FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

Function of several real variables: an analysis according to the registers of semiotic representation theory in textbooks

Leandro dos Santos Vieira

Rogério Fernando Pires

Resumo

As funções nos livros de Cálculo Diferencial e Integral apresentam diversas representações. No entanto, a forma como os autores abordam cada representação influencia a conceitualização das funções de duas ou mais variáveis. Portanto, realizou-se uma pesquisa bibliográfica a fim de investigar como os livros privilegiam o estudo de função de duas ou mais variáveis à luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. A escolha dos livros de Cálculo se deu por meio de um pequeno estudo das ementas dos cursos de Matemática de faculdades do Triângulo Mineiro que se mostraram mais relevantes quanto à formação inicial, apresentando um grande impacto social na região. Os resultados apontaram que livros com mais registros de representações de função implicam mais coordenações entre esses registros, atividade necessária para a apreensão dos objetos matemáticos.

Palavras-chave: Funções de várias variáveis reais; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Livro didático.

Abstract

The functions in the Differential and Integral Calculus books have different representations. However, the way the authors approach each representation influences the conceptualization of the functions of two or more variables. Therefore, a bibliographic research was carried out in order to investigate how books privilege the study of the function of two or more variables in the light of Raymond Duval's Semiotic Representation Records Theory. The choice of Calculation books was made through a small study of the menus of the Mathematics courses at colleges in the Triângulo Mineiro that were more relevant in terms of initial training, presenting a great social impact in the region. The results showed that books with more records of function representations imply more coordination between these records, an activity necessary for the apprehension of mathematical objects.

Keywords: Function of several real variables; Theory of Semiotic Representation Records; Textbook.

Introdução

A abordagem das funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais presente nos livros de ensino superior, objeto matemático do estudo de Cálculo Diferencial e Integral, apresenta-se de diversas formas como equações, superfícies no espaço tridimensional, alguns esboços no plano cartesiano e até mesmo em relações registradas em tabelas e diagramas.

Assim, tal função com n número de variáveis, que é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais denotando $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n-uplas (STEWART, 2010, p. 824), ainda que pareça exigir um nível mais aguçado de abstração matemática, poderá se tornar mais compreensível, se essas representações forem pensadas de maneira que contribuam com o processo de apreensão matemática. Por exemplo, um paraboloide poderá ser mais bem compreendido, se suas representações na forma de registro de equação $x^2+y^2-z=0$ e de esboço dessa superfície parabólica no $\mathbb{R}^3$ forem trabalhadas de maneira coordenada.

Nesse caminho, os livros didáticos para o ensino superior deveriam justificar a aprendizagem de função favorecendo processos cognitivos (DUVAL, 2012b) que levam a aprendizagem do objeto matemático por meio de suas representações em diferentes registros. Contudo, surge o seguinte questionamento: Como esses livros, de fato, privilegiam as diversas representações de funções (de duas ou mais variáveis reais a valores reais) de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica?

Delimitando um pouco mais esse cenário, fez-se necessário um breve estudo que justificasse a seleção dos livros que seriam analisados. Essa pequena investigação culminou na seleção dos seguintes livros: *Cálculo diferencial e integral*: (a) a 6.ª edição do livro *Cálculo*, v. 2, de James Stewart; (b) a 12.ª edição do livro *Cálculo*, v. 2, de George B. Thomas; e (c) a 5.ª edição do livro *Um curso de cálculo*, v. 2, de Hamilton Luiz Guidorizzi.

Logo, esta pesquisa possibilitou conhecer a proposta de ensino (de função de n variáveis) de cada autor, tendo como pano de fundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. No decorrer deste estudo, os autores se sentiram seguros ao dizer que há obras que se sobressaem em relação às demais, privilegiando de maneira positiva o estudo de função (de n variáveis) à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica – por apresentar uma diversidade maior de registros desse tipo de função.

As funções e suas representações em diferentes registros semióticos

Quando se olha para a função como objeto matemático, percebe-se que ela se encontra em vários campos da Matemática e, também, em outras ciências. É o principal objeto de estudo da Análise Funcional, está presente, como as variáveis das equações diferenciais, no cálculo numérico dos erros e aproximações quanto ao comportamento de funções reais, nas clássicas ideias de movimento, velocidade e aceleração da Física, e suas relações e operações também são objetos de estudo da Álgebra, além de também aparecer na Estatística e Lógica Matemática.

