VISUALIDADE, CONCRETUDE, MATEMÁTICA: DO DESENHO NA AREIA À REALIDADE AUMENTADA

Visuality, Concreteness, Mathematics: from drawing in the sand to augmented reality

Andréia Dalcin

Resumo

O artigo discute a visualidade e a concretude enquanto processos imbricados que permeiam historicamente o ensinar e o aprender matemática. São apresentadas quatro cenas com o intuito de explorar como tais conceitos estão presentes em diferentes tempos e espaços, potencializando o exercício da experimentação e da experiência no fazer matemática de alunos e professores. A primeira cena remete ao mundo grego suas ideias e percepções sobre o conhecimento. A segunda cena nos aproxima de Maria Montessori e dos materiais didáticos montessorianos. A terceira cena evidencia o Movimento da Matemática Moderna e as contribuições de Dienes para a compreensão das estruturas matemáticas. A quarta cena enfatiza a presença dos computadores e o impacto da geometria dinâmica e da realidade aumentada no tempo presente. Conclui-se fortalecendo a relevância da escola como espaço de experimentação e experiência.

Palavras-chave: Visualização; Materiais didáticos; História da Educação Matemática; Experiência Matemática

Abstract

The article discusses the visuality and the concreteness as imbricated processes that historically permeate the teaching and the learning of mathematics. Four scenes are presented in order to explore how such concepts are present in different times and spaces, enhancing the exercise of experimentation and experience in doing mathematics by students and teachers. The first scene refers to Greek World, its ideas and perceptions about the knowledge. The second scene brings us closer to Maria Montessori and Montessori didactic materials. he third scene evidences the Modern Mathematics Movement and the contributions of Dienes for the understanding of mathematical structures The fourth scene emphasizes the presence of computers and the impact of dynamic geometry and the augmented reality in the present time. We conclude by strengthening the relevance of school as a space of experimentation and experience.

Keywords: Visuality; didactic materials; History Education Mathematics; experience Mathematics

Alguns apontamentos iniciais: olhar, tocar, sentir ...

O senso comum nos diz que para aprender e ensinar matemática é preciso fazer uso de materiais concretos! Mas o que seriam materiais concretos? Existem “materiais”, não concretos? Como a materialidade se apresenta na matemática, tida como uma ciência abstrata? Para aprender matemática, em especial geometria, é preciso “ver”, “pensar” matematicamente/geometricamente! Por que tais frases permeiam o discurso de professores, estudantes e pais em diferentes níveis de escolaridade, tempos e lugares? Com certeza tais perguntas geram uma série de pesquisas interessantes, algumas já iniciadas, outras ainda por serem feitas. O fato é que é preciso pensar a partir de tais enunciados e trazê-los para serem problematizados nas pesquisas em Educação Matemática, de modo a compreender que conceitos, operações, intenções, teorias estão subjacentes por entre estes enunciados e seus possíveis significados. Na perspectiva de problematizar os conceitos de concretude e visualidade, e dar sustentação a fala apresentada na Mesa redonda “ A visualidade e a concretude no ensino da Matemática” no XIV Encontro Gaúcho de Educação Matemática – EGEM, tenho por objetivo, neste texto, trazer elementos que possibilitem potencializar a ideia de que concretude e visualidade não são processos dicotômicos, mas imbricados e que estão presentes nos processos de ensinar, aprender e produzir matemática(s) ao longo do tempo, não como complementos, mas, metaforicamente, são como as duas faces de uma mesma "moeda". Para tanto apresento algumas ideias relacionadas a determinados momentos históricos, por meio do que estou chamando de Cenas, que no seu conjunto evidenciam correlações entre concretude e visualidade ao longo da História da Matemática e da História da Educação Matemática.

