Existem bolas quadradas?

José Carlos Pinto Leivas

Resumo

Pretendemos utilizar o conceito de distância para mostrar que no nosso dia a dia as coisas nem sempre se comportam exatamente como nos espaços euclidianos da Geometria Analítica. Vamos questionar qual é a forma natural de percorrer um caminho entre dois pontos dados, sejam eles pontos propriamente ditos, conjuntos ou outro elemento qualquer. Consideremos a planta baixa de uma região de uma certa cidade. O natural é percorrer o trajeto ao longo dos catetos se desejarmos ir de um ponto A, assinalado a um ponto B também assinalado neste mapa e não ao longo da hipotenusa, o que seria impossível. Vamos apresentar um exemplo de emprego do importante conceito de função para calcular distâncias como as da ilustração. Decorrentes da forma de calcular tais distâncias vamos ver como ficam os conceitos de círculo, circunferência, discos e bolas. Pretendemos chegar a um modelo de bola quadrada, facilmente deduzível por um estudante do ensino médio ao estudar relações, funções ou mesmo Geometria Analítica plana. Pretendemos também reforçar o emprego de propriedades que de um modo geral são apenas enunciadas como a desigualdade triangular, por exemplo.

1. ESPAÇOS MÉTRICOS

1.1. DEFINIÇÕES: Dado um conjunto não vazio M, consideremos a função

$$d: M \times M \to \mathbf{R}^+$$
$$(x,y) \to d(x,y).$$

Dizemos que a função d é uma métrica sobre M se e as seguintes condições forem satisfeitas, $\forall x,y,z \in M$.

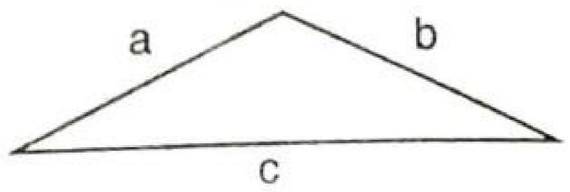
(M_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(M_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Nestas condições a função d é chamada de *métrica ou função distância* e cada imagem d(x,y) recebe o nome de *distância* de x a y, enquanto que o par (M,d) é denominado *espaço métrico*. Cada elemento de um espaço métrico é denominado *ponto* desse espaço, seja ele um ponto mesmo, ou um número, ou ainda uma função ou um vetor.

A propriedade (M_3) é denominada *desigualdade triangular* e advém do fato que na Geometria Euclidiana elementar cada lado de um triângulo tem medida menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.



Na figura, devemos ter $c < a + b$ ou $a < b + c$ ou $b < a + c$.

1.2. EXEMPLOS de métricas ou funções distâncias

1.2.1. Seja $M_1 \neq \emptyset$ um conjunto e d: $M \times M \to \mathbf{R}^+$ definida por $d(x,y) = 0$ se $x = y$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$. A função d define uma métrica que é chamada *métrica discreta* enquanto que o par (M,d) é chamado *espaço métrico discreto*.

1.2.2. Seja **R** o conjunto dos números reais e d: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ definida por $d(x,y) = |x-y|$ A função d define uma métrica em **R**, chamada *métrica usual ou métrica do módulo*. O espaço (**R**,d) é chamado *Espaço Métrico Real Usual*.

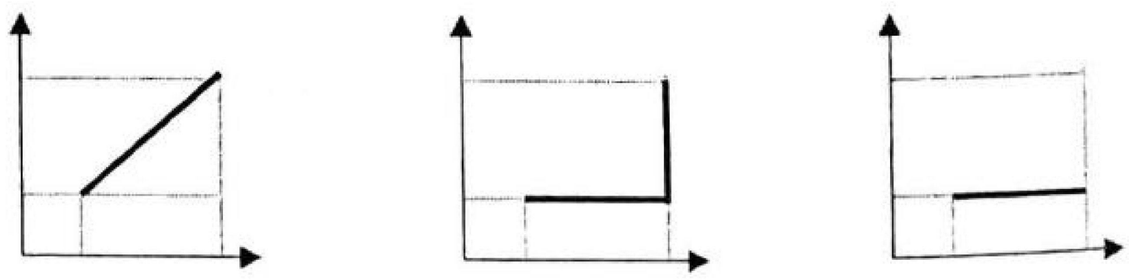
1.2.3. Seja $\mathbf{R}^2$ o plano cartesiano. Define-se em $\mathbf{R}^2$ três métricas, como segue, onde $X=(x_1,y_1)$ e $Y=(x_2,y_2)$ são pontos do $\mathbf{R}^2$.