Note que os exemplos citados podem ser considerados função, porque temos regras de conformidade para isso, tais como as definições. A definição de função de duas ou mais variáveis reais a valores reais, como entendemos hoje, levou séculos para ser delimitada e convencionada. A Física teve um papel primordial, uma vez que cada definição de função à época foi aprimorada ou estendida de acordo com problemas físicos que assombravam os acadêmicos do passado. As noções de Álgebra e simbologia de Viète (1540-1640) que fizeram as funções ganhar espaço na Álgebra, tal qual as curvas da Geometria Analítica vindas de Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), impulsionaram as funções como uma linguagem mais apropriada para representar modelos e problemas físicos (ROQUE, 2012).

Portanto, segundo Ponte (1992), a origem da definição moderna de função está relacionada a três elementos principais dos séculos XVII e XVIII: (a) a álgebra, carregando aspectos importantes como simplicidade e rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas e condensando em si uma grande quantidade de informações; (b) a geometria, sendo a base fundamental e de intuitiva representação; e (c) a conexão com os problemas concretos do mundo físico, associada à ideia de regularidade, proporcionando a motivação fundamental e interesse pelo estudo das famílias de funções.

Assim, o estudo e a pesquisa de função desde seus primórdios são inseparáveis de pelo menos duas de suas representações, e que a associação entre curvas e expressões algébricas se revelou tão bem-sucedida no passado que ainda hoje tem papel essencial na prática da Matemática atual (PONTE, 1992).

Uma das explicações dessa relação exitosa pode ser evidenciada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. É sabido que a Matemática exige muita abstração, uma vez que seus objetos de estudo não são "palpáveis" como nas outras ciências. Felizmente, esses mesmos objetos podem ser apresentados de formas diferentes um do outro (usando ferramentas matemáticas adequadas). Ao usufruir dessa premissa, a compreensão do objeto matemático se torna menos complicada, do ponto de vista cognitivo.

De acordo com essa teoria, as representações mentais (que é tudo o que vem à mente quando se pensa no objeto matemático já aprendido) dependem das chamadas representações semióticas (que são os registros não mentais confeccionados conforme regras matemáticas – as equações, as tabelas, as curvas e gráficos etc. – que um objeto pode ter). Em outras palavras, um está relacionado ao campo mental com a capacidade de interiorizar o objeto matemático em sua totalidade ou maior parte – *Noesis*, e o outro no campo físico, com o ato de confeccionar e fazer relações com registros de representações semióticas – *Semiosis*.

Segundo Duval (2011), os registros de representação de um objeto matemático podem ser classificados em discursivos – são aqueles que apresentam uma linearidade fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização de expressões, por exemplo, a língua materna (oral ou escrita) e as escritas simbólicas (sistema de numeração, escrita algébrica e língua formal da própria Matemática; e não discursivos – que remetem a uma apreensão simultânea de uma organização bidimensional, por exemplo, gráficos cartesianos, diagramas e tabelas.

Uma justificativa para se mobilizar ou poder mobilizar mais de uma representação de um mesmo objeto durante a aprendizagem é para não correr o risco de confundi-los com o próprio objeto – mas não é a única. Em sua teoria, Duval (2012b) traz mais três respostas.

Antes de invocar essas três respostas, é preciso entender melhor a *semiosis*: de acordo com Duval (2012b), para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação semiótica, ele deve permitir três atividades cognitivas distintas: a formação (que diz respeito a representar por meio de algum registro usando as regras do próprio sistema semiótico, a fim de que possa ser reconhecido); o tratamento (tangente aos tratamentos internos realizados em cada registro, apropriando das regras e leis de seu sistema semiótico); e a conversão (unicamente a mudança de um registro a outro equivalente num outro sistema semiótico).

Assim, a mobilização/coordenação de vários registros de representação semiótica é necessária porque (1) há possibilidade de trocar de registro desde que o novo seja menos custoso no tocante ao tratamento; (2) os registros se complementam entre si na tarefa de representar a totalidade do objeto; e (3) a conceitualização dos objetos depende da coordenação entre registros.

No entanto, apesar da defesa pela coordenação de múltiplos registros de representação semiótica na atividade matemática, ainda existem certos inconvenientes que levam ao isolamento de representações ou à compreensão, monorregistro dos objetos. Frege (1971, *apud* DUVAL, 2012a) introduziu uma importante distinção entre significação, que depende do registro escolhido, e referência, que necessita do objeto a ser representado. Assim, a possibilidade de troca entre duas expressões referencialmente equivalentes (a conversão na literatura de Duval) fica sujeita a certos fenômenos.