O conceito de concretude é de imediato associado a ideia de algo que tem materialidade, logo para mobilizá-lo é preciso fazer uso do sentido do tato, do tocar, perceber a forma, dimensões... O conceito de concretude remete ao manipular, brincar, jogar, interagir, operar com algo que está fora do corpo. É usual a associação da concretude ao trabalho com as crianças pequenas, afinal são elas que brincam, manipulam objetos do mundo "real" e na relação com tais objetos aprendem matemática. Será? O mundo dos adolescentes e adultos não tem lugar para a concretude? Que conexões é possível estabelecer entre concretude e abstração? Reforço a fala de Nacarato (2005) "Nenhum material didático – manipulável ou de outra natureza – constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática" pois, "não é o simples uso de materiais que possibilitará a elaboração conceitual por parte do aluno, mas a forma como esses materiais são utilizados e os significados que podem ser negociados e construídos a partir deles" (NACARATO, 2005, p. 5).

O conceito de visualidade, por sua vez, é de imediato associado a ideia de algo que se deixa ver, algo não palpável, mas que é acessado pelo sentido da visão, algo que pode ser a representação de uma coisa "material", "real" ou ainda algo imaginado, produzido na mente humana a partir de conexões cerebrais e experiências sensoriais. A literatura sobre visualidade é ampla e diversa, sendo tema em diferentes campos das Artes, Linguagens, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e se faz presente, em menor escala, na Educação Matemática a exemplo de Paulo (2006) e Flores (2007). Um aspecto em comum nos estudos sobre visualidade é a compreensão de que se trata de uma experiência construída individualmente ou coletivamente. Ou seja, a experiência visual é algo aprendido, desenvolvido e culturalmente construído. Aprendemos a "olhar", somos educados a "olhar" e perceber determinadas coisas e não outras. Por outro lado, são também as imagens que nos mostram determinadas representações do mundo. Forma-se assim um ciclo: "enxergamos" para ver e vemos para compreender as diferentes realidades e representações possíveis. Como nos coloca Flores (2007, p.20) "talvez fosse o caso de, antes de tudo, analisarmos o fato de que uma imagem é a representação de um modo de olhar".

Na Matemática a experiência da visualidade está muito presente e associada a Geometria pois o "ver" parece auxiliar no processo de "raciocinar". O exercício de lidar com objetos matemáticos em duas ou três dimensões e suas diferentes representações, perspectivas e pontos de vista acompanha os processos de produzir, ensinar e aprender matemática desde a antiguidade. Nesta perceptiva, apresento a Cena 1, que traz para a discussão uma prática dos filósofos gregos antigos, o desenho na areia.

Cena 1: O desenho na areia e o pensamento matemático no mundo grego

A prática do desenho na areia, por gregos como Euclides e Arquimedes e descrita em livros de história da Matemática, evidencia um exercício interessante de busca por uma "materialidade" do processo de pensamento matemático. Hogben, chama atenção para esta prática antiga.

> "... não resta a menor dúvida que os arquitetos e os coletores de impostos já haviam adquirido à prática de traçar modelos na areia para orientá-los na área de medir sombras e dimensões, muito antes de aparecerem os primeiros homens que colecionaram as figuras traçadas e tentaram formular os princípios fundamentais das artes construtivas. O traçado na areia continua a ser, por séculos e séculos, o único resolutivo dos problemas geométricos. Arquimedes, o maior matemático da antiguidade, estava a fazer

> desenhos na areia, quando foi massacrado pelas legiões romanas. Os métodos pelos quais os homens fizeram as primeiras construções geométricas, com auxílio de cordas e cavilhas, fio de prumo e nível d'água, são bem mais notáveis do que os livros sobre eles escritos" ((HOGBEN, 1970, p. 120).

Se desenha na areia o que se está "pensando", "imaginando", lembrando que imaginar seria "criar uma imagem". Esta prática do desenho, da criação da imagem, associada ao que se quer mostrar em termos de pensamento matemático é tida como um tipo de "demonstração" para os gregos. "Szabó observa que o antigo significado da palavra *deiknumi* (demonstrar) era 'visualizar concretamente'" (BRITO, 1995, p. 26).

Platão em *A República* explica essa conexão entre o pensamento matemático e sua representação, por meio das imagens, do desenho, através de um diálogo entre Sócrates e Glauco. Vejamos um trecho.

