CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS

José Carlos Pinto Leivas

Resumo

Neste artigo discutimos uma questão que gera dúvidas no professor que atua no ensino fundamental e médio e também em alguns que atuam no ensino superior. A questão de poder relacionar conjuntos através do "maior ou menor" conduz ao tema de enumerabilidade de conjuntos. A cardinalidade de conjuntos finitos, de um modo geral, não suscita nenhuma dúvida, muito embora, na forma como é tratado o conjunto dos números naturais, o tema ordinal ou cardinal não fique muito bem definido. No que diz respeito a conjuntos infinitos, na maioria das vezes não é feita nenhuma distinção em termos de cardinalidade. Nosso propósito, portanto, é distinguir a cardinalidade dos conjuntos numéricos infinitos usuais, N, Z, Q e R, quando isso for possível.

1.Introdução

Na maioria das vezes, quando queremos ampliar o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros, associamos ao primeiro ponto do lado direito de uma reta, orientada a partir de um ponto inicial, caracterizado como ponto origem desta reta e ao qual fazemos corresponder o natural zero, sem entrar na questão de ser zero natural ou não. À esquerda desses colocamos outros pontos simétricos aos representados para os naturais, aos quais denominamos números inteiros negativos, dizendo que acrescentamos ao conjunto N os números negativos, obtendo um conjunto maior, Z. De forma similar, passamos ao conjunto dos números racionais Q e, a seguir, ao conjunto dos números reais, R, conforme esquema gráfico abaixo.

Em se tratando de diagramas de Venn-Euler, o problema persiste, pois também não discutimos o tamanho do diagrama em relação a quantia de elementos. Quando colocamos o diagrama do conjunto N dentro do diagrama do conjunto Z, deixamos passar a idéia de que o conjunto Z é maior do que o conjunto N. Essa falta de discussão sobre diagramas conduz a uma séria dificuldade na resolução de problemas clássicos de operações com conjuntos do tipo "numa escola há meninos e meninas, alunos ruivos e meninas não ruivas...".

Os três diagramas abaixo servem de questionamento motivador para a leitura deste artigo.

A reta numerada

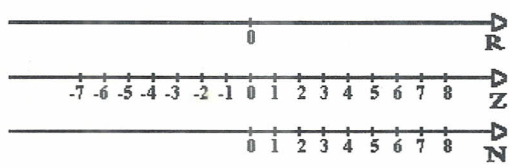
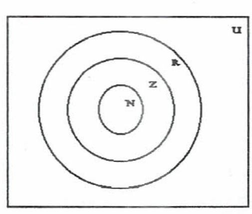


Diagrama de Venn-Euler



Relação entre Conjuntos

Quem é o maior?

N ou R

N ou Z

Z ou R

Q ou R

Por volta de 1632, Galileu chamou a atenção para o fato de que uma correspondência biunívoca pode ser estabelecida entre os conjuntos

$$\begin{array}{c} \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \ldots\} \\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow \ldots \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \{0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16\ ,\ \ldots\}, \end{array}$$

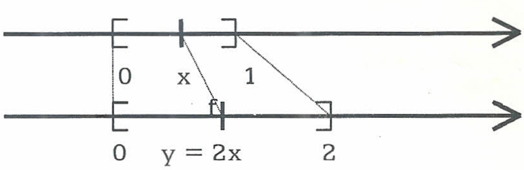
muito embora os últimos se tornem cada vez mais raros à medida que avançamos nos naturais.

Galileu não encontrou razões para considerá-los iguais, afirmando até que não era possível a comparação entre conjuntos infinitos em termos de menor, maior ou igual, erroneamente, como é sabido hoje.

Bolzano(1781-1848), tirando proveito do paradoxo de Galileu sobre correspondência 1-1 entre os conjuntos acima, mostrou que correspondências semelhantes poderiam ser feitas entre os elementos de um conjunto infinito e um subconjunto próprio. Tome o exemplo a seguir:

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,2]$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = 2x$$

Geometricamente, essa função mostra que existem tantos pontos num segmento de reta de comprimento igual a 1 unidade quantos existem num segmento de comprimento igual a 2 unidades, conduzindo à idéia de que existem tantos números reais no intervalo [0,1] quanto no [0,2].