De acordo Duval (2012a), a conversão ocorre por dois caminhos: significação e referência. Para ele, a troca de uma expressão referencialmente equivalente por outra de igual referência, visando apenas o objeto, é diferente da troca objetivada por sua significação. Esses dois caminhos estão sujeitos exclusivamente ao que Duval (2012a) chama de congruência ou não congruência semântica. Assim, duas expressões (referencialmente equivalentes) podem ser ou não ser semanticamente congruentes. O que comanda essa dualidade são os custos cognitivos de tratamentos internos presentes em cada registro de partida – quanto mais custoso, mais se aproxima da não congruência.

Nesse ínterim, no que tange às conversões realizadas partindo de equações (registro algébrico) para gráficos cartesianos (registro gráfico) e vice-versa, Duval (2011) indica três abordagens que interferem bastante no processo de compreensão, que são as abordagens ponto a ponto, extensão de traçado e a interpretação global das propriedades figurais.

A primeira abordagem consiste em associar um par de números a um ponto no plano que esteja relacionado com a expressão algébrica que representa a função, e, a partir de um conjunto de pontos obtidos, traçar o gráfico limitando-se ao conjunto de pontos. Já a segunda corresponde às atividades de interpolação e extrapolação que se apoiam em aspectos produtores ou redutores das representações gráficas; a interpretação não se limita mais a um conjunto finito de pontos, como a abordagem anterior, ela permite a análise em intervalos entre os pontos, porém ela não possibilita uma análise limitada aos dados do traçado, e não das variáveis visuais pertinentes da representação gráfica. Finalmente, a abordagem de interpretação global das propriedades figurais considera a análise das variáveis visuais pertinentes da representação gráfica e suas relações com as unidades significantes da representação algébrica. Ela viabiliza uma análise de congruência entre os registros, o que torna a conversão nos dois sentidos congruentes e auxilia no processo de interpretação e compreensão.

O exposto anteriormente não indica que a não congruência é danosa à aprendizagem, pelo contrário, não deve ser evitada. Contudo, processo de conversão é guiado pela referência, condição necessária para que haja sentido no pensamento natural: a continuidade semântica e associativa entre as expressões a serem substituídas (DUVAL, 2012a). Logo, os sujeitos em aprendizagem em suas trocas optam pelos registros cujos tratamentos internos são mais econômicos, o que implica, na maioria das vezes, conversões congruentes.

Seja pela economia de tratamento ou pelo fato de alunos não enxergarem ligações de um registro a outro referencialmente equivalente, a atividade matemática não deve ser privada da apreensão conceitual dos objetos, uma vez que muitas conversões no campo da Matemática são ditas não congruentes.

A pesquisa nos livros de Cálculo

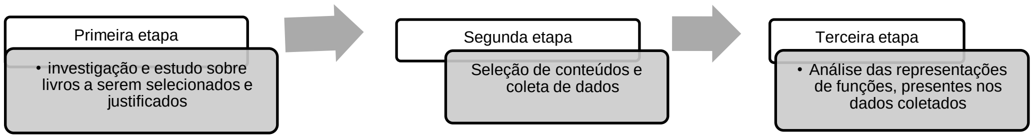
Com base nas leituras metodológicas, este trabalho atribui a si o caráter de pesquisa bibliográfica e tomou-se como base a definição de Fachin (2003), que considera tal modalidade como a união de conhecimentos em produções humanas com a finalidade de pesquisar tal assunto em prol do saber.

Apesar de a questão de pesquisa ter o pronome relativo "como" denotando uma resposta mais subjetiva e que se concorda com as considerações de abordagem qualitativa de Creswell (2010), ao dizer que esse tipo de pesquisa emprega diferentes estratégias de investigações de dados de textos e imagens fundamentalmente interpretativas, não pressupõe uma negação aos dados quantitativos:

> [...] os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma crítica. Não é que os números por si sós não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a variar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que é que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os compilam [...]. Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos pelo seu valor facial (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 195).

Assim, uma investigação quantitativa respeitando os limites do estudo (qualitativo) proposto também se fez presente neste trabalho. Assim, as etapas metodológicas que serão narradas a seguir seguem o fluxograma representado na Figura 1.