> Sócrates — Sem dúvida, compreenderás mais facilmente. Sabes, penso eu, que aqueles que se dedicam à geometria, à aritmética ou às outras ciências do mesmo gênero pressupõem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos e outras coisas da mesma família para cada pesquisa diferente; que, tendo pressuposto estas coisas como se as conhecessem, não se dignam justificá-las nem a si próprios nem aos outros, considerando que elas são evidentes para todos; que, finalmente, a partir daí, deduzem o que se segue e acabam por alcançar, de forma consequente, a demonstração que tinham em vista.
>
> Glauco — Sei isso perfeitamente.
>
> Sócrates — Então, sabes também que eles utilizam figuras visíveis e raciocinam sobre elas pensando não nessas mesmas figuras, mas nos originais que elas reproduzem. Os seus raciocínios baseiam-se no quadrado em si mesmo e na diagonal em si mesma, e não naquela diagonal que traçam; o mesmo vale para todas as outras figuras. Todas essas figuras que modelam ou desenham, que produzem sombras e os seus reflexos nas águas, eles as utilizam como tantas outras imagens, para tentar ver esses objetos em si mesmos, que, de outro modo, só podem ser percebidos pelo pensamento. (PLATÃO, 2000, p. 222-223)

A representação do pensamento grego feita pelo pintor Rafael Sanzio no quadro Escola de Atenas (Figura 1) traz elementos interessantes que evidenciam essa conexão entre "ver" e "raciocinar" na perspectiva dos filósofos gregos da antiguidade clássica. A representação de Euclides chama atenção nesta pintura. Embora Euclides seja conhecido por sua obra os *Elementos*, um dos principais textos já escritos sobre geometria, sua representação na pintura é de Euclides (nº 18 na imagem) desenhando com compasso, diferentemente de outros filósofos como Heráclito (nº13) que aparecem escrevendo. Também Pitágoras (nº6) é representado "copiando" um desenho de uma tabuleta em que aparece um *Tetraktys*, um triangulo perfeito construído a partir de 10 pontos, organizados em quatro filas (1+2+3+4), sendo que o 10 simboliza o regresso à Unidade, a Deus e ao Universo.

Figura 1- A Escola de Atenas (1509-1510)

1- Zenão de Elea	7- Alejandro Magno	13- Heráclito	20 – Ptolomeu
2- Epicuro	8 - Antístenes	14 – Platão	21 – Apeles
3- Federico Gonzaga	9 - Hepática	15- Aristóteles	22 – Prótegenes
4- Anaximandro	10- Ésquines de Esfeto	16 – Diógenes	23 – Homero
5- Averróis	11- Parmênides	17- Plotino	24 – Telange
6- Pitágoras	12- Sócrates	18- Euclides	25 – Apolo
		19 - Estrabón	26 - Atena

Fonte: Imagens disponível em: https://arelarte.blogspot.com/2013/12/la-escuela-de-atenas-un-simbolo-del.html

Outro aspecto a considerar nesta pintura é o uso da perspectiva enquanto estratégia matemática de produção da obra, que de imediato direciona o olhar do observador para o centro do quadro, onde estão Platão (nº14) e Aristóteles (nº15). Platão com o mundo das ideias e os objetos matemáticos imutáveis, existentes fora do tempo e da experiência física, e Aristóteles com sua máxima “Não há nada na nossa inteligência que não tenha passado pelos sentidos”, constituir-se-ão nos pilares da Filosofia da Matemática e influenciarão as compreensões sobre os processos de ensinar, aprender e produzir matemática até os dias de hoje. Embora Rafael tenha pintado esse quadro já no Renascimento é interessante perceber sua preocupação em registrar e associar a prática do pensamento matemático ao desenho, a visualidade da imagem, e não a escrita de números ou símbolos, como acontecerá posteriormente devido ao avanço do formalismo e da linguagem matemática simbólica.

