

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: ÁGUA-UM PROJETO DE ENSINO

Cristina Medianeira de Souza Chaves*

Lozicler Maria Moro dos Santos*

Eleni Bisognin**

Resumo

Neste trabalho é utilizada a modelagem matemática para construção de um modelo matemático que descreve o valor a pagar, em função do consumo mensal de água, tendo como referência dados obtidos nos demonstrativos mensais fornecidos pela Companhia Riograndense de Saneamento. A escolha do tema "Água", para o desenvolvimento de um projeto de ensino de matemática deve-se à sua relevância à vida humana e para o meio ambiente. A proposta deste trabalho envolve questões específicas do conteúdo matemático, e aborda também questões ambientais, o uso racional da água, a preservação da natureza, a redução do desperdício e o valor pago pelo consumo mensal de água.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática, Modelagem Matemática.

Introdução

A Declaração dos Direitos das Águas, publicada no Jornal da Educação e Cultura (2003, nº 117), no seu artigo primeiro diz: "Fica decretado, a partir de agora, que homens, mulheres e crianças respeitarão rios, lagos, represas, cachoeiras, riachos, córregos e ribeirões, pois deles vem a água que bebemos, que irriga nossas plantações, dá vida às flores, cura nossas dores, limpa nossas feridas, refresca nosso corpo, acalma nossas emoções e revigora nossa alma".

Com essa citação quer-se enfatizar a importância do tema escolhido para elaboração de uma proposta de trabalho, por meio de um projeto de ensino que, além de abordar questões matemáticas, aborda também questões ambientais. É utilizada a modelagem matemática para se obter o modelo matemático que relaciona o valor a pagar com a quantidade de metros cúbicos de água consumidos, considerando-se valores médios dos demonstrativos de consumo mensal de água de uma residência. A análise desse modelo propicia a exploração da função quadrática, suas propriedades e aplicações.

A modelagem matemática, segundo (Barbosa,2001,p.6), "é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática,situações oriundas de outras áreas da realidade". Como estratégia de ensino-aprendizagem, a modelagem matemática tem como objetivo romper com a passividade do aluno e propiciar-lhe situações investigativas, dando-lhe chance de analisar e refletir sobre problemas reais que interferem na sua vida, além de fazer com que ele se sinta participante na construção do conhecimento e responsável pela sua aprendizagem, pois, as discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo da sociedade em que vive (Bassanezi,2002)

* Alunas do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria,RS.

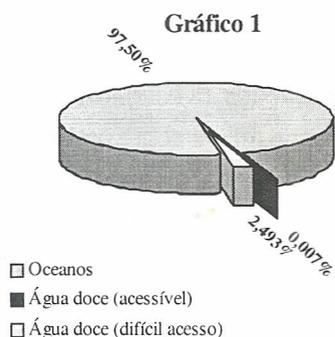
** Professora do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria,RS. E-mail: eleni@unifra.br

A distribuição de água no mundo

Segundo cálculos da Organização das Nações Unidas, dentro de 25 anos, 2,8 bilhões de pessoas viverão em regiões de seca crônica (Superinteressante, 2000, Edição Julho). Durante o Habitat 2, a conferência das Nações Unidas sobre as cidades, realizada em Istambul, Turquia, em junho de 1996, especialistas estimaram que metade da água potável dos países em desenvolvimento vem sendo ilegalmente desviada ou desperdiçada. No caso do Brasil, nosso país possui por volta de 12% das reservas de água no mundo, porém, 80% dos mananciais se localizam na Amazônia, região que concentra apenas 5% da população brasileira.

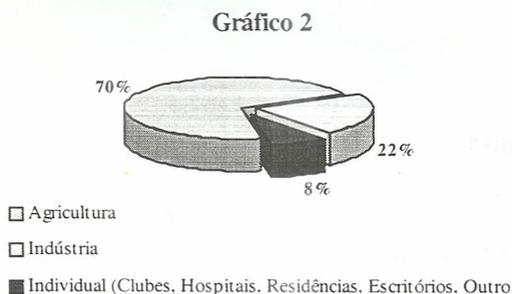
Restam 20% para abastecer 95% dos brasileiros. Ainda, segundo a revista Superinteressante, a perda média da produção de água tratada no País é de 40%.