Figura 1 – Fluxograma metodológico da pesquisa



Fonte: Arquivo dos autores

No começo desta pesquisa, houve um momento em que foi preciso decidir quais livros didáticos seriam utilizados nesta investigação. Pensou-se, então, em buscá-los nas ementas de cursos de ensino superior que ofereciam a disciplina de Cálculo em sua grade curricular e selecionar algumas obras. Entretanto, o que justificou esta investigação foi o fato de, se as faculdades têm certa relevância em relação à formação de professores de Matemática e matemáticos na região do Triângulo Mineiro, supor que as ementas de suas disciplinas (que abordam o conteúdo de funções de duas ou mais variáveis) estão bem estruturadas – o que contribui para uma boa formação desses egressos.

Atendendo ao critério de que a instituição deveria ser pública e oferecer o curso de Matemática (licenciatura ou bacharelado), foram escolhidas duas universidades, quais sejam: a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Universidade do Triângulo Mineiro (UFTM).

Com essa estratégia, as ementas de cinco cursos foram analisadas, três de licenciatura e dois de bacharelado em Matemática. Assim, foram selecionados os cursos oferecidos na Faculdade de Matemática (FAMAT – UFU), em Uberlândia, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP – UFU), em Ituiutaba, e do Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação (ICENE – UFTM), em Uberaba. O quadro a seguir mostra a relação de obras de Cálculo (que trazem o conteúdo de funções de duas ou mais variáveis) nos cursos de Matemática das três instituições mencionada.

Quadro 1 – Obras mencionadas nas ementas dos cursos de Matemática

	Moda-lidade	**Nome da disciplina**	**Bibliografia presente nas ementas**
ICENP	Licen-ciatura	Cálculo Diferencial e Integral II	[1] BOULOS, Paulo. *Introdução ao cálculo*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. v. 2. [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. São Paulo: LTC, 2001. v. 2. [3] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2. [4] BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002. [5] THOMAS, George B. *Cálculo*. São Paulo: Addison Wesley, 2009. v. 2. [6] SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1987. v. 2. [7] STEWART, James. *Cálculo*. São Paulo: Thomson Learning, 2005. v. 2. [8] MORETTIN, Pedro A. *Cálculo*: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.
	Bacha-relado	Cálculo Diferencial e Integral II	
ICENE	Licen-ciatura	Cálculo Diferencial e Integral III	[1] STEWART, James. *Cálculo*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v. 2. [2] THOMAS, George B. *Cálculo*. 11. ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2002. v. 2. [3] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v. 2. [4] ÁVILA, Geraldo. *Cálculo das funções de várias variáveis*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. [5] GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. *Cálculo B*: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. [6] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v. 3. [7] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1982. v. 2. [8] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2.
FAMAT	Licen-ciatura	Cálculo Diferencial e Integral 3	[1] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo*. São Paulo: LTC, 1988. v. 2 e 3. [2] THOMAS, George B. *Cálculo*. São Paulo: Addison-Wesley, 2002. v. 1 e 2. [3] BOUCHARA, Jacques *et al*. *Cálculo integral avançado*. São Paulo: EdUSP, 1999. [4] WILLIANSON, Richard E.; CROWELL, Richard H.; TROTTER Hale F. *Cálculo de funções vetoriais*. São Paulo: LTC, 1974. v. 1 e 2.
	Bacha-relado		

Fonte: Fichas de disciplina e ementas dos cursos de Matemática do ICENP, FAMAT e ICENE

Desse quadro identificaram-se três livros em comum, em pelo menos dois cursos. São eles: a 6.ª edição do livro *Cálculo*, v. 2, de James Stewart; a 11.ª edição do livro Cálculo, v. 2, de George B. Thomas; e a 5.ª edição do livro *Um curso de cálculo*, v. 2, de Hamilton Luiz Guidorizzi. No entanto, não foi possível ter acesso à 11.ª edição do livro de Thomas, o que levou à obtenção da edição seguinte da mesma obra.

De posse dos livros, foi necessário delimitar quais dados seriam passíveis de análise. Como deveriam ser presentes em ambas as obras, os conteúdos selecionados foram organizados de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 2 – Conteúdos comuns selecionados para análise presentes nos livros

Funções de duas ou mais variáveis	
Função de duas variáveis	Gráfico de função
	Curva de nível
Função de três variáveis	Superfície de nível

Fonte: Arquivo dos autores

Assim, a análise fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e nos fenômenos de congruência e não congruência semântica.