A tese de doutorado de Muriel Lefevre (2001) traz luz para a discussão sobre a visualidade no exercício do pensamento matemático quando nos coloca que os recursos visuais estão envolvidos tanto na produção quanto na transmissão do conhecimento matemático, evidenciando um significado cognitivo e epistêmico no processo de constituição e funcionamento de comunidades de pesquisadores ao produzir matemática. Nesta perspectiva, a visualidade estaria presente tanto na atividade do fazer matemático como na socialização e comunicação do conhecimento produzido. A pesquisa de doutorado de Rosa Monteiro Paulo (2006) avança neste sentido ao analisar em uma perspectiva fenomenológica as falas de alguns matemáticos sobre o processo criativo envolvido no fazer matemática, em especial no uso e produção de diagramas visuais, e evidencia que

> (...)o matemático também busca ver o que está sendo elaborado em seu processo criativo. Nesse ver, as figuras são cruciais. Elas são recursos que possibilitam uma ampliação da teoria, uma generalização dos aspectos particulares. O processo de criação, ou produção matemática, envolve, também esse ver. É importante para o matemático ver o que produz, tanto quanto é importante para o aluno ver o que lhe é apresentado. (PAULO, 2006, p. 117)

E ainda,

> Os diagramas favorecem o entendimento, pois não são apenas uma opção de "tomar conhecimento" buscando oportunidade de visão sem parar para meditar. Eles propiciam o entendimento matemático na medida em que nos põem para refletir sobre o que é visto, na medida em que nos fazem investigar o visível. (PAULO, 2006, p.119)

Tanto os estudos de Lefevre (2001) como de Paulo (2006) nos remetem ao papel da visualidade nos processos de aprender e comunicar a matemática aprendida e trazem contribuições importantes que precisam ser conhecidas e discutidas no âmbito das discussões pedagógicas.

Cena 2 – Montessori, os materiais pedagógicos e as "demonstrações indiretas".

A segunda cena aproxima a discussão sobre concretude e visualidade do ambiente escolar como o conhecemos hoje. O discurso de que para aprender matemática, principalmente se tratando de crianças pequenas, é preciso manipular "materiais concretos" foi de certo modo naturalizado. No entanto, esse enunciado, assim como outros tantos, é passível de diferentes significações, sendo possível entender algumas destas significações na relação com o tempo em que foram produzidos.

A fotografia da Figura 2, traz Maria Montessori (1870-1952) em uma sala de aula montessoriana, crianças, sentadas em seus tapetinhos, manipulando materiais de madeira que integram o conjunto dos materiais que Montessori e seus seguidores foram desenvolvendo/aprimorando, e uma professora que dialoga com Maria Montessori e observa as ações das crianças. O que está em questão não é a fotografia em sim, mas seu potencial simbólico, no sentido que deixa ver alguns pressupostos da pedagogia desenvolvida por Maria Montessori. Cada criança manipula um material, aquele que lhe interessa naquele momento, sendo o processo de aprendizado um exercício individual, demarcado pelo tapetinho, que organiza o espaço de cada criança na sala de aula. No entanto, a criança não está sozinha neste processo, interage e convive com os colegas e a professora, que atua como criadora do ambiente favorável, um ambiente pensado para que cada aluno possa entrar em contato com os elementos matemáticos, uma ação pela "periferia", de observação do aprendizado.

Figura 2 – Maria Montessori

Fonte: https://www.elle.com/it/magazine/storie-di-donne/a28257689/maria-montessori-metodo/

Maria Montessori, assim como Pestalozzi e outros cientistas do final do século XIX, trouxe contribuições fundamentais para que se avançasse na compreensão do aprender e do ensinar Matemática. Suas obras Psico-geometria e Psico-aritmética apresentam diversos materiais e atividades direcionadas para o ensino e aprendizado da matemática, problematizando o exercício mecânico, a memorização, e enfatizando a necessidade do lúdico, da atividade, da ação da criança, e da repetição, como elementos potencializadores do aprendizado da Matemática. Embora os estudos de Montessori inicialmente estivessem direcionados para as crianças que apresentassem algum tipo de dificuldade ou “deficiência” cognitiva, seus métodos e materiais acabariam por ser aplicados com as crianças tidas como “normais”, devido ao bom desempenho que apresentavam ao aprenderem com as atividades e materiais montessorianos.