Analisando o Gráfico 1, a seguir, vê-se que 97,50% da disponibilidade mundial de água é salgada, 2,493% é de água doce, os quais encontram-se em regiões polares ou subterrâneas e, somente 0,007% da água disponível, é própria para o consumo humano e encontra-se em rios e lagos.



Fonte: World Resources Institute (www.wri.org)

O Gráfico 2, a seguir, mostra que somente 8% da água própria para o consumo humano, é utilizada para uso individual em residências.



Fonte: World Resources Institute (www.wri.org)

Devido à tendência de crescimento populacional no mundo, para os próximos anos ter-se-á um aumento no consumo de água, por isso a importância de programas de conscientização, de leis e orientações para a população sobre o uso racional da água.

É bom lembrar de que grandes áreas do mundo já sofrem total escassez de água. São as áreas desérticas como o Saara, no Egito, com 9.000.000 Km², o Kalahari, no Sul da África, com 260.000 Km² e o deserto de Atacama, no Chile, com 78.268 Km².

A América Latina possui a maior disponibilidade de água por habitante do mundo, como é verificado, na Tabela 1, a seguir:

Tabela 1 - Disponibilidade de Água por Hab./Região (m³)

Região	1950	1960	1970	1980	2000
África	20600	16500	21700	9400	5100
Ásia	9600	7900	6100	5100	3300
América Latina	105000	80200	61700	48800	28300
Europa	5900	5400	4900	4400	4100
América do Norte	37200	30200	25200	21300	17500
Total	178300	140200	110600	89000	58300

Fonte: N.B. Ayibotele.1992. The World Water: assessing the resource (www.agr.feis.unesp.br)

Observa-se nos dados da Tabela 1 que a disponibilidade maior de água encontra-se na América Latina e que a Europa tem a menor quantidade de água disponível por habitante.

No Brasil, 40% da água tratada é perdida. Vazamentos nas adutoras e encanamentos sem a

manutenção devida e ligações clandestinas são os grandes vilões, porém, todo cidadão é responsável por parte desse desperdício. Os dados da Tabela 2 mostram o consumo médio mundial de água, segundo a faixa de renda.

Tabela 2 - Consumo Médio Mundial de Água por Faixa de Renda

Grupo de Renda	Utilização Anual(m ³ /Habitante)
Baixa	386
Média	453
Alta	1167

Fonte: Banco Mundial (1992) (www.agr.feis.unesp.br)

Os dados da Tabela 2 mostram que o gasto de água é maior no grupo que possui maior renda e que provavelmente possui maior informação.

As perspectivas, para o próximo século, indicam um cenário de escassez de água até o ano 2050. As previsões são mostradas, na Tabela 3, a seguir.

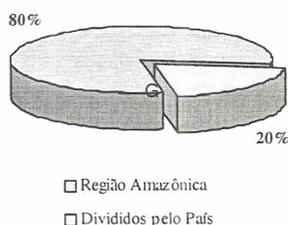
Tabela 3 - Previsões		
Ano	1999	2050
População Mundial	6.0 bilhões	9.4 bilhões
Suficiência	92%	58%
Insuficiência	5%	24%
Escassez	3%	18%

Fonte: Revista Veja, dezembro de 1998.

A população mundial, em 2050, crescerá aproximadamente 5,5% e, ao mesmo tempo, a suficiência de água decrescerá 34% restando apenas 58% de água disponível. Esses dados mostram a urgência na tomada de decisão para preservação do meio ambiente por todos os países.

O Gráfico 3, a seguir, mostra a disponibilidade brasileira de água.

Gráfico 3



Fonte: (www.deca.com.br/vitrine/água/agua.html)

Tem-se que a grande quantidade de água disponível encontra-se na região amazônica e que, uma porcentagem pequena, comparada com a disponibilidade total de água no Brasil, abastece as demais regiões brasileiras

O Brasil tem o maior aquífero conhecido no mundo, o Aquífero Guarani. Ele está localizado em rochas da Bacia Sedimentar do Paraná e ocupa uma área de mais de 1,2 milhões de km². Esse

super-aquífero estende-se pelo Brasil, (Goiás, Mato Grosso do Sul, São Paulo, Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul com 840.000 Km²), Paraguai (58.500 Km²), Uruguai (58.500 Km²) e Argentina, (255.000 Km²). Ele pode conter mais de 40 mil quilômetros cúbicos de água o que é superior a toda a água contida nos rios e lagos de todo o planeta.