Os livros analisados e seus registros semióticos de função

Nos três livros didáticos investigados, as funções de duas ou mais variáveis são representadas em diferentes registros semióticos. A análise considerou apenas as seções dos livros em que se abordaram as funções de duas ou mais variáveis. Assim, ficou compreendida a análise das páginas 147-162 do livro *Um curso de cálculo*, v. 2 (GUIDORIZZI, 2001); das páginas 814-828 do livro *Cálculo*, v. 2 (STEWART, 2010); e das páginas 209-217 do livro *Cálculo*, v. 2 (THOMAS, 2012).

O Quadro 3 mostra a relação de registros apresentados em cada livro.

Quadro 3 – Tipos de representações discursivas e não discursivas nas obras investigadas

Obra	Representações presentes
Guidorizzi; Stewart e Thomas	▪ Registro de língua natural ▪ Registro de sistema de escrita simbólica ▪ Registro numérico ▪ Registro cartesiano de gráfico de função ▪ Registro cartesiano em curva ou superfície de nível ▪ Registro em diagrama
Stewart	▪ Registro tabular

Fonte: Arquivo dos autores

Em seguida, quantificaram-se as possíveis formas de tratamento e conversões encontradas nos exemplos e exercícios dos livros. Como as conversões se mostram mais triviais em sua identificação, a quantificação de tratamentos necessitou de mais atenção. Dessa forma, fez-se uso de um quadro (Quadro 5) com os possíveis tratamentos adotados em cada registro de função nas atividades e exemplos dos livros.

Os resultados das quantificações foram reunidos na tabela 1.

Tabela[1] 1 – Relação entre tratamentos e conversões de cada obra

Livro/Autor	**Exemplos(f)**						**Exercícios(f)**					
	N.º	%	T	%	C	%	N.º	%	T	%	C	%
Guidorizzi	21	100	9	42,9	13	57,1	25	100	11	44	14	56
Thomas	5	100	2	40	3	60	80	100	18	22,5	62	77.5
Stewart	15	100	2	13,3	13	86,7	75	100	13	17,3	62	82,7

Fonte: Arquivo dos autores

Percebe-se que, apesar de o número de conversões ser maior que o de tratamento em todas as obras, o livro de Stewart se destaca pela possibilidade de ter quase 87% e 83% de conversões nos exemplos e exercícios respectivamente – o que é razoável ter, em razão de sua natureza de planejar que as funções sejam representadas por diferentes registros semióticos, de acordo com a Figura 2 a seguir.

[1] (f: frequência, C: possibilidade de conversões, T: Só realizou tratamentos, %: porcentagem).

Figura 2 – Imagem do livro *Cálculo*, v. 2

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

- verbalmente (pela descrição em palavras)
- numericamente (por uma tabela de valores)
- algebricamente (por uma fórmula explícita)
- visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

Fonte: Stewart, 2010, p. 815

Das conversões quantificadas a obra de Stewart se destaca por ser a única que apresenta relações usando tabela, linguagem simbólica e numérica. Os livros restantes abordam as tradicionais conversões entre registros gráficos e algébricos. Num paralelo histórico, assim como no passado (nem tão distante assim), essa configuração se mostrou muito bem-sucedida, sendo uma articulação necessária para o desenvolvimento de propriedades e conceitos ligados à definição de função. Concorda-se com Duval (2012b) no sentido de que o progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado da criação e desenvolvimento de sistemas semióticos que mais ou menos coexistem entre eles.

Um claro exemplo é quando se quer analisar o comportamento de funções reais de três variáveis na sua representação gráfica. Como esse tipo de função tem gráfico na quarta dimensão, a única maneira de verificar seu comportamento é pelas superfícies de nível, no espaço.

Embora sejam necessárias, essas conversões são em sua maioria não congruentes, em virtude da quantidade de tratamentos internos realizados em um registro de partida antes que se obtenha o registro de chegada. Como o conteúdo de função de duas ou mais variáveis é destinado ao ensino superior, pressupõe-se que o sujeito em aprendizagem já tenha adquirido uma ampla bagagem em apreensão conceitual e tenha tido contato com diversas representações de função. Assim, mesmo que tais conversões não sejam congruentes, a substitutividade entre essas expressões referencialmente equivalentes torna-se necessária e talvez corriqueira no estudo de Cálculo. Não existe outra maneira de conceitualizar as funções de duas ou mais variáveis senão pelo enfrentamento do fenômeno da não congruência semântica.