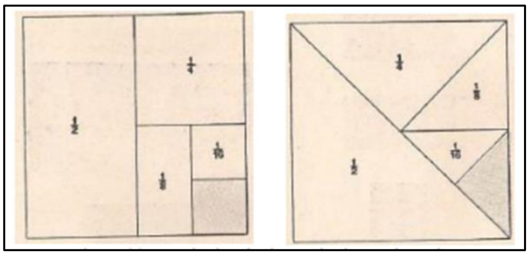
A presença dos materiais traz a discussão sobre os conceitos de concreto e abstrato no ensino e no aprendizado da Matemática. Para Montessori, o aprendizado se dá de forma linear, inicia pela compreensão e manuseio do concreto, sendo necessário explorar a compreensão pelos sentidos, de modo a se chegar a um pensamento abstrato, formal.

> La realidad inicial es en sí misma abstracta y simbólica; líneas, números. Siendo esto difícilmente comprensible para el niño, se hay recurrido en las primeras clases elementales a representaciones materiales ofreciendo a los sentidos cantidades en relación con los números, formas completas en relación con la geometría. (MONTESSORI, 1934, p. 08)

Para Montessori, o conhecimento matemático precisa ser descoberto e essa descoberta acontece através da execução e repetição de várias ações, manipulações de materiais e do desenvolvimento de “demonstrações indiretas”. As demonstrações indiretas seriam um conjunto de ações realizadas com um determinado material que envolvesse por exemplo a adição e subtração de figuras, de modo a se perceber relações, comprovar hipóteses durante a atividade, obter ferramentas e desenvolver ideias que, posteriormente, poderiam ser mobilizadas para a compreensão/construção de alguma demonstração formal. Essas demonstrações indiretas recorriam a experimentação e a visualização, de modo que se articulasse o manuseio do material à visualidade produzida, algo semelhante ao desenhar na areia dos gregos, porém agora com o uso do papel colorido, da madeira, do desenho, de um material planejado para o ensino que induzisse ao convencimento, a formulação de relações e verificação/confirmação da veracidade de uma proposição.

Como exemplo trago a proposta de atividade expressa na Figura 3, por meio da construção de triângulos e quadrados semelhantes.

Figura 3 – Triângulos e quadrados semelhantes

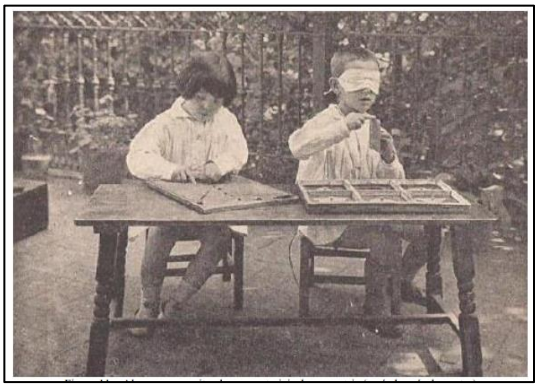


Fonte: Livro Psico-geometria, 1934, p. 99

A atividade consiste na exploração de figuras semelhantes que postas em comparação podem contribuir para a “demonstração indireta” de teoremas, a exemplo de “Se temos dois quadrados, um inscrito e outro circunscrito, o inscrito é igual a metade do circunscrito” (MONTESSORI, 1934, p.100). Esse teorema é um dos primeiros enunciados no livro Psico-geometria, pois poderia ser facilmente percebido pelas crianças ao manusear as figuras equivalentes construídas. A criança, ao fazer algumas experimentações, perceberia que a figura que corresponde a 1/8 do quadrado poderia ser inscrita a figura que corresponde a ¼, verificando assim a veracidade do teorema de forma intuitiva.

Para Montessori o processo de aprendizagem passa pelos sentidos, em especial pelas mãos, que tem um papel de destaque em seus escritos e atividades. As mãos estariam ligadas a vida psíquica e a formação do caráter da criança, pois sem o trabalho manual as crianças poderiam se tornar preguiçosas e sem iniciativa. Pelas mãos a mente humana se revela, se mostra e desenvolve. Montessori cria algumas atividades em que as crianças com os olhos vendados precisam manusear objetos, de modo a buscar padrões gerados pelas sensações táteis. Atividades com lixas de diferentes graduações seriam apresentadas para que as crianças as manuseassem e estabelecem algum tipo de classificação quanto a aspereza. A fotografia da Figura 4 ilustra uma destas atividades desenvolvidas na *Casa dei Bambini*.

