MODELO MATEMÁTICO DA CONCENTRAÇÃO DE COCAÍNA NO ORGANISMO HUMANO: MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Eleni Bisognin* - *UNIFRA*
Vanilde Bisognin* - UNIFRA
Oswaldo Alonso Rays* - UNIFRA

Resumo

Neste trabalho utiliza-se a Modelagem Matemática como estratégia para o ensino de Matemática. Essa metodologia é utilizada para descrever o estudo de questões relacionadas ao tema: Efeito da Cocaína no Organismo Humano. É construído um modelo matemático que descreve a concentração da cocaína no organismo humano após seu consumo considerando-se os diferentes modos de ingestão. Conclui-se, pelos resultados obtidos, que a modelagem matemática está entre as estratégias de ensino que possibilitam a aprendizagem da matemática de forma contextualizada e que é possível ensinar matemática "fazendo matemática"com o aprendiz de matemática, a partir de uma situação (problema) concreta.

Palavras -Chave: Modelagem Matemática, Ensino de Matemática

Introdução

A Modelagem Matemática é um método de pesquisa amplamente utilizado em Matemática Aplicada que procura entender, propor e resolver problemas do mundo real. A complexidade das situações reais que se apresentam em diferentes ambientes socioculturais e educacionais requer, muitas vezes, tanto para o seu entendimento como para a sua solução, o envolvimento, de equipes interdisciplinares de diferentes áreas como a Física, Química, Informática, Economia, Ecologia, etc... .Situações-problema envolvendo inúmeras variáveis são, cada vez mais, estudadas por equipes multidisciplinares e têm trazido avanços significativos à pesquisa matemática e demais áreas. O trabalho coletivo de variadas equipes de pesquisadores tem permitido a obtenção de resultados inovadores e impulsionado o avanço da ciência e da tecnologia.Nesse contexto, o foco central é a construção de modelos matemáticos que permitam a criação de novos conceitos e teorias matemáticas.

As práticas utilizadas na pesquisa em Matemática Aplicada têm influenciado fortemente o uso da Modelagem Matemática na sala de aula como metodologia de ensino e envolve, num trabalho participativo, alunos e professores na busca de soluções de problemas oriundos da realidade social.

Nos últimos anos, tanto no Brasil como em outros países do mundo, a Modelagem Matemática tem sido usada como uma excelente estratégia de ensino-aprendizagem de matemática para os alunos nos diversos níveis de ensino.Segundo Bassanezi, apud Barbosa, (2001, p.2) um modelo matemático é "quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc...,obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas ao fenômeno sobre análise". Embora essa idéia conceitual sobre modelo matemático envolva apenas questões ligadas à matemática, a Modelagem, como estratégia de ensino, permite ir além das questões puramente matemáticas. Problemas que afetam a sociedade como, por exemplo, drogas, alcoolismo etc..., podem ser

* Professores no Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – UNIFRA.

tratados em sala de aula e permitem trabalhar conteúdos matemáticos e, ao mesmo tempo, explorar conhecimentos diversos relacionados ao tema. A exploração de conhecimentos correlatos ao tema em estudo oportuniza a formação de alunos críticos e capazes de refletir sobre os problemas que afetam suas vidas e a sociedade.

Acredita-se que a Modelagem Matemática é um caminho para a superação dos problemas ligados ao ensino de matemática tais como desmotivação, evasão e reprovação. Essa crença está ligada ao fato de que essa estratégia de ensino torna a matemática mais interessante uma vez que oportuniza ao aluno envolver-se com a construção, exploração, análise e validação de modelos matemáticos dando, assim, significado à matemática.

Outro aspecto decorrente da utilização da Modelagem Matemática é que esta metodologia possibilita a interação e a cooperação entre alunos e entre professores e alunos.Segundo Almeida e Brito (2003, p.3)

> a Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento.Por outro lado a relação com a sociedade também pode ser estimulada pois os problemas estudados têm na sociedade sua origem.

O ensino de matemática, por meio da Modelagem Matemática, proporciona ao aluno o contato com problemas reais e desenvolve a capacidade de resolvê-los. Conforme Bassanezi (2002,p.16) "a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Ela faz a ligação entre a matemática e o mundo e oportuniza a unidade dialética teoria-prática-teoria...

