

O Ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas

Alcibiades Gazzoni
 Carmem Vieira Mathias
 Leandra Anversa Fioreze
 Nires Metilde Colletto
 Rosane Fossato Binotto

Introdução

A resolução de problemas, enquanto prática educativa em sala de aula, tem permeado diversas pesquisas em Educação Matemática, devido à sua relevante importância no ensino da Matemática. Neste trabalho, teve-se por objetivo, apresentar um referencial teórico que justificasse seu papel, bem como as etapas propostas por Dante e Polya, na resolução de situações-problema. A seguir, por meio de um problema, exemplificou-se como estas etapas podem ser seguidas e exploradas de modo a contribuir na construção do conhecimento do aluno. Apresentou-se, também, uma série de problemas que podem ser analisados e resolvidos seguindo-se o método de resolução de problemas. Destacou-se, neste trabalho, que é importante desenvolver os conceitos matemáticos, suas propriedades e algoritmos, mas é muito mais importante que se desenvolva a segurança do aluno diante das novas situações, para que ele atue de forma autônoma e eficaz. Trabalhar com a resolução de problemas, enquanto metodologia de ensino, poderá proporcionar resultados bastante satisfatórios do ponto de vista da habilidade em lidar com o conhecimento matemático.

Introdução

Na passagem de uma sociedade rural, na qual poucos precisavam conhecer Matemática, para uma sociedade industrial, em que mais pessoas precisavam conhecer Matemática, e agora, para uma sociedade de informação, em que muita gente precisa saber Matemática, sentiu-se cada vez mais a necessidade de se reformular a maneira como se ensina e se aprende matemática. Segundo Onuchic (2000):

Os movimentos ocorridos nos anos 20 não foram suficientes para mudar a prática docente dos professores, para mudar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar a qualidade. Em nosso país, o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treinamento de habilidades e mecanização dos processos sem a compreensão. (p. 199)

Segundo o relatório de Avaliação da Educação Básica do MEC no Brasil, na década de 90, a Matemática foi eleita como a campeã de repetência e evasão escolar, sendo muitas vezes vista como alvo de críticas. Dessa maneira, ela acaba sendo um fator de exclusão social na sociedade em que vivemos, pois muitas vezes, o ensino da Matemática tem se afastado das necessidades contextuais, sendo entendida como uma área do conhecimento pronta, acabada, perfeita, pertencente apenas ao mundo das idéias e cuja estrutura de sistematização serve apenas de instrumento para outras ciências.

Após intensos estudos, em 1996, é promulgada a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira, que prevê importantes reformas estruturais e funcionais na Educação Básica Brasileira. Como consequência, no ano seguinte, o MEC publica e distribui para todas as escolas brasileiras os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino da Matemática Escolar. Este documento, oriundo de profundas discussões entre pesquisadores brasileiros na área da Educação Matemática, propõe e explicita uma maior ênfase na Matemática Aplicada, de natureza interdisciplinar, na qual:

Se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem. (PCN, 1999, p. 60)

Sobre os PCNs, o relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB (2001), comenta que o ensino de Matemática:

...Constitui um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. (p. 15)

O avanço da tecnologia e as rápidas mudanças ocorridas na sociedade exigem que as pessoas estejam preparadas para um mundo incerto, para um futuro em que as habilidades necessárias são muitas vezes previsíveis, mas não exatas.

Para tanto, deve-se preparar o aluno para que ele saiba enfrentar situações novas, ter o espírito independente, criativo e inovador, e, nisso o método de resolução de problemas tem muito a contribuir.

Os parâmetros curriculares nacionais dão ênfase à resolução de problemas, indicando-o como "ponto de partida da atividade Matemática, e discutem caminhos para se fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância da Matemática e das tecnologias de comunicação". (Pietropaolo, 2002, p. 38)

Portanto, a resolução de problemas é a peça central no ensino da Matemática, pois o pensar e o agir matemático se desenvolvem no enfrentamento de situações novas, quando o indivíduo está engajado ativamente, ocasião na qual cria e desenvolve novas habilidades e constrói competências mais complexas.

Mas, o que é um problema?