A coordenação entre os registros de representação em Cálculo

Apesar de a conversão representar um salto entre duas redes semânticas, essa atividade, por si só, não tem importância real para a compreensão dos objetos (DUVAL, 2012a). Deve haver certa articulação entre múltiplos registros, o que justifica a grande variedade de registros semióticos de referência a um mesmo objeto. Nesse sentido, nos três livros analisados, selecionaram-se um problema de congruência e três problemas de não congruência.

O primeiro problema de congruência é relacionado à conversão específica entre registro numérico e registro tabular. Para análise de congruência, é essencial a discriminação de unidades significativas de cada registro, bem como examinar as transformações internas necessárias para a mudança de registro.

Nessa atividade, a conversão parte da tabela para um registro numérico (vide Figura 3). Note que a primeira linha e a primeira coluna fazem o papel respectivamente dos eixos x e y do plano e a localização dos pontos ganha uma nova roupagem. O cruzamento das linhas e colunas corresponde a um ponto específico, que determina o valor da função f ou relação entre temperatura e vento. A volta desse tipo de registro também é congruente, pois é realizada praticamente de maneira imediata.

Figura 3 – Exemplo de conversão congruente

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é −5 °C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de −15 °C sem vento. Portanto,

$$f(-5, 50) = -15$$

Fonte: Stewart, 2010, p. 816.

Na Figura 4, a primeira questão pede que se localize o valor da função no ponto dado. Perceba que não há tantos tratamentos internos para que seja feita a mudança de registros: é uma conversão menos trabalhosa ou com custo cognitivo baixo.

Figura 4 – Exemplo de conversão congruente

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
(b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
(c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?

Fonte: Stewart, 2010, p. 825

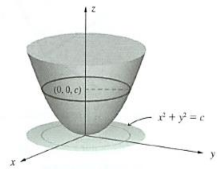
A próxima figura mostra a construção de um paraboloide.

Figura 5 – Exemplo de conversão não congruente

EXEMPLO 5. Esboce o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução

A interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$ é a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ localizada no plano yz. Por outro lado, a interseção do gráfico de f com o plano $z = c$ $(c > 0)$ é a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ de centro no eixo z e localizada no plano $z = c$. Assim, o gráfico de f é obtido girando, em torno do eixo z, a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$. (Por quê?)



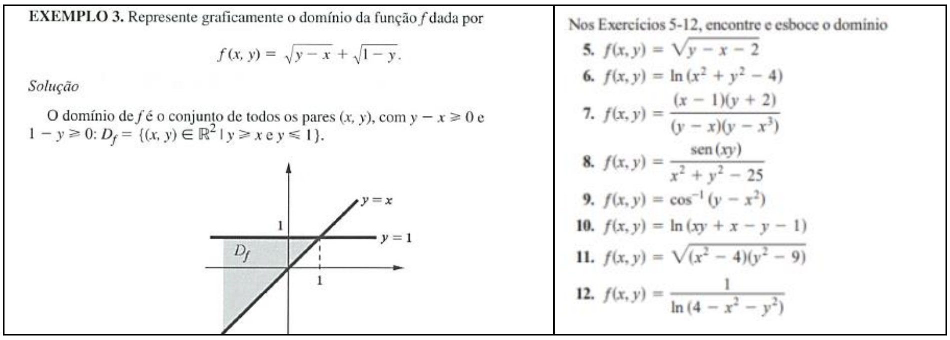
Fonte: Stewart, 2010, p. 825

A mudança antes de ser realizada requer algumas transformações internas, ainda no registro algébrico. Perceba que, como o sujeito não conhece o gráfico de f, ele vai registrando o comportamento da função nas interseções com os eixos – logo, isso devolve equações já conhecidas de parábolas. A última análise é a relação de as curvas de níveis serem todas circunferências – o que significa que as parábolas estão girando em torno do eixo z. Aqui não há o tratamento gráfico de ponto a ponto, mas sim de extensão do traçado (DUVAL, 2011), que foi a revolução das parábolas. A quantidade de transformações internas tornou a construção desse gráfico uma conversão não congruente: atividades dessa natureza não são feitas de imediato.