Entre as alternativas didáticas para o emprego da modelagem no ensino de matemática está a Pedagogia de Projetos. A Pedagogia de Projetos, a nosso ver, é um recurso pedagógico que contribui para a apropriação do conhecimento matemático, de forma concreta, a partir do planejamento de operações cognitivas básicas . A filosofia da Pedagogia de Projetos evoca uma filosofia de ação daquilo que é lançado para diante. Trata-se assim da projeção do futuro apoiada num contexto sóciocultural concreto e da previsão de determinados meios para atingir objetivos de ensino por meio de atividades didáticas sucessivas que culminem na aprendizagem do saber sistematizado, de atitudes, habilidades e capacidades.

O ensino de Matemática, no mundo da nova racionalidade científica, não pode se distanciar da promoção de atividades didático-pedagógicas que estimulem o desenvolvimento das potencialidades cognitivas dos educandos. Torna-se cada vez mais urgente a projeção dessas atividades a fim de que os educandos se apropriem concretamente das funções cognitivas básicas para o aprendizado dos fundamentos essenciais do saber matemático, objetivando compreender e agir conscientemente no mundo em que vivemos. Entre essas funções cognitivas básicas para a apreensão crítica do saber matemático podemos destacar: a abstração, a memória, as sensações, a percepção, a resolução de problemas, a análise, a síntese, a comparação, a generalização, a classificação, a imaginação, a criticidade/criatividade. Essas funções cognitivas constituem-se em uma unidade dialética e são consideradas como categorias reflexivas, isto é, uma não pode ser pensada sem a outra.

A materialização didática dessas funções requer uma programação que vai além do conteúdo matemático a ser assimilado. Estamos nos referindo às possibilidades de ensinar aos educandos as capacidades e habilidades cognitivas indispensáveis à aprendizagem da matemática, isto é, as competências cognitivas básicas: aprender a pensar (desenvolver habilidades de pensamento crítico; buscar a correlação pensamento-conhecimento e conhecimento-pensamento), aprender a aprender (possibilidade de aprimorar a própria aprendizagem e refletir sobre a mesma), aprender a estudar (lugar específico dentro do aprender a aprender; pode-se estudar sem aprender e pode-se aprender sem estudar), aprender a ensinar (está entre as melhores formas de aprender), aprender a recuperar o conhecimento (recuperar o conhecimento da memória no momento oportuno de uma dada situação); aprender a aplicar no mundo exterior o que foi aprendido na escola (Torres, 2003).

A junção entre essas capacidades e habilidades cognitivas básicas e o saber matemático propiciam ao educando as bases para a resolução de problemas, estimulando o conhecimento metacognitivo, isto é, "um conhecimento sobre o conhecimento" Charlot (2000, p. 75), o raciocínio e o pensamento crítico-criativo. A modelagem matemática como estratégia de ensino, via Pedagogia de Projetos, não pode, pois, secundarizar essas capacidades e habilidades no processo didático, indispensáveis, também, para o uso das novas tecnologias da informação e da comunicação, no ensino da matemática.

Essas operações cognitivas que levam a uma aprendizagem crítica do saber matemático poderão ser adequadamente trabalhadas se estruturadas pela filosofia da Pedagogia de Projetos, distanciando-se, assim, da arbitrariedade didática. No entanto, é preciso observar que a Pedagogia de Projetos se caracteriza por duas dimensões básicas: intenção e programação. Essas duas dimensões, de acordo com Pourtois e Desmet (1997, p. 241), "(...) são indissociáveis e complementares: uma evoca intenção, a outra a organização. Seguir-se-á a sua realização e depois a sua avaliação". A Pedagogia de Projetos requer, pois, um plano de trabalho dos diferentes momentos que levam à apropriação correlacional das operações cognitivas que resultam no aprendizado crítico e contextualizado do saber matemático.