Segundo PIRES (2001):

Um indivíduo encara uma situação como sendo um problema quando: compreende a situação e não enxerga uma solução óbvia imediata; dá-se conta que a situação requer uma ação; quer ou precisa agir sobre a situação. ...Uma questão por si só não caracteriza um problema, mesmo que sua resposta seja desconhecida, mas caracteriza um problema aquela questão cuja resposta não é conhecida, porém se deseja conhecê-la. (p.3)

Quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nas condições para satisfazê-lo, e assim se põe um problema. Portanto, para uma dada situação ser considerada um problema, é preciso que o indivíduo tome conhecimento dela, tenha interesse em resolvê-la e não possua elementos para proceder diretamente na sua resolução.

Ao se resolver situações-problema, estimulam-se várias formas de raciocínio, tais como a intuição, a indução, a dedução, a estimativa e a analogia, estas tão necessárias a um bom desenvolvimento da comunicação, que por sua vez, fornece instrumentos para o homem atuar no mundo atual de maneira mais eficaz, pela análise, síntese, comparação e abstração.

Resolução de Problemas: Uma Alternativa Metodológica para o Ensino da Matemática

Para que se desenvolvam as competências e habilidades no enfrentamento de situações-problema, é necessário que a sua resolução seja significativa para o aluno. Neste sentido, é importante que se considere algumas características de um bom problema:

- o problema deve surgir de situações desafiadoras e

interessantes para o aluno, para que estimule a descoberta e a criatividade na sua resolução. Se a construção do conhecimento é o objetivo principal, o professor deve portar-se como um condutor para o aluno, a fim de que ele descubra por si mesmo, o caminho para a resolução;

- o problema deve ser bem posto para que estimule a curiosidade do aluno para resolvê-lo. Para tanto, ele deve ser bem discutido e analisado pelo professor a partir de uma reflexão prévia, qualitativa, para que não conduza a uma atitude mecânica, sem significado. Muitas vezes, um problema mal elaborado conduz a resultados nada otimistas, gerando no aluno uma atitude passiva ou de aversão à Matemática, e por conseqüência, o não-comprometimento com sua aprendizagem;

- o problema deve estar de acordo com a maturidade do aluno com relação às habilidades necessárias à resolução do problema dado. Nenhuma etapa deve ser omitida na construção do conhecimento, pois gerará desistências e desmotivação. A motivação é um dos fatores essenciais quando se trata da construção do conhecimento. Pode ser desestimulante introduzir assuntos que só têm interesse para futuros matemáticos. As "dicas" devem ser relacionadas a um processo interno do aluno na construção do conhecimento, e não jogar estratégias externas que nada tenham a ver com o seu desenvolvimento cognitivo.

Segundo Polya (1985):

Para aprender eficazmente, o aluno deve descobrir por si só uma parte tão grande da matéria quanto possível. A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem a participação ativa, de modo que o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal ensinar a criança a pensar. (p.13)

Para Polya (1985), a resolução de problemas ensina a pensar e isto proporciona: experiência do pensamento independente, flexibilidade de espírito, melhores hábitos de trabalho, atitudes mentais desejáveis, ampliação dos pontos de vista, maturidade intelectual e introdução ao método científico.

Todas estas idéias sugerem uma forma inversa de se colocar os conteúdos. Geralmente, o conteúdo é exposto, acompanhado de exemplos e de uma extensa lista de exercícios para treinar sua aplicação. Dentro da perspectiva de resolução de problemas, além das duas ações, propor questões e resolvê-las, deve-se acrescentar outras, tais como

questionar a questão original e as respostas.

Partindo de um problema desafio, o aluno poderá desenvolver diferentes estratégias de resolução. Com isto ele

vai construindo o seu conhecimento matemático, observando regularidades, elaborando regras e algoritmos.

Na resolução das situações-problema, apresentam-se algumas técnicas ou alguns procedimentos, como por exemplo: tentativa e erro; redução a um problema mais simples; resolução de trás para frente ou do fim para o começo; analogia a problemas semelhantes; representação por meio de tabelas, desenhos ou gráficos. Estas técnicas ou procedimentos comumente se apresentam na resolução dos exercícios, em determinadas atividades, com maior ou menor frequência. Por exemplo, é comum em problemas do tipo "De um número, acrescente 5. Do resultado, multipliquei por 2 e dividi por 6. Encontrei como resposta o número 3. Em que número pensei?" Ao resolvê-lo de trás para frente, encontra-se como resultado o número 4.

