática da Educação**, v.18, p.69-78, 2015.
- BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.
- BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; GARDINER, A. M.; ISLER, I.; KIM, J.-S. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.46, n.1, p.39-87, 2015.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496p.
- BRASIL. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 2012.
- CANAVARRO, A. P. O Pensamento Algébrico na Aprendizagem Matemática nos Primeiros Anos. **Quadrante**, v.16, n.2, p.81-118, 2007.
- CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; FRANKE, M. L. ZERINGUE, J. K. Algebra in the elementary school: developing relational thinking. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v.37, n.1, p.53-59, 2005.
- DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. Tradução de Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- FUJII, T.; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. In: GREENES, C.; RUBENSTEIN, R. (Eds). **Algebra and algebraic thinking in school: Seventieth Yearbook**, (p.127-149). National Council of Teachers of Mathematics. VA, Reston, 2008.
- IRWIN, K. C.; BRITT, M. S. The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zeland Numeracy Project. **Education Studies in Mathematics**, v.58, n.2, p.169-188, 2005.
- STEPHENS, M.; WANG, X. Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and 7 students from Australia and China. **Journal of Mathematics Education**, v.1, n.1, p.28-39, 2008.
- VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 3.ed. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.
- VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v.10, n.2-3, p.133-170, 1990.
- VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T. & BRYNT, P. (Eds.) **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Psychology Press Ltd, Hove (East Sussex), 1997.

Vinicius Carvalho Beck: Instituto Federal Sul-rio-grandense - IFSUL, Campus Pelotas – Visconde da Graça, Pelotas, RS, Brasil. E-mail: contato.viniciusbeck@gmail.com

João Alberto da Silva: Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Campus Carreiros, Rio Grande, RS, Brasil. E-mail: joaosilva@furg.br