Neste trabalho considera-se o tema: O efeito da cocaína no organismo humano. O tema tem preocupado pais e educadores, nos últimos tempos, devido ao aumento considerável do consumo de drogas por jovens cada vez mais jovens que desconhecem ou desconsideram o efeito nocivo que a droga causa ao organismo humano. Como contribuição ao estudo são construídos e analisados os modelos matemáticos que descrevem o efeito da concentração de cocaína no sangue, considerando os diferentes modos de ingestão de uma quantidade da droga ; faz-se uma análise comparativa dos modelos e sugerem-se atividades que permitam a compreensão do tema no aspecto social e ao mesmo tempo a compreensão de conteúdos matemáticos relacionados ao Cálculo Diferencial e ao Método de Regressão Linear; propicia-se também o desenvolvimento de atividades interdisciplinares relacionadas à ética e à saúde afim de ressaltar a possibilidade da importância do uso da modelagem no ensino de matemática.

Modelo Matemático da Concentração de Cocaína

Nesta seção, são estudados os modelos matemáticos que descrevem a concentração no sangue, com o passar do tempo, de uma quantidade de cocaína ingerida levando-se em consideração os diferentes modos de ingestão: intravenosa, oral, pulmonar e nasal.

Ao ingerir-se uma droga, a quantidade ingerida se dilui no organismo e com o passar do tempo ela é eliminada ou por excreção direta ou por decomposição química.

A cocaína é uma substância extraída das folhas de um arbusto nativo em alguns países andinos, especialmente Peru, Bolívia, Colômbia e no noroeste da região Amazônica. O conteúdo de cocaína nas folhas de coca oscila de 0,5% a 2% e depois de extraída, ela é transformada por meio de misturas químicas permitindo os diversos tipos de ingestão. A ingestão de cocaína, por via nasal, é a preferida pelos consumidores pois é mais facilmente encontrada e também é a forma mais barata de aquisição.

A dose média de ingestão da droga pelos consumidores é variável e o efeito de euforia tem tempos de duração distintos dependendo do modo de ingestão.Depois de ingerida, a droga atinge um pico de concentração no sangue, quando o efeito de euforia é mais intenso. Esse pico é atingido mais rapidamente quando a droga é ingerida de forma intravenosa, seguindo-se a forma pulmonar, após a oral e por último a forma nasal. A média de absorção pelo organismo da quantidade de droga ingerida é de 90%, restando em cada dose um resíduo de aproximadamente 10% o qual causa um efeito cumulativo.

1.1- Levantamento de Dados

Para construir o modelo matemático que descreve o efeito da cocaína no organismo humano, o primeiro passo consiste na busca de dados sobre a concentração de cocaína no sangue com o decorrer do tempo.Os dados constantes nas tabelas, a seguir, foram obtidos em Baselt e Cravey (1995) e Larini (1995), que representam a média aritmética dos dados obtidos com um grupo de voluntários, usuários de drogas, após o consumo da mesma, considerando as diferentes formas de ingestão. O valor 100 representa o percentual máximo de concentração plasmática. Os dados da Tabela1, a seguir, correspondem à concentração de cocaína no sangue considerando a forma de ingestão intravenosa.

Tabela 1- Ingestão Intravenosa

Tempo = t t (minutos)	0	5	12	15	18	25	35	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Concentração C(%)	0	40	80	100	85	77	60	52	42	35	30	25	20	17	15	10

1.2-Representação Gráfica dos Dados

Tendo como objetivo a determinação do modelo matemático que expressa a concentração da droga no organismo com o passar do tempo, são representados graficamente os dados da Tabela 1 para encontrar a curva de tendência desses dados.

A Figura 1 abaixo apresenta a tendência dos dados da Tabela 1.