Ao se deparar com uma situação-problema, é comum ver-se que alunos (e professores), em geral, procuram logo fazer "contas" sem terem analisado a situação a ser resolvida.

Para melhorar o Ensino da Matemática, Dante (1991), propõe as seguintes etapas para a resolução de problemas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano, verificação ou retrospecto.

Em cada etapa, podem ser formuladas perguntas que ajudem à compreensão do problema e o que deve ser feito. Estas, seguramente, contribuem para manter a atenção e auxiliam na escolha de procedimentos que são necessários para a sua solução.

O trabalho com a resolução de problemas favorece o desenvolvimento de alguns objetivos, tais como: fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar o aluno a enfrentar novas situações, oportunizar ao aluno o envolvimento com as aplicações da Matemática, tornar as aulas interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias para resolver problemas, dar uma boa base Matemática às pessoas,...

Como objetivos e métodos de ensino não podem ser discutidos de modo adequado sem que sejam dados exemplos, realizar-se-á, a seguir, o estudo de um problema que nos dará a idéia do que venha a ser o ensino da Matemática pela resolução de problemas.

· Um problema interessante...

Inscreva um quadrado num triângulo dado da seguinte forma: dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo e os outros dois vértices sobre os outros dois lados do triângulo, um em cada (Polya, 1995, p.15).

Utilizando as etapas propostas por Dante, tem-se:

1ª. Etapa: Compreensão do problema.

Essa compreensão poderá ser alcançada por meio da formulação de alguns questionamentos, tais como:

- Qual a incógnita? Um quadrado.
- Quais os dados? Um triângulo.
- Qual é a condicionante? Os quatro vértices do quadrado devem situar-se sobre os lados do triângulo, dois deles sobre a base e um vértice em cada um dos dois lados.

2ª. Etapa: Elaboração do plano.

Na elaboração do plano, poder-se-á propor algumas estratégias ou perguntas, tais como:

- Qual a conexão entre os dados e a incógnita?
- Existem problemas correlatos já resolvidos?
- É possível utilizar o mesmo método de resolução de outros problemas?
- Existe a possibilidade de introduzir elementos auxiliares para tornar possível a resolução?
- Que problema correlato mais acessível pode ser imaginado?
- Há a possibilidade de variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles?

3ª. Etapa: Execução do plano.

Cada plano traçado será agora executado. Se o plano não atende às necessidades para a resolução do problema, deverá ser realizada nova discussão e posterior reelaboração. Para executar o plano, neste exemplo, propõe-se as seguintes indagações:

- O que se deve fazer?
- Deve-se manter parte da condicionante, deixando uma de lado?
- A condicionante refere-se a **TODOS** os vértices do quadrado, mas quantos vértices ele possui?
- Que parte da condicionante é fácil de satisfazer?

É fácil traçar um quadrado que possua dois vértices sobre o lado do triângulo, ou mesmo três vértices. Observe a figura 1:

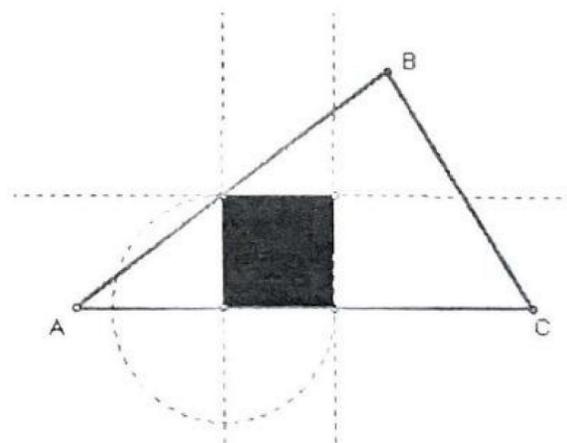


Figura 1.

Mas, pela figura 1 feita, o quadrado pedido não fica

determinado se tiver apenas três vértices sobre os lados, ou seja, o problema não está resolvido.

- Como se procede para conseguir solucionar o problema?