$D(X,Y)= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, chamada *métrica euclidiana*;

$D_1(X,Y)= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, chamada *métrica dos catetos*;

$D_2(X,Y)= \text{máx} \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$, chamada *métrica do máximo*.

Assim, dados dois pontos X e Y no plano podemos visualizar estas distâncias nos seguintes gráficos.



D(X,Y) $D_1(X,Y)$ $D_2(X,Y)$

No último gráfico, poderia ser o segmento vertical, caso fosse maior do que o horizontal.

1.3. EXEMPLOS de funções que não são métricas

1.3.1. A função f: $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ dada por $f(X,Y) = |x_1 - x_2| =$ onde $X = (x_1,y_1)$ e $Y = (x_2,y_2)$, não define uma métrica.

Basta tomar X = Y, então $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e

$f(X,Y)= |x_1 - x_2| = 0$. Por outro lado,

$f(X,Y)=0 \Rightarrow x_1-x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ o que não implica em $X = (x_1,y_1) = Y = (x_2,y_2)$.

1.3.2. A função g: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ dada por $g(x,y) = (x-y)^2$ não define uma métrica.

Tome $g(x,y) = (x-y)^2 = (x-z+z-y)^2 = [(x-z)^2 + (y-z)^2 + 2(x-z)(y-z)] \neq g(x,z)+g(z,y)$.

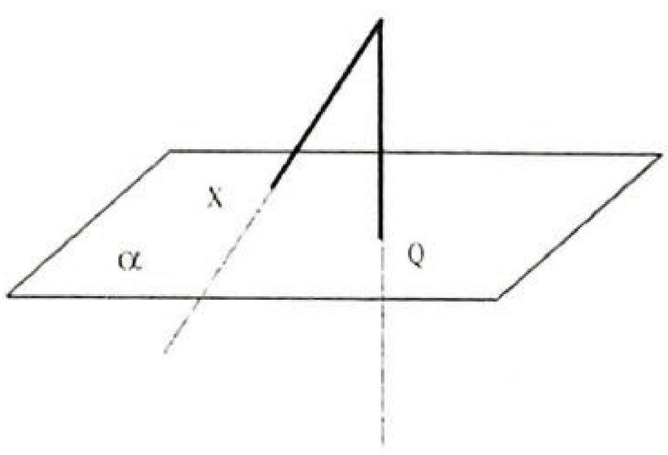
2. DISTÂNCIA DE PONTO A CONJUNTO

Na geometria elementar tratam-se os problemas de distância de ponto a ponto e de ponto a plano, basicamente pelos dois resultados enunciados a seguir.

"O segmento da perpendicular a um plano, por um ponto dado fora deste plano, tem medida menor que qualquer segmento de oblíqua a este plano, pelo ponto dado."

$$\text{Med}(\overline{PQ}) \leq \text{med}(\overline{PX}),\ \forall X \in \alpha.$$

"A distância de um ponto P a um plano é a medida do segmento $\overline{PQ}$ contido na perpendicular a α pelo ponto P."



Estas proposições nos levaram à formulação do conceito mais global de distância de um ponto a um conjunto. Diz-se que um número real k é *cota inferior* de um subconjunto A de **R** sse $k \leq x$, $\forall x \in A$. A maior cota inferior de A é chamada *ínfimo* do conjunto A e denota-se por *inf* A.

2.1.DEFINIÇÃO: Sejam (M,d) um espaço métrico, $p \in M$ e $A \subset M$ um subconjunto não vazio. Chama-se *distância do ponto p ao conjunto A* e denota-se por d(p,A) ao número real não negativo

$$d(p,A) = inf\{d(p,x): x \in A\}.$$

Observe que a existência de d(p,A) é garantida pelo fato que

$d(p,x) \geq 0$, $\forall \in A$.