Bolzano, por volta de 1840, percebeu que a infinidade de números reais era diferente da infinidade de números naturais.

Dedekind e Cantor (±1872,1874) chegaram à percepção de conjuntos de diferentes espécies.

Cantor se dispôs a aritmetizar a respeito de conjuntos infinitos.

Segundo ele, _*Conjuntos infinitos,*_ que podem ser colocados em correspondência biunívoca, têm o _*mesmo número cardinal.*_

A potência de um conjunto tornou-se o _*número cardinal*_ do conjunto. Assim, o _*número*_ do conjunto dos inteiros era o _*menor*_ número transfinito e o _*número*_ do conjunto dos reais ou dos pontos de uma reta era o _*maior*_ número transfinito. Cantor provou que existem infinitos números transfinitos para além de c, provando que o conjunto dos subconjuntos de um conjunto dado sempre tem _*potência*_ maior do que o próprio conjunto.

2.Conjuntos Enumeráveis

2.1.Definição

A é _*equivalente*_ ou _*eqüipotente*_ ou _*semelhante*_ à B se existe uma bijeção $f : A \longrightarrow B$.

Notação: $A \approx B$.

2.2.Exemplos:

a) $N \approx N^*$, já que $f(n) = n+1$, $n \in N = \{0,1,2,\ldots\}$.

b) $Z \approx N$, já que

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & se \quad n \geq 0 \\ -2n-1 & se \quad n < 0 \end{cases}$$

c) $I = (-1,1) \approx R$, já que $f(t) = \tan\left(\frac{\Pi}{2}t\right)$ é bijeção.

2.3.Definição

A é dito _*finito*_ se $A = \varnothing$ ou se existe $n \in N$, tal que $A \approx \{1,2,3,\ldots n\}$. Caso contrário, A é dito *infinito*. A é dito *enumerável* e tem cardinalidade χ (aleph zero), se A é eqüipotente a algum subconjunto de N* .

2.4.Exemplos

a) Todo conjunto finito é enumerável, pela própria definição.

b) Z é enumerável.

$Z \approx N \approx N^*$ (Z , N e N* têm o mesmo cardinal)

c)Uma seqüência infinita é uma função f: $N \to N^*$, dada por $f(n)=a_n$. Quando os a_n são distintos, então f: $N \to f(N)$ é uma bijeção. Assim, o conjunto dos termos de qualquer seqüência infinita $a_1, a_2, \ldots$ de termos distintos é enumerável.

d) N x N é enumerável. Escrevamos o produto da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
(0,0) & \to & (0,1) & & (0,2) & \to & (0,3)\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(1,0) & \to & (1,1) & & (1,2) & & (1,3)\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
(2,0) & & (2,1) & & (2,2) & & (2,3)\ldots \\
\end{array}$$

....

Reescrevendo N x N, seguindo as flechas obtemos a seqüência de termos distintos

(0, 0),(0, 1),(1, 0),(2, 0),(1, 1),(0, 2),(0, 3),(1, 2),...

que, pelo exemplo precedente, é uma coleção enumerável.

e) O conjunto Q*+ dos números racionais positivos é enumerável. Escrevamos todas as frações $\frac{m}{n}$ m,n $\in$ N , n $\neq$ 0 da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \to & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \to & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \ldots \\
\end{array}$$

Reescrevendo essas frações seguindo as flechas e não repetindo os elementos temos uma seqüência de termos distintos. Logo, Q^*_+ é um conjunto enumerável.

f) Q, o conjunto dos números racionais é enumerável. De fato, consideremos a partição disjunta de Q da seguinte forma: $Q = Q^*_- \cup \{0\} \cup Q^*_+$

Admitindo que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, precisamos mostrar que os três conjuntos são enumeráveis. Como $\{0\}$ é finito, logo é enumerável e $Q^*_+ \approx Q^*_-$ já que f(x)= -x é uma bijeção. É suficiente mostrar que Q^*_+ é enumerável, o que já foi feito no item anterior.

Daqui vem que $N \approx Z \approx Q$.

3.Conjuntos não enumeráveis

3.1.Definição

Um conjunto X tem a *potência do contínuo* ou *cardinalidade c* se e somente se $X \approx [0,1]$.