A idéia é traçar outros vértices sobre os lados, da mesma maneira que o primeiro e verificar o que parece ser o lugar geométrico do quarto vértice.

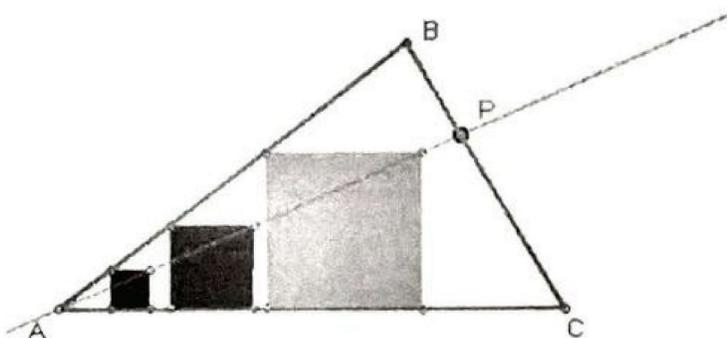


Figura 2

Observando a figura 2, verifica-se que o lugar geométrico do quarto vértice é uma reta que corta o terceiro lado em um ponto, que chamamos de P e é o quarto vértice "definitivo" do quadrado que irá solucionar o problema.

4ª. Etapa: Verificação dos resultados

Nesse caso, a solução é verificada pela forma como foi obtida. Ou seja, usando régua e compasso constrói-se a solução e ao mesmo tempo faz-se a verificação. Outra pergunta que poderá ser feita é: existe a possibilidade de se chegar ao resultado por um caminho ou método diferente?

Sugere-se procurar uma solução analítica.

Soluções alternativas ajudam a explorar o problema sob diferentes pontos de vista matemáticos e perceber que um problema pode ter maneiras diferentes de ser resolvido.

Outros Problemas...

Problemas de Matemática têm ocupado um lugar preponderante no ensino e se apresentam desde a antiguidade. Pesquisas demonstram registros de problemas desde a antiguidade egípcia, chinesa e grega que, atualmente, são resgatados na apresentação dos conteúdos, de maneira a enfatizar a história da Matemática. Isto demonstra sua aplicação dentro de contextos específicos de sua época, pela necessidade de se resolver em alguns problemas contextualizados que iam surgindo.

Exemplos de alguns problemas, que podem ser resolvidos seguindo as etapas ou passos de Polya, Dante e outros estudiosos sobre o assunto, são apresentados na seqüência.

1) Um Negócio da Arábia

Um próspero e milionário negociante chamado Lucatécio

estava muito feliz por ter fechado um negócio com um desconhecido na rua. O desconhecido lhe propôs o seguinte:

"Cada dia, durante vinte dias, eu lhe darei R\$10.000,00 e você, em troca, me dará no primeiro dia, R\$1,00; no segundo dia, R\$2,00; no terceiro dia, R\$4,00 e assim sucessivamente, até o vigésimo dia. Todos os dias, durante 20 dias, eu lhe darei diariamente R\$10.000,00 e você, a partir do 2º. dia, sempre o dobro do que me deu no dia anterior".

O negociante aceitou na hora. Pensou ele, darei para o desconhecido alguns trocados, mas receberei em troca uma boa quantia de dinheiro. **Isto é um negócio da Arábia!**

Pois bem, meu caro, quem sairá ganhando nesta história: O milionário negociante Lucatécio ou o desconhecido? E quanto?

2) (JAKUBOVIC, 1990, p.43) Esse tabuleiro representa um hotel. Em cada quarto há um hóspede, sendo que o de A é um assassino. Ele quer matar todos os outros hóspedes, deixando por último o que está em B. Mas há um problema: o assassino **não pode ver sangue!** Por isso, ele nunca volta a um quarto depois de ter matado o seu hóspede. Para planejar seu percurso, o assassino precisou bolar um artifício. Qual? Observe a figura 3.