2.2.EXEMPLOS:

2.2.1. (**R**,d) é o espaço métrico real usual, $p=0 \in \mathbf{R}$ e $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\}$. A distância de p até o conjunto A é zero. De fato, seja $\varepsilon > 0$ um número real dado. Existe $n \in \mathbf{N}^*$ de modo que $d(0,\frac{1}{n}) = \left|1 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \in$.

Logo, $d(0,A) = inf\{ d(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\} = 0$.

Observação. Note que é possível se ter d(p,A) = 0 sem que $p \in A$, como foi mostrado no exemplo acima. Por outro lado, se $p \in A$, então $d(p,x) = 0$ para algum $x \in A$.
Daí, d(p, A) = 0.

2.2.2. (**R**,d) é o espaço real usual, tome $A = \mathbf{N}^*$ e p = 0. Daí, $d(0,A) = inf\{d(0,x): x \in \mathbf{N}^*\} = inf\{1,2,3,4,\ldots\} = 1$.

2.2.3. (**R**,d) é o espaço real usual, tome $A = \mathbf{N}^*$ e p = 1. Daí, $d(1,A) = inf\{d(1,x): x \in \mathbf{N}^*\} = inf\{0,1,2,3,4,\ldots\} = 0$.

2.2.4. (M,d) é um espaço métrico discreto, $\varnothing \neq A \subset M$, $p \in M$. Daí temos
$d(p,A) = 0$ se $p \in A$ e $d(p,A) = 1$ se $p \notin A$.

3. DISTÂNCIA DE CONJUNTO A CONJUNTO

3.1. DEFINIÇÃO: Sejam (M,d) um espaço métrico, $A,B \subset M$ subconjuntos não vazios. Chama-se *distância do conjunto A ao conjunto B* e denota-se por d(A,B) ao número real não negativo

$$d(A,B) = inf\{d(x,y): x \in A \text{ e } y \in B\}$$

3.2.EXEMPLOS:

3.2.1. (R,d) é o espaço métrico real usual, **N*** e **Z-** são subconjuntos de **R**. A distância entre os dois é igual a 1. De fato,
$d(\mathbf{N}^*, \mathbf{Z}-) = inf\{d(x,y): x \in \mathbf{N}^* \text{ e } y \in \mathbf{Z}-\} = inf\{1,2,3,4,\ldots\} = 1$.

3.2.2. (R,d) é o espaço métrico real usual, **N** e **Q** são subconjuntos de **R**. A distância entre os dois é igual a 0. De fato,
$d(\mathbf{N}, \mathbf{Q}) = inf\{d(x,y): x \in \mathbf{N} \text{ e } y \in \mathbf{Q}\} = 0$ uma vez que existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n \in \mathbf{Q}$, logo, d(n,n) = 0.

3.2.3. (R^2,d) é o plano euclidiano usual. Nele consideremos os subconjuntos

$$A = \{(x,y) : y = 0\} \text{ e } B = \{(x,y) : xy = 1 \text{ e } y > 0\}.$$

Tomemos $P = (n,0) \in A$ e $Q = (n, \frac{1}{n}) \in B$ para $n \in \mathbf{N}^*$. segue que

$$d(P,Q) = inf\{\sqrt{(n-n)^2 + (0-\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\} = 0.$$

4. BOLA ABERTAS

O conceito de bola aberta desempenha um papel fundamental na teoria dos espaços métricos e

consequentemente na análise. Observamos hoje que os conceitos de círculo, circunferência, disco, esfera e bola estão muito entrelaçados e até mesmo empregados de forma inconveniente. Observe que se fala em círculo como a região do plano limitada pela circunferência. No entanto, na geometria analítica era muito usada a equação $x^2+y^2=r^2$ para expressar a equação do círculo de centro na origem e raio r em vez de falar em equação da circunferência de centro na origem e raio r. De forma semelhante o erro continuava ou continua a acontecer quando se passa para a trigonometria e se fala em círculo trigonométrico quando se quer trabalhar com a circunferência trigonométrica.

A topologia trata de forma mais precisa muitos destes conceitos.