Estima-se que, por ano, o Aquífero Guarani receba 160 quilômetros cúbicos de água adicional vindas da superfície. Esse é um ponto que pode ser considerado um problema ou uma solução. Se essas águas superficiais estiverem contaminadas, o aquífero será terrivelmente atingido. Atualmente, a água do aquífero Guarani já abastece muitas comunidades nos Estados do Sul e Sudeste do Brasil (www.geologo.com.br/aguahisteria.asp).

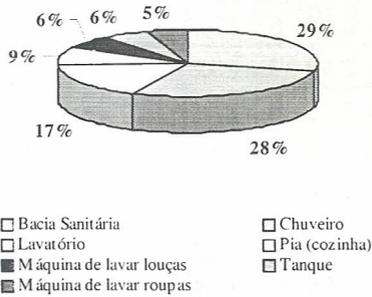
Reservatórios subterrâneos de água potável são conhecidos em todos os terrenos e regiões do Brasil. Mesmo no semi-árido do Nordeste, existem gigantescos reservatórios. Somente um deles possui um volume de 18 trilhões de metros cúbicos de água disponível para o consumo humano, volume este suficiente para abastecer toda a atual população brasileira por um período de, no mínimo, 60 anos sem reciclagem ou reaproveitamento dessa água. Segundo informações extraídas na Internet (www.geologo.com.br/aguahisteria.asp)

O potencial de descoberta de novos aquíferos, inclusive maiores do que o próprio Guarani é muito grande. É só lembrar que ¾ dos 8,5 milhões de quilômetros quadrados da superfície Brasileira correspondem a Bacias Sedimentares como a do Paraná. Todas estas bacias contêm unidades sedimentares porosas e permeáveis que podem formar excelentes aquíferos de dimensões continentais.

Experiências mostram que uma pessoa, no Brasil, gasta em média, de 50 a 200 litros de água, dependendo da região. Este consumo tem sua distribuição em chuveiros, torneiras, bacias, máquinas de lavar, entre outros, como mostra o

Gráfico 4, a seguir, o qual foi construído com dados obtidos na Internet (www.deca.com.br/vitrine/agua/agua.html). Ele mostra o consumo médio de água em uma residência, considerando-se os vários meios utilizados.

Gráfico 4



Fonte: (www.deca.com.br/vitrine/agua/agua.html)

Observa-se, no Gráfico 4, que a bacia sanitária é responsável pelo consumo da maior quantidade de água em uma residência.

Como evitar a perda de água tratada? Segundo a Sabesp, Companhia de Saneamento Básico de São Paulo, uma torneira gotejando, desperdiça 46 litros de água, num período de 24 horas. Essa quantidade é a mesma que um ser humano necessita para suprir suas necessidades diárias, considerando dados da Organização Mundial de Saúde. De acordo com o que se obteve em (www.agr.feis.unesp.br), uma abertura de 1mm, o aparentemente fiozinho de água, que escorre da torneira, será responsável pela perda de 2068 litros em 24 horas. Se a abertura da torneira for de 2mm, a perda será 4915 litros diários. Ainda segundo a Sabesp, ao lavar as mãos, são gastos aproximadamente, 7 litros, ao escovar os dentes, 18 litros, ao fazer a barba, 75 litros e para lavar os

pratos, 243 litros.

Além da preocupação com o consumo e o desperdício da água, uma outra preocupação que se tem é com o valor a pagar por esse consumo. Mostra-se, a seguir, como é realizado esse cálculo construindo um modelo matemático que relaciona o consumo de água mensal e o valor a pagar.

Modelo matemático do valor a pagar pelo consumo de água.

Para construir o modelo matemático que relaciona o valor a pagar pelo consumo de água em uma residência, partiu-se da análise do demonstrativo do consumo mensal de água fornecido pela Companhia Riograndense de Saneamento - CORSAN do Rio Grande do Sul.