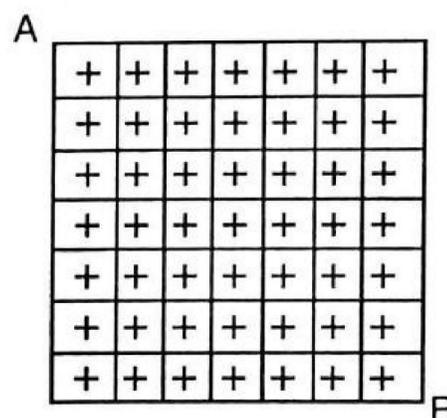


Figura 3.

3) Com 4 cincos, e as quatro operações (+, -, x e :), podendo utilizar parênteses, coloque operações de forma que:

- 5 5 5 5 = 0
- 5 5 5 5 = 1
- 5 5 5 5 = 2
- 5 5 5 5 = 3
- 5 5 5 5 = 4
- 5 5 5 5 = 5
- 5 5 5 5 = 6
- 5 5 5 5 = 24
- 5 5 5 5 = 26
- 5 5 5 5 = 50

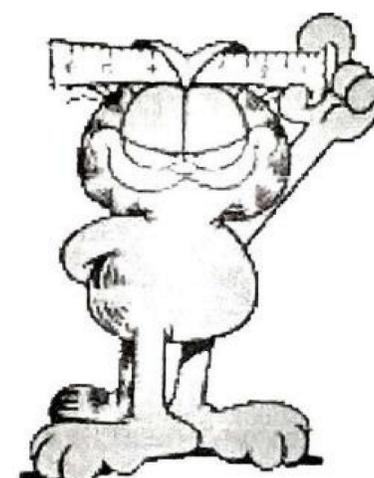


Figura 4.

4) (IMENES, 1999) Conheço um país onde a moeda existente é o barão. Nesse país, ocorreu o seguinte fato:

Uma pessoa entrou na loja e comprou um par de sapatos pelo preço de 400 barões. Pagou com uma nota de 500 barões. A vendedora não tinha troco. Foi à padaria ao lado e trocou a nota de 500 por 5 notas de 100. Devolveu 100 barões ao comprador, que foi embora satisfeito. Instantes depois, o padeiro veio devolver a nota de 500 barões, dizendo que era falsa. A vendedora, muito honestamente, trocou a nota falsa por uma outra verdadeira. Pois bem, alguém teve prejuízo? Se for o caso, de quanto?

5) (DINIZ, 1991) Dispor os números de 1 a 6 numa pilha triangular de modo que a soma dos números em cada lado do triângulo seja :

- a)9
- b)12
- c)13

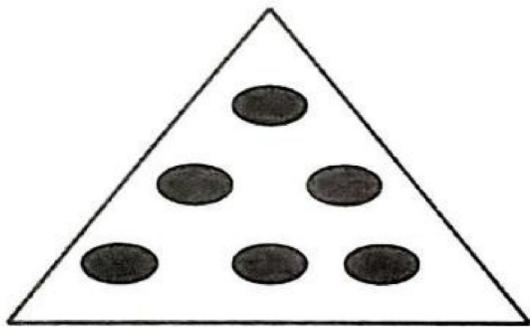


Figura 5.

6) (DINIZ, 1991) Um comerciante deseja realizar uma liquidação anunciando 20% de desconto em todos os seus produtos. Para evitar prejuízos, ele remarca seus produtos. De que porcentagem um produto de 140 reais deve ser aumentado para que depois do desconto anunciado, de 20%, o comerciante receba os mesmos 140 reais?

7) (BARCO, 1991) Uma senhora foi visitar suas três amigas, Teresa, Maria e Vera, levando uma cesta de ovos para presentear-las. Sabendo-se que,

Teresa recebeu metade dos ovos mais meio ovo; Maria recebeu a metade do restante mais meio ovo e Vera recebeu metade do novo resto mais meio ovo. Pergunta-se: quantos ovos havia, inicialmente na cesta, se após a distribuição não sobraram ovos na cesta?

8) (DANTE, 2000) Para uma excursão, foi fretado um avião de cem lugares. Cada pessoa deve pagar à companhia de aviação R\$200,00 e mais uma taxa de R\$40,00 por cada lugar não ocupado. Qual a quantia máxima que a companhia poderá receber?