4.1. DEFINIÇÃO: Seja p um ponto de um espaço M onde exista uma função distância **d** e $\varepsilon > 0$ um número real. A *bola de centro p e raio* $\varepsilon > 0$, denotada por $B(p, \varepsilon)$ é um subconjunto de M dado por

$B(p, \varepsilon) = \{x \in M: d(x,p) < \varepsilon\}$.

4.2. EXEMPLOS:

4.2.1. Na reta usual a função distância usual é $d(x,y) = |x - p|$

Neste caso a bola de centro p e raio ε é dada pelo conjunto

$B(p, \varepsilon) = \{x \in M: d(x,p)\ |x-p|<\varepsilon\} = \{x \in M: -\varepsilon<x-p<\varepsilon\} = \{x \in M: -\varepsilon+p<x<x+p\}$, que nada mais é do que um intervalo aberto de números reais ou geometricamente um segmento de reta sem os extremos.

4.2.2. No plano euclidiano usual duas funções distâncias chamam a atenção. São elas:

A Euclidiana dada por $d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

onde $X(x_1,x_2)$ e $Y(y_1,y_2)$,cuja bola de cento centro P(a,b) e raio e é dada pelo conjunto

$B(P, \varepsilon) = \{X = (x,y) \in M: d(X,P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \varepsilon\}$,

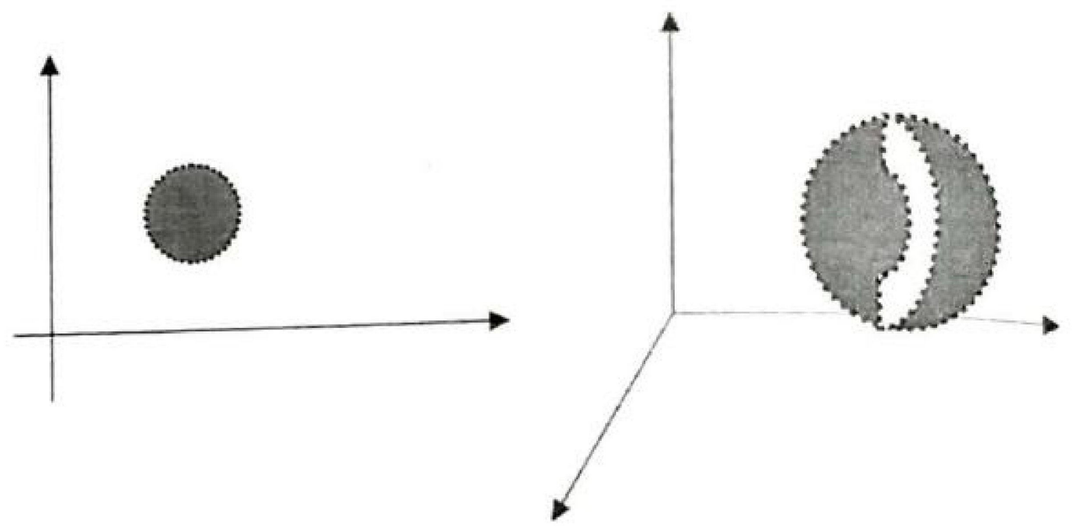
com X(x,y),

onde rescrevendo-se a desigualdade de outra forma obtém-se

$$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2,$$

que nada mais é do que o interior da circunferência de centro (a,b) e raio ε.

Observação. A métrica pode ser definida no espaço tridimensional de forma similar gerando a segunda figura abaixo.



A dos catetos que é aquela que utilizamos para nossos deslocamentos sobre as ruas de uma cidade dada por $d(X,Y)=|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ onde $X(x_1,x_2)$ e $Y(y_1,y_2)$,cuja bola de cento centro P(a,b) e raio ε é dada pelo conjunto

$B(P, \varepsilon) = \{X \in M: d(X,P) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon\}$, com X(x,y).

Para estudar este lugar geométrico vamos usar a definição da função modular e considerar quatro casos, como a seguir.

- $x - a < 0$ e $y - b > 0$.