A volta dessa atividade também não seria congruente – seriam feitos cortes na superfície analisados um a um, um trabalho reverso. As superfícies de revolução apresentam um bom comportamento, porém há superfícies que tornariam a conversão de gráfico para equação bem trabalhosa, elevando o custo cognitivo de tal atividade.

Outra conversão recorrente aos três livros foi a de esboçar os domínios de funções, de acordo com as seguintes figuras:

Figura 6 – Exemplo de conversão não congruente



EXEMPLO 3. Represente graficamente o domínio da função f dada por

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}.$$

Solução

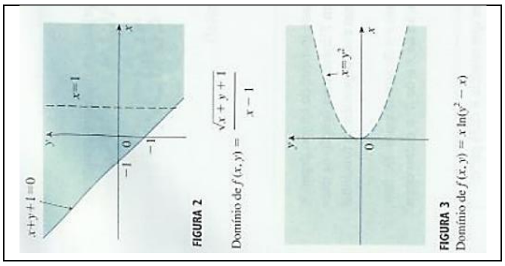
O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y), com $y - x \geqslant 0$ e $1 - y \geqslant 0$: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x \text{ e } y \leqslant 1\}$.

Nos Exercícios 5-12, encontre e esboce o domínio

5. $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$
6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$
7. $f(x, y) = \dfrac{(x - 1)(y + 2)}{(y - x)(y - x^3)}$
8. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$
9. $f(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$
10. $f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1)$
11. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 9)}$
12. $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

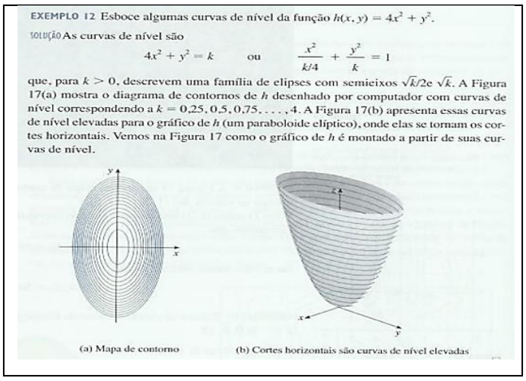
Fonte: Guidorizzi, 2009, p. 148 (à esquerda), e Thomas, 2012, p. 215 (à direita)

Figura 7 – Exemplo de conversão não congruente



Fonte: Stewart, 2010, p. 816

Figura 8 – Exemplo de conversão não congruente



EXEMPLO 12 Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

que, para $k > 0$, descrevem uma família de elipses com semieixos $\sqrt{k}/2$e $\sqrt{k}$. A Figura 17(a) mostra o diagrama de contornos de h desenhado por computador com curvas de nível correspondendo a $k = 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, \ldots, 4$. A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para o gráfico de h (um paraboloide elíptico), onde elas se tornam os cortes horizontais. Vemos na Figura 17 como o gráfico de h é montado a partir de suas curvas de nível.

(a) Mapa de contorno (b) Cortes horizontais são curvas de nível elevadas

Fonte: Stewart, 2010, p. 816

Nesses três exemplos, vê-se o custo cognitivo semelhante ao de esboçar um gráfico cartesiano. O que antecede a mudança de registros são tratamentos internos algébricos para se determinar o comportamento das funções. Feito isso, a figura é esboçada no plano. Aqui, observa-se o que Duval (2009) chama de abordagem de interpretação global de propriedades figurais. As propriedades gráficas agora são analisadas como um todo, e é explicitada a correspondência com os registros algébricos: a equação corresponde ao traçado da curva, os pontos de domínio são os que satisfazem a equação, o plano é todo o $\mathbb{R}^2$ etc. No entanto, antes de proceder a essas correspondências, foram necessárias algumas transformações – o que os caracteriza como uma conversão não congruente

Por fim, a Figura 8 traz a não congruência no estudo das curvas de nível, também análogo às superfícies de nível.

Aqui, as transformações para se obterem curvas ou superfícies seguem passos algoritmizados, que é igualar o valor da função a uma constante real, deixando a nova equação com uma dimensão gráfica a menos. Encontrada a família de equações, parte-se para ao esboço de algumas curvas ou superfícies. Nesse tipo de atividade, também é feita uma interpretação global das propriedades das figuras, com relação à família de curvas ou superfícies e ao gráfico da função original. Por exemplo, quando se está com dificuldade de representar um gráfico de função, pode-se analisar seu comportamento por meio das curvas de nível. Curvas muito próximas significam crescimento da função, picos ou vales. Curvas distantes uma da outra podem significar uma superfície estável etc.