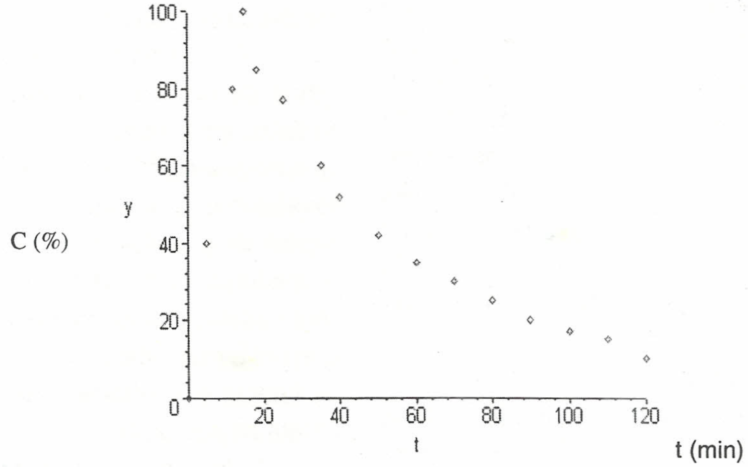

Figura 1

Os dados representados graficamente na Figura1, fornecem informações sobre o comportamento da função $C = C(t)$,na qual t indica o tempo,que descreve a concentração plasmática de cocaína no sangue. Observa-se que os dados indicam que a função atinge o valor máximo em aproximadamente 15 minutos. Após esse período começa a decair lentamente e, passados 120 minutos (2 h), observa-se que o efeito da droga ainda é sentido.

Os dados representados na Figura1 sugerem uma curva que envolve um crescimento inicial e, após atingir o valor máximo, ela decresce vagarosamente. Uma função que descreve esse comportamento tem a seguinte forma:

$$C(t) = A\, t^{p} b^{t}$$

em que os parâmetros A , p e b são positivos com $0 < b < 1$ e devem ser determinados. A função $C = C(t)$ é o produto da função potência t^p com a função exponencial b^t, para $t \geq 0$ e $p > 0$. A função t^p é responsável pelo crescimento da função C e, a função b^t, com $0 < b < 1$, é responsável pelo decrescimento da mesma. O coeficiente A determina a altura máxima da curva, e, o expoente p, determina a localização do valor máximo da função.A função é derivável e seu máximo é atingido no ponto $t = -\frac{p}{\log b}$

Como $0 < b < 1$, resulta que $\log b$ é um valor negativo e, portanto, t é positivo.

Com o objetivo de obter um modelo contínuo que descreve a concentração plasmática de cocaína no sangue , a etapa seguinte consiste na determinação dos valores dos parâmetros A, p e b, de modo a obter uma curva que aproxima os dados constantes na Tabela1. Para obtenção desses valores é utilizado o método de Regressão Linear Múltipla, conforme descrito em Fonseca,Martins e Toledo (1995) .

Dada a função $C(t) = A\, t^{p} b^{t}$,aplicando a função log a ambos os membros da equação, obtém-se

$$\log(C) = \log(A\, t^{p} b^{t}) = \log(A) + p \log(t) + t \log(b).$$

Portanto, se C é uma função de t, $\log(C)$ é uma função de t e de $\log(t)$.Porque $\log(C)$ é uma função linear de t e de $\log(t)$ pode-se usar o Método de Regressão Linear.

Fazendo $X_1 = t$, $X_2 = \log(t)$, $Y = \log(c)$, $a = \log(A)$, $b_1 = \log(b)$ e $b_2 = p$, o problema consiste em determinar os parâmetros a, b_1, b_2 tais que $Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$.

Indicado por

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n},\quad \bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n},\quad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$$

e definindo

$$SY_1 = \sum YX_1 - \frac{\sum X_1 \sum Y}{n},\quad SY_2 = \sum YX_2 - \frac{\sum X_2 \sum}{n}$$

$$S_{11} = \sum (X_1)^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n},\quad S_{12} = \sum X_1X_2 - \frac{\sum X_1 \sum}{n}$$

$$S_{22} = \sum (X_2)^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

segue que os coeficientes procurados são dados por:

$$b_1 = \frac{\frac{SY_2}{S_{22}} - \frac{SY_1}{S_{11}}}{\frac{S_{22}}{S_{12}} - \frac{S_{12}}{S_{11}}},\quad b_2 = \frac{SY_2}{S_{21}} - \frac{S_{22}}{S_{21}} b_1 \quad \text{e} \quad a = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 -$$

A partir dos dados constantes da Tabela1 e com o auxílio do software SPSS (Statistical Package for Social Science) (pode ser usado outro software que permita efetuar os cálculos) , encontram-se os valores aproximados dos parâmetros A,p e b, dados por:

$$A = 10{,}54\ ,\ b = 0{,}95 \ \text{ e } \ p = 1{,}05.$$

Portanto, a curva que aproxima os dados constantes da Tabela1 é

$$C(t) = 10{,}54\, t^{1{,}05} (0{,}95)^{t}$$

que representa o modelo contínuo que descreve a concentração plasmática da cocaína no sangue quando a ingestão se dá na forma intravenosa.