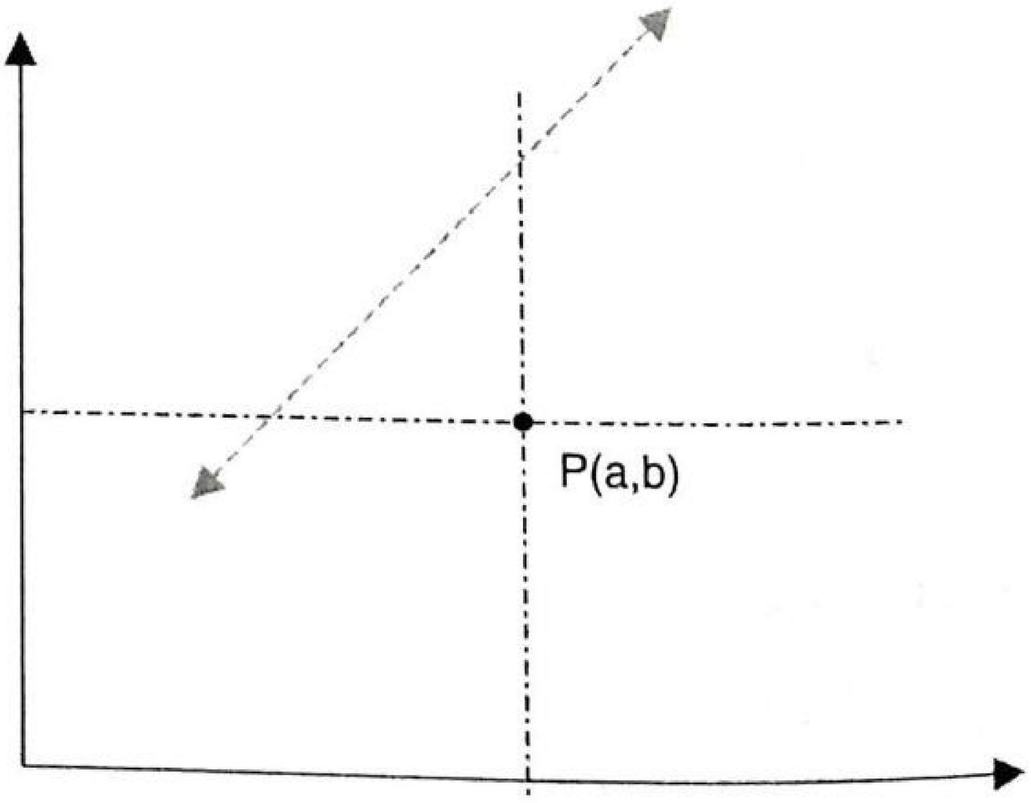
Isto implica em $x < a$ e $y > b$. Assim,

$d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = a - x + y - b < \varepsilon \Rightarrow y < x + (\varepsilon - a + b)$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado superiormente pela reta

$$y = x + \varepsilon - a + b,$$

inclinada de 45° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_4(a-\varepsilon,b)$ e $P_1(a, b+\varepsilon)$. (reta azul nas figuras abaixo)



- $x - a > 0$ e $y - b < 0$.

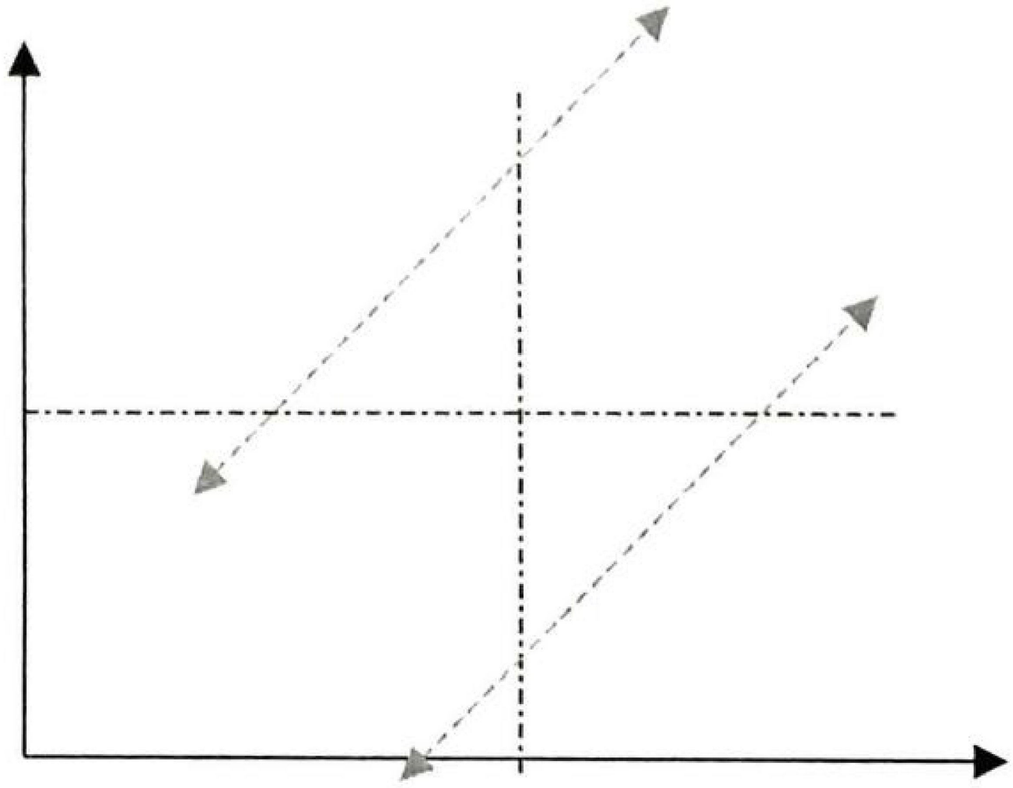
Isto implica em $x > a$ e $y < b$. Assim,