A análise dos demonstrativos mostra que a leitura do consumo de água é feita subtraindo-se o número de metros cúbicos obtidos no mês anterior do número de metros cúbicos obtidos na leitura do mês atual.

Com base nos dados fornecidos pela CORSAN, em setembro de 2004, o valor em reais, a pagar pelo consumo de água é de R\$10,31, adicionados R\$ 2,18 a cada metro cúbico de água consumido, até a quantidade de 10 metros cúbicos. A partir dessa quantidade, o valor da taxa, por metro cúbico, é variável.

Tomando como referência o demonstrativo mensal de consumo de água de uma residência, apresenta-se a Tabela 4 que indica o consumo, em metros cúbicos, e o valor a pagar (em reais) correspondente.

Tabela 4 – Valor a pagar pelo consumo de água	
Consumo (m ³)	Valor a Pagar (R\$)
0	10,31
1	10,31 + 2,18 = 12,49
2	10,31 + 2,18 . 2 = 14,67
3	10,31 + 2,18 . 3 = 16,85
4	10,31 + 2,18 . 4 = 19,03
5	10,31 + 2,18 . 5 = 21,21
6	10,31 + 2,18 . 6 = 23,39
7	10,31 + 2,18 . 7 = 25,57
8	10,31 + 2,18 . 8 = 27,75
9	10,31 + 2,18 . 9 = 29,93
10	10,31 + 2,18 . 10 = 32,11
11	32,11 + (2,18 + 0,02) . 1 = 34,31
12	32,11 + (2,18 + 0,04) . 2 = 36,55
13	32,11 + (2,18 + 0,06) . 3 = 38,83
14	32,11 + (2,18 + 0,08) . 4 = 41,15
15	32,11 + (2,18 + 0,10) . 5 = 43,51

Fonte: Demonstrativos de Consumo de Água - CORSAN

Analisando a Tabela 4, tem-se que, para um consumo de até 10 metros cúbicos, o custo é obtido somando-se o valor da taxa de R\$ 10,31 com o produto do valor do metro cúbico de R\$ 2,18 pelo número de m³ consumidos. Ou seja, indicando por a função custo, em que x indica o número de m³ consumidos é, neste caso, dada por,

$$C_1(x) = 10,31 + 2,18x, \text{ para } 0 \leq x \leq 10$$

Para um consumo superior a 10 metros cúbicos, o cálculo do valor a pagar é distinto do caso anterior. A partir da Tabela-4 pode-se observar que o custo para uma quantidade superior a 10 m³ é dado pela função,

$$C_2(x) = 32,11 + (2,18 + 0,02x)(x - 10),$$

para $x > 10$

pois, nesse caso, o valor a pagar consiste na soma do valor de R\$ 32,11 que corresponde ao valor a pagar pelo consumo de 10 m³, adicionado com o produto da quantidade de m³ consumidos além de 10 m³. Das expressões de C_1 e C_2 , obtém-se o modelo matemático,

$$P(x) = 0,02x^2 + 1,98x + 10,31,$$

para $x \geq 0$

que descreve o preço que o consumidor deve pagar em função do consumo mensal de água.

Os dados da Tabela 4 permitem ainda explorar outros conteúdos matemáticos, como por exemplo, o Método de Regressão ou Ajuste de Curvas, o qual permite a construção de uma função polinomial do segundo grau que melhor aproxima

os valores tabelados. Fazendo-se um ajuste quadrático desses valores, ver (Bassanezi,2002,p.57) e, com o auxílio do software EXCEL, obtém-se a função

$$P_1(x) = 0,0188x^2 + 1,8583x + 11,252$$

Observa-se que a função P_1 , obtida por meio de um ajuste quadrático, difere muito pouco da função P , obtida simplesmente analisando o comportamento dos valores da Tabela 4.

Os Gráficos 6 e 7, a seguir, mostram os dados da Tabela 4 e a curva de tendência, respectivamente.