9) (TAHAN, 1983) Esta história é narrada no livro O Homem que Calculava, de Malba Tahan: Três filhos receberam como herança 35 camelos. Segundo a vontade de seu pai, o mais velho receberia a metade, o irmão do meio a terça parte e o

mais novo, a nona parte. Não sabendo como dividir a herança, pois a metade de 35 é 17 e meio, e a terça parte e a nona parte também não são exatas, pediram ajuda a Beremiz, um hábil calculista. O calculista emprestou um camelo para poder efetuar a divisão. Com 36 camelos, a divisão era exata:

- o mais velho ficou com a metade de 36, ou seja, 18
- o do meio ficou com a terça parte de 36, ou seja, 12
- o mais novo recebeu a nona parte, ou seja, 4.

Somando as quantidades recebidas pelos irmãos, temos 34. Beremiz pegou o seu camelo emprestado e recebeu como recompensa por ter efetuado a divisão, o camelo que restara.

Pois bem, explique a sobra de camelo.

Considerações finais

Neste texto deu-se ênfase ao ensino da Matemática pela resolução de problemas, de modo a estimular o aluno quanto à procura de soluções. Além de termos colocado que os problemas devem ter características adequadas à maturidade do aluno, salientou-se que o professor deve ter consciência das etapas de resolução de um problema e sempre tê-las em mente no trabalho com a Matemática.

Acredita-se que, se queremos uma aprendizagem significativa, com alunos motivados, com menor aversão à Matemática, esta proposta contribui nessa direção.

De fato, a resolução de problemas pode ser utilizada como um procedimento em sala de aula ou como uma alternativa metodológica para a situação em que se encontra o ensino da Matemática. Entretanto, entendemos que a tarefa de selecionar e ou criar situações-problema e resolvê-las, às vezes, não é fácil e, em alguns tópicos importantes da Matemática isso seja quase impossível, mas para os estudantes, essa prática valoriza o seu conhecimento e o estimula a prosseguir seus estudos.

Referências bibliográficas

- BARCO, L. *Revista SuperInteressante*, São Paulo, p.37, outubro. 1991.
- DANTE, L.R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Ática, 1991. p.176.
- _____. *Matemática – Contexto e Aplicações*. São Paulo: Ática, 2000. p.616.
- DINIZ, M.I. de S.V. *A metodologia “Resolução de Problemas”*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 18, p. 12-19. 1991.
- IMENES, L.M. *Problemas Curiosos*. 7ª ed. São Paulo: Scipione, 2001. p.47.
- JAKUBOVIC, J. *Par ou Ímpar*. São Paulo: Scipione, 1990. p.48.
- MINISTÉRIO da EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. Brasília. 1999.
- ONUCHIC, L. de La R. *Ensino-Aprendizagem de Matemática*

- Através da Resolução de Problemas.** ICMSC. Rio Claro: USP, 2000.
- PIRES, M.N.M., GOMES, M.T. **Trabalhando em sala de aula com Resolução de Problemas.** Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Rio de Janeiro, 2001.
- PIETROPAULO, R.C. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental.** Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 11, p.34-38. 2002.
- POLIA, G. **O Ensino por Meio de Problemas.** **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.7, p.11-16. 1985.
- _____. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p.179.
- SANTOS, M.C. dos **Um exemplo de situação-problema: o problema de bilhar.** **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 50, p. 38-45. 2002.
- TAHAN, M. **O Homem que Calculava.** 34ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1983. p.218.

Alcíades Gazzoni - Mestre em Matemática pela UFRJ; professor assistente no Curso de Matemática no Centro Universitário Franciscano - UNIFRA

Carmem Vieira Mathias - Mestre em Matemática pela UFRGS; professora assistente no Curso de Matemática no Centro Universitário Franciscano - UNIFRA; doutoranda do Programa de Pós-Graduação de Matemática-UFRGS.

Leandra Anversa Fioreze - Mestre em Matemática pela UFRGS; professora assistente no Curso de Matemática no Centro Universitário Franciscano - UNIFRA.

Nires Metilde Colletto - Mestre em Educação pela UFSM; professora assistente no Curso de Matemática no Centro Universitário Franciscano - UNIFRA

Rosane Rossato Binotto - Mestre em Matemática UFSCar; professora assistente no Curso de Matemática no Centro Universitário Franciscano - UNIFRA