$d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = x - a - y + b < \varepsilon \Rightarrow y > x + (-\varepsilon - a + b)$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado inferiormente pela reta

$$y = x + (- \varepsilon - a + b),$$

inclinada de 45° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_2(a+\varepsilon , b)$ e $P_3(a, b- \varepsilon)$. (reta verde nas figuras abaixo)



- $x - a < 0$ e $y - b < 0$.

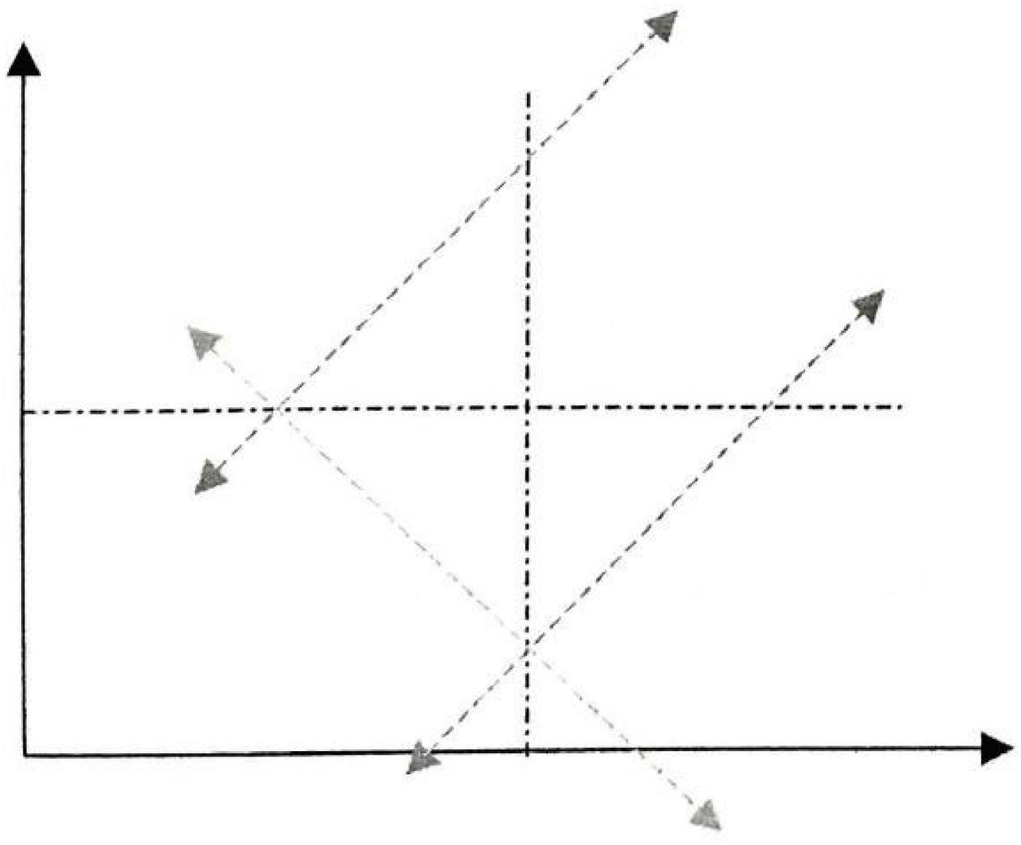
Isto implica em $x < a$ e $y < b$. Assim,