No entanto, apesar de algumas conversões entre registros discursivos e não discursivos não apresentarem congruência semântica, elas são necessárias para que haja a coordenação entre esses registros. Se ela não ocorre, a conceitualização pode acontecer, porém fica restrita a um único registro, e a aprendizagem perde parte de seu significado – o que não é uma alternativa viável.

Considerações finais

A conceitualização, segundo Duval (2012a), repousa na coordenação de pelo menos dois registros semióticos, uma vez que estes podem ser parciais em relação ao objeto representado, e o contato com diversas representações leva à complementaridade dos registros. Portanto, eis a defesa pela articulação entre registros por meio de atividades que favoreçam a conversão.

Outrossim, a história da Matemática mostra-nos que foi a articulação que permitiu o desenvolvimento e o progresso do conceito de função por meio de registros discursivos e não discursivos. Assim, os registros algébricos e gráficos tornam-se indissociáveis, uma vez que ambos coexistem entre si, de forma a se complementarem.

A maioria das atividades analisadas nas seções acerca do conteúdo de função de duas ou mais variáveis dos livros contempla o tratamento, e eles na grande maioria das vezes são exigidos nos registros simbólicos (algébricos). As conversões, que em maior parte são das equações para registros gráficos, apresentaram o fenômeno de não congruência semântica. No entanto, esse fenômeno não pode pôr em risco a não coordenação de diferentes representações, fundamental à atividade cognitiva *noesis*.

No tocante aos livros, aponta-se que: (i) o livro *Cálculo*, v. 2, de Stewart, foi o único que evidenciou a importância de representar as funções em mais representações da habitual dupla de registro gráfico/algébrico, bem como somente ele trouxe à tona registros em tabela. Assim, isso implica mais conversões em suas atividades, o que não torna tímida a articulação entre esses registros para o entendimento de função de duas ou mais variáveis em seus exercícios propostos; (ii) o livro *Um curso de cálculo*, v. 2, de Guidorizzi, apresenta uma proposta a fim de contribuir com o raciocínio dedutivo (que é puramente algébrico), essencial aos professores e matemáticos. Toda essa algebrização tira o protagonismo das representações diferentes de função; e (iii) o livro *Cálculo*, v. 2, de Thomas, e a obra de Stewart oferecem um artifício de sugerir articulações entre registros não discursivos e discursivos usando *softwares* de computador para plotar gráficos, atividades em que a interpretação global de propriedades dessas figuras gráficas em relação a outros registros importa mais que o ato de tracejar ou localizar ponto a ponto no esboço de um gráfico isolado.

Portanto, ao buscar as respostas para entender a maneira como os livros de Cálculo privilegiam as diversas representações de funções de duas ou mais variáveis de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, observou-se que uma maior variedade de registros apresentados implica diretamente a possibilidade de coordenações entre eles, pois mais conversões são propostas.

Ademais, considera-se que não há livro melhor ou pior quanto ao ensino de funções de duas ou mais variáveis, mas sim livros que privilegiam de maneira diferente as representações de função à luz da teoria de Duval.

Referências

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação.** Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Magda Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemátic***a*, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

FACHIN, Odília. **Fundamentos de metodologia.** 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 2.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator,** v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de janeiro: Zahar, 2012.

STEWART, J. **Cálculo.** São Paulo: Thomson Learning, 2010. v. 2.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. São Paulo: Addilson Wesley, 2012. v. 2.

Leandro dos Santos Vieira: Mestrando pelo Programa de Pós Graduação em Educação para Ciência da Faculdade de Ciências (FC) da UNESP (Campus de Baurú) e Licenciado em Matemática pelo Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) em 2018. Tem breve atuação e interesse nos seguintes temas: Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Psicologia da Educação Matemática.

Rogério Fernando Pires: Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP); Mestre Profissional em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP); graduado em Matemática (bacharelado e licenciatura) pela Universidade de Sorocaba. É Professor Adjunto do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (Campus Pontal); professor colaborador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar e durante quinze anos atuou como professor de Matemática na rede pública de ensino no estado de São Paulo. Seus estudos estão voltados para os seguintes temas: Ensino e aprendizagem de Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de problemas e Concepções do conceito de função.