Gráfico 6

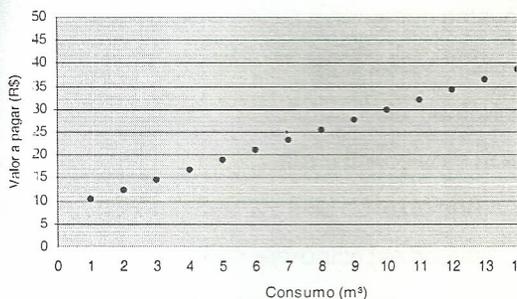
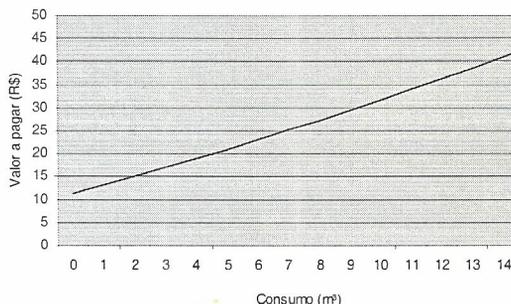


Gráfico 7



O Gráfico 7, obtido a partir dos dados da Tabela 4, mostra que o modelo quadrático é uma boa aproximação para os valores tabelados.

A construção da função quadrática P_1 oportuniza ao aluno não só o uso de um software computacional, como por exemplo o Excel, mas também fazer uma análise comparativa desse

modelo com aquele obtido anteriormente e calcular aproximadamente o erro cometido.

A análise do modelo construído propicia a exploração de atividades matemáticas tais como:

- Se o gasto mensal com o consumo de água foi de R\$ 100,00, quantos metros cúbicos foram consumidos? Essa questão propicia o estudo da função inversa.
- Se identificarmos a função $P(x) = 0,02x^2 + 1,98x + 10,31$ com a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathfrak{R}, a \neq 0$, qual é o valor e o significado dos coeficientes no contexto do problema?
- O valor mínimo gasto com o consumo de água corresponde ao valor mínimo da função $P(x)$, para $x \geq 0$?

Além das atividades matemáticas podem-se propor outras atividades tais como:

- De acordo com a Tabela 1, comparando os dados no período de 1950 a 2000, é possível descrever algumas causas da diminuição de disponibilidade de água em cada região? A porcentagem de diminuição foi a mesma? Qual a região que apresenta menor taxa de diminuição? Em que década a taxa de diminuição foi menor?
- Elaborar um relatório sobre os diversos modos de evitar o desperdício e economizar água.
- Entrevistar engenheiros responsáveis pela qualidade, distribuição e manutenção da quantidade de água da sua cidade. Promover uma discussão sobre o tema envolvendo a comunidade escolar e familiar.

Considerações Finais

Esse projeto oportuniza a exploração do tema “Água” destacando sua relevância para a vida do planeta, a necessidade de preservar o meio ambiente e a importância da conscientização da sociedade de evitar o desperdício e usar de modo

racional a água. Além do aspecto formativo e interdisciplinar, este projeto propicia o estudo da função quadrática, suas propriedades e representação gráfica e deixa a sugestão para cada professor elaborar atividades de acordo com os interesses e experiências de seus alunos. Salienta-se a importância do uso da modelagem matemática no desenvolvimento de projetos dessa natureza, pois essa metodologia propicia que alunos e professores participem ativamente de todo trabalho de forma colaborativa.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, Jonei C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 24, 2001, Caxambu. **Anais**. Caxambu: ANPED, 2001.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

DIREITO das Águas. **Jornal da Educação e Cultura**. São Paulo, Ed. Nº117, Jul. 2003.

JACOBI, Pedro. A água está se esgotando? É verdade que no futuro próximo teremos uma guerra pela água? Disponível em < www.geologo.com.br/aguahisteria.asp >. Acesso em Outubro 2004.

USO RACIONAL DA ÁGUA. Disponível em < <http://www.deca.com.br/vitrine/agua> >. Acesso em Outubro de 2004.

RECURSOS HÍDRICOS. Disponível em < www.agr.feis.unesp.br >. Acesso em Agosto de 2004.

REVISTA SUPERINTERESSANTE. Distribuição de Água no Mundo. Edição Jul. 2000.

REVISTA VEJA. Cenário de Escassez de Água. Edição Dez. 1998.