$$d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = a - x - y + b < \varepsilon \Rightarrow y > -x + (- \varepsilon + a + b)$$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado inferiormente pela reta

$$y = - x + (- \varepsilon + a + b),$$

inclinada de 135° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_3(a, b - \varepsilon)$ e $P_4(a - \varepsilon , b)$. (reta rosa nas figuras abaixo)



- $x - a > 0$ e $y - b > 0$.

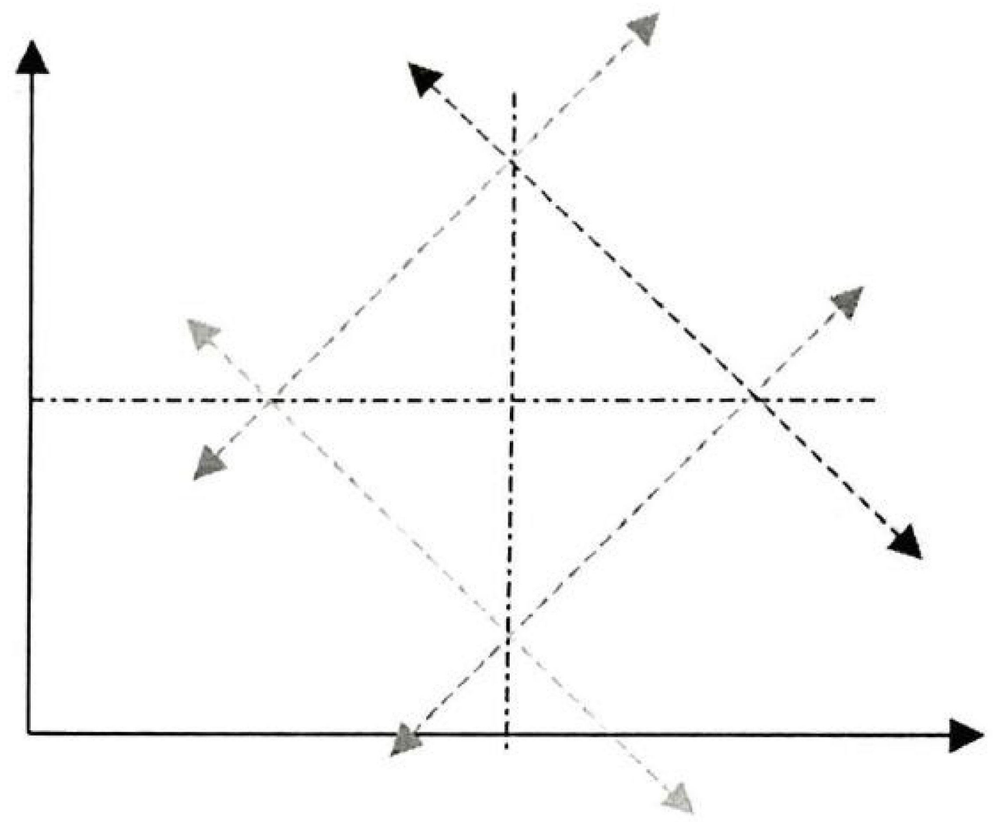
Isto implica em $x > a$ e $y > b$. Assim,

$$d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = x - a + y - b < \varepsilon \Rightarrow y < -x + (\varepsilon + a + b)$$