A Figura 2, a seguir, mostra o gráfico dos pontos da Tabela1 e da função C que aproxima os dados.

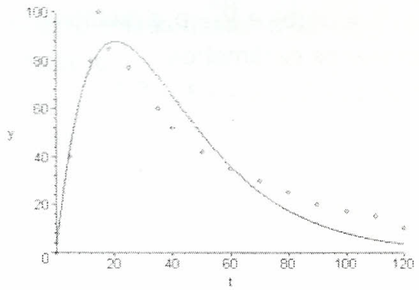

Figura 2

Analisando-se o gráfico do modelo contínuo observa-se que ele é uma boa aproximação da curva de tendência representativa dos dados da Tabela1.

Além da forma intravenosa, a cocaína pode ser ingerida de outros modos:na forma pulmonar, pelo uso de cigarros; na forma nasal,cheirando, e na forma oral, mascando. A Figura3 abaixo, mostra o comportamento da concentração de cocaína no sangue, considerando concomitantemente, os diferentes tipos de ingestão: intravenosa, pulmonar, oral e nasal.

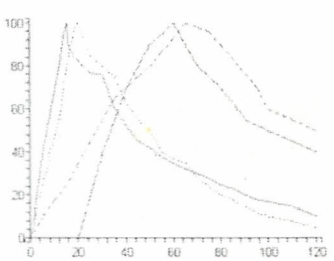

Figura 3

Legenda:

______________ Intravenosa
.... Pulmonar
- - - - - - - - - - Nasal
• • • • • • • • • • Oral

O gráfico acima mostra que as formas intravenosa e pulmonar são aquelas em que o pico da concentração plasmática é atingido mais rapidamente, porém, a ingestão nas formas oral e nasal apresenta um efeito mais prolongado.Seguindo as mesmas etapas de construção do modelo anterior, obtém-se os modelos matemáticos que aproximam os dados da concentração da droga no organismo para as demais formas de ingestão.

Para o caso do uso da cocaína na forma de cigarro (ingestão pulmonar) obtém-se o modelo

$$C_1(t) = 9{,}5\, t^{1{,}1} (0{,}95)^{t}$$

Nos casos de ingestão nasal e oral têm-se os modelos

$$C_2 = 2{,}2\, t^{1{,}15} (0{,}98)^{t}$$

$$C_3 = 0{,}23\, (t-20)^{2{,}2} (0{,}95)^{t-20}$$

respectivamente.

1.3-Análise dos Resultados

Os resultados obtidos permitem fazer a seguinte análise:

a) A ingestão de cocaína por via intravenosa é aquela que atinge o pico plasmático mais rapidamente. Aproximadamente quinze minutos após a ingestão a concentração da cocaína atinge o pico máximo. Essa forma de ingestão é a preferida pelos usuários dependentes da droga, uma vez que, em poucos minutos, é atingido o estado máximo de euforia.

A informação referente ao pico máximo de concentração pode ser obtida utilizando-se as técnicas da determinação de pontos de máximo e de mínimos por meio da derivada da função C. Observa-se que o ponto em que acontece o pico plasmático é um ponto de máximo da função, portanto, nesse ponto, a derivada é nula.No caso de ingestão na forma pulmonar, o estado máximo de euforia acontece aproximadamente vinte minutos após o consumo.

b) No caso da ingestão por via oral e por via nasal o pico plasmático acontece aproximadamente sessenta minutos após a ingestão .

c) Quando a cocaína é usada por via oral o efeito da droga começa a ser sentido somente vinte minutos após o consumo.

Embora as formas de utilização oral e nasal façam com que o pico do efeito da cocaína aconteça aproximadamente uma hora após a ingestão,seu efeito no organismo é mais prolongado, ou seja, o decaimento da curva representativa do modelo matemático é mais suave.

Os modelos matemáticos obtidos permitem ainda explorar outras questões tais como: analisar os intervalos de crescimento ou de decrescimento da função; explorar o significado do comportamento da mesma no contexto do problema estudado;analisar a existência de pontos de inflexão destacando seus significados; representar graficamente os modelos descritos pelas funções oportunizando o desenvolvimento de habilidades com o uso de novas tecnologias.