3.2.Exemplos

a) [0 ,1] é não enumerável.

Suponhamos, ao contrário, que A = [0,1] é enumerável. Coloquemos

A = {x1 ,x2, x3 ,...}, onde $x_i \in \mathbb{N}$, ou seja, $0 \leq x_i \leq 1$. Façamos a representação

$x1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$

$x2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$

....

onde $a_{ij} \in \{0,1,2,3,\ldots 9\}$ e x_i contendo infinitos algarismos diferentes de zero. Isso quer dizer que para números do tipo

$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,500000\ldots$ usamos 0,49999...

Vamos tomar o número real $y \in A$, isto é, $0 \leq y \leq 1$. Assim,

$y = 0,b_1b_2b_3$, de modo que b_1 seja escolhido. Satisfazendo às condições $b_1 \neq a_{11}$ e $b_1 \neq 0$, b2 será escolhido de modo que $b_2 \neq a_{22}$ e $b_2 \neq 0$, e assim por diante, de modo que $y \neq x_1$, $y \neq x_2$, ... e assim $y \notin A$.

b) R é não enumerável.

• $[0,1] \approx (0,1)$.

$f:[0,1] \longrightarrow (0,1)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in B \\ \frac{1}{2}, & se \quad x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & se \quad x = \frac{1}{n} \quad e \quad n \in N^* \end{cases}$$

é bijeção, com $B = [0,1]-\{0,1,1/2,1/3,...\} = (0,1)-\{1/2,1/3,...\}$.

• $(0,1) \approx \mathbf{R}$ já que $f(t) = \tan(\frac{\Pi}{2} t)$ é bijeção.

• $\mathbf{R}^*_+ \approx \mathbf{R}^*_-$.

• $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{R}^*_-$.

c) $A \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(A)$ é o conjunto das partes de A. Cantor mostrou que $\#(A) < \#(\mathbb{P}(A))$.

d) $\#(\varnothing) = 0$

$\#(\{\varnothing\}) = 1$

$\#(\{\varnothing,\{\varnothing\}\}) = 2$

....

$\#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{Q}) = \chi$

$\#([0,1]) = \#((0,1)) = \#\mathbb{R} = c$

Daí,

$0 < 1 < 2 < ... < \chi < c <...$

4.Conclusão

Em conjuntos infinitos temos, pois, a possibilidade de relacionar as cardinalidades, reunindo numa mesma categoria ou cardinalidade conjuntos como **N**, **Z** e **Q**, não sendo possível afirmar que **Q** tem mais elementos do que **Z** e esse mais elementos do que **N**.

Numa outra categoria, podemos reunir os conjuntos **R-Q** dos números irracionais e **R**.

A cardinalidade da primeira categoria é menor do que a cardinalidade da segunda, sendo possível afirmar que o conjunto **N** é menor do que o conjunto **R**, por exemplo.

Evidentemente, o assunto não se esgota aqui. É possível relacioná-lo com outros tipos de conjuntos, como o dos números algébricos, que não é o propósito deste artigo, como afirmamos no início.

5.Bibliografia

LIPSCHUTZ,Seymour. Topologia Geral (coleção schaum) . SP. Editora McGraw-Hill. 1980 .

FIGUEIREDO, Djairo G.de. Números Racionais Irracionais e Transcendentes. RJ. Editora SBM. 1985.

DOMINGUES, Hygino H. Espaços métricos e introd. à topologia. SP. Editora Atual.1982.

NIVEN, Ivan. Números Racionais e Irracionais. RJ. Editora SBM.1984.

LIMA, Elon Lages. Análise Real-vol;1. RJ. Editora IMPA. 1989.

ÁVILA, Geraldo. Introdução á Análise Matemática. SP. Editora Blucher. 1995.

NEGRO, Adolfo. e . ZORIO,Valeriano. Cerca de la matemática(1)-fundamentos, álgebra básica,anexos. Madrid, Espanha. Editora Alhambra. 1975.

José Carlos Pinto Leivas - Prof. Fundação Universidade Federal do Rio Grande
Coordenador da Comissão de Curso de Matemática
(0xx)53-236-3524 e-mail: leivasjc@terra.com.br e dmtleiva@furg.super.br