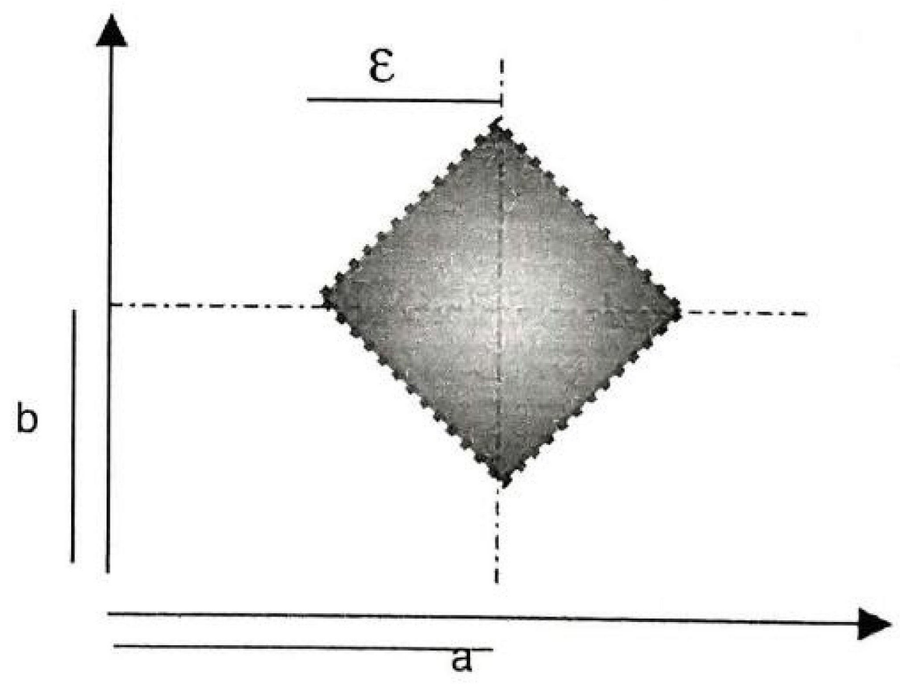
que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado superiormente pela reta

$$y = - x + (\varepsilon + a + b),$$

inclinada de 135° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_1(a, b + \varepsilon)$ e $P_2(a + \varepsilon, b)$. (reta marrom nas figuras abaixo)



A bola na métrica dos catetos é o interior de um quadrado formado pela interseção das quatro retas acima, ou seja, é o interior do quadrado cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados medindo 2ε e cujos lados medem $\varepsilon\sqrt{2}$



CONCLUSÃO

Concluindo este trabalho chamamos a atenção para o fato de que tanto no Ensino Médio, quando o professor trabalhar relações, funções e Geometria Analítica pode dar um significado a certas relações que muitas vezes passam desapercebidas, quanto ao estudar a própria Geometria Analítica no Ensino Superior.

Fazendo um estudo similar para a outra métrica definida no plano obtém-se uma outra bola quadrada,

desta feita com os lados paralelos aos eixos coordenados e possuindo diagonais iguais a 2ε e lados iguais a $\varepsilon\sqrt{2}$

É importante ao concluir este trabalho que é possível dar significado aos conceitos matemáticos, muito embora, nem sempre o professor encontre argumentos suficientes para tal. Neste sentido, justifica-se num curso de formação de professores uma excelente fundamentação teórica em Matemática, como é o caso de introduzir a Topologia dos Espaços Métricos, que em muitos cursos sequer são noticiados. O que saliento é a importância de se estabelecer a conexão entre o conteúdo estudado e a sua aplicabilidade na atuação profissional, muito mais do que dar nomes convencionais ou conteúdos convencionais, sem uma pré-definição do currículo a ser desenvolvido.

6. Referências Bibliográficas

SILVA,Valdir Vilmar da, e REIS,Genésio Lima dos. **Geometria analítica**. Goiânia:Editora U.F.G ,1981.

LIMA,Elon Lages. **Coordenadas no espaço** . RJ: Editora IMPA, 1993.

LIMA,Elon Lages. **Coordenadas no plano** . RJ: Editora IMPA, 1992.

LIPSCHUTZ,Seymour. **Topologia geral** . SP: Editora McGraw-Hill. 1980.

DOMINGUES,Hygino H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. SP:Editora Atual.1982.

BARR,Stephen. **Experiments in topology**. USA: Editora U.S.A .1989

Prof. José Carlos Pinto Leivas - Coordenador da Comissão de Curso de Matemática

E-mail: leivasjc@terra.com.br ou dmtleiva@super.furg.br