Além das questões matemáticas outras atividades podem ser propostas tais como:estabelecer uma discussão, em sala de aula, sobre o efeito cumulativo no organismo,do resíduo de cada dose da droga ingerida e dos malefícios que causam ao homem;fazer uma pesquisa sobre outras plantas que dão origem a drogas e que consequências elas causam ao organismo humano; entrevistar pessoas, que possuem familiares usuários de drogas, para relatar os problemas vividos, na forma escrita e oral.

A busca de respostas a essas ou outras questões propicia aos alunos desenvolverem conhecimentos matemáticos e se envolverem com o " fazer matemática",explorando situações relativas a um tema de interesse social que podem ser "matematizadas". Permite ainda que os alunos efetuem conjecturas e usem argumentos lógicos para provar essas conjecturas , construindo desse modo, novos caminhos para usar os conhecimentos matemáticos e resolver problemas.

Considerações Finais

Os resultados obtidos justificam o porquê da Modelagem Matemática ser uma excelente estratégia de ensino-aprendizagem no ensino de matemática. Esta metodologia possibilita a integração entre conteúdos curriculares de todas as áreas do conhecimento e problemas vividos pela sociedade.O problema das drogas é um tema presente no cotidiano da comunidade escolar, em todos os níveis de ensino.Além disso, o trabalho em sala de aula,com a utilização dessa metodologia, propicia:

a) a integração profunda entre o trabalho dos alunos e do professor;

b) a análise de problemas concretos da realidade dos alunos, oportunizando o uso do conhecimento adquirido na busca de soluções;

c) a participação ativa dos alunos, pois permite a quebra da passividade e da desmotivação freqüente nas aulas dematemática;

d) a interdisciplinaridade, pois permite a integração de conteúdos, resultados e informações de outras áreas;

e) a contextualização da matemática pela proposição, resolução e análise de problemas reais que afetam a sociedade ;

f) o comprometimento do aluno com sua formação.

A técnica usada para a obtenção dos modelos aqui estudados, foge aos níveis do Ensino Fundamental e Médio, mas pode ser trabalhada no ensino superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

O uso de novas tecnologias da informação é um fator central para o desenvolvimento de atividades em Modelagem Matemática.Nesse trabalho foi usado o software Maple para elaboração de gráficos e o software SPSS (Statistical Package for Social Science) para os cálculos dos parâmetros no Método de Regressão Linear Múltipla. A aproximação de curvas requer um grande número de operações matemáticas e, por isso, o apoio computacional é fundamental para elaboração de gráficos e tabelas que permitem a comparação dos dados e, por conseguinte, a validação dos modelos encontrados.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA,Lourdes Maria Werle ;BRITO,Dirceu dos Santos.Modelagem Matemática na sala de aula: algumas implicações para o ensino e aprendizagem da Matemática, In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 10,2003, Blumenau.**Anais.** Blumenau:CIAEM, 2003.p.3.

BARBOSA,Jonei Cerqueira.Modelagem na Educação Matemática:Contribuições para o Debate.In: Reunião Anual da ANPED,24,2001,Caxambu.**Anais**. Caxambu:ANPED,2001.p.2.

BASELT,Randall;CRAVEY,Robert. **Disposition of toxic drug and chemicals in man**,Foster City:Chemical Toxicology Institute,1995.p.713-717.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**.São Paulo: Editora Contexto,2002.

CHARLOT, Bernard. **Da relação com o saber: elementos para uma teoria**. Porto Alegre: ArTmed, 2000.

FONSECA, Jairo Simon;MARTINS,Gilberto deAndrade;TOLEDO,Geraldo Luciano.**Estatística Aplicada.** São Paulo: Editora Atlas,1995.

LARINI, Lourival.**Toxicologia**. 3ª Edição.São Paulo: Manole,1995.

POURTOIS, Jean Pierre; DESMET, Huguette. **A educação pós-moderna**. Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

TORRES, Rosa Maria. **Que (e como) é necessário aprender?** 5ª ed. Campinas: Papirus, 2003.