Figura 4 – Atividade com vendas nos olhos e lixa



Fonte: Montessori, 1934, p.18 apud SILVA, 2014, p.49

As atividades de manuseio e operação cognitivas de diferentes materiais e objetos reforçam a ideia de que o aprendizado pressupõe a relação concreto-abstrato de forma cíclica, de modo que a intuição matemática se desenvolva e a descoberta do conhecimento ocorra. A relação concreto-abstrato no ensino de matemática será incorporada por diferentes teóricos, dentre os quais Jean Piaget, que foi aluno de Maria Montessori em um curso em Roma entre 1930 e 1931(OBREGÓN, 2006, p.162), e Zoltan Paul Dienes que abordarei na Cena 3.

Cena 3 – Dienes e a matemática moderna: concretude e visualidade no processo de construção das estruturas matemáticas.

Nesta cena, sintetizada pela montagem da Figura 5, que apresenta três fotografias da obra Geometria pelas Transformações de Zoltan Paul Dienes e Edward William Golding e um retrato de Dienes, gostaria de trazer algumas reflexões sobre a visualidade e concretude como elementos presentes no aprendizado das estruturas matemáticas, um dos pilares do Movimento da Matemática Moderna.

Figura 5 – Dienes e a Geometria pelas Transformações

Fonte: Obra “Geometria pelas Transformações” e retrato de Dienes disponível em: https://zoltandienes.com/obituary/

O Movimento da Matemática Moderna (MMM), que se desenvolveu de distintos modos pelos países onde o movimento teve eco ao longo do século XX e, que no Brasil, é, algumas vezes, citado e criticado de forma um tanto reducionista e simplista, propiciou mudanças interessantes no modo de perceber e compreender tanto a matemática como seu ensino e aprendizado ao longo, principalmente dos anos 1970. Um dos aspectos, que considero ser contribuições do MMM, foi a criação dos grupos de estudo sobre Matemática Moderna, entre os quais o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de São Paulo) e o GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre). Por meio destes grupos e a preocupação por aprender a moderna matemática, que estava sendo apresentada para as escolas, teve-se acesso as produções de Zoltan Paul Dienes (1916-2014), autor de vários livros, cursos e palestras para professores. Dienes esteve no Brasil, em São

Paulo e em Porto Alegre[1], ministrando palestras e cursos em que apresentava atividades e materiais didáticos que tinham por objetivo auxiliar os estudantes no aprendizado das estruturas matemáticas. Tais estruturas são derivadas das estruturas-mães desenvolvidas pelo grupo Nicolas Bourbaki[2], que dentre outras questões, problematizou o conceito de espaço em matemática, operando com diferentes geometrias e desenvolveu uma linguagem matemática cada vez mais simbólica e abstrata.

Para a Dienes o processo de aprendizado se dá em seis etapas assim sintetizadas: 1-jogo livre (adaptação a um meio artificial), 2-jogos estruturados e as regras do jogo, 3- semelhança nas estruturas dos jogos – estrutura comum, 4-processo de representação, 5-descrição das representações- linguagem, 6-sistema formal: axiomas, demonstrações, teoremas. Dienes enfatizava: “lembremo-nos sempre de que os conceitos não se ensinam - tudo o que se pode fazer é criar, apresentar as situações e as ocorrências que ajudarão as crianças a formá-los” (DIENES, 1975, p. 1). Neste sentido, se aproxima das ideias de Jean Piaget e da teoria construtivista, ou seja, diferentemente de Montessori, o conhecimento não é descoberto, mas construído.

Dienes defendia que usando materiais manipulativos, jogos e histórias, nas escolas, as crianças poderiam aprender a matemática mais complicada em uma idade mais jovem do que se pensava anteriormente. Dienes criou uma série de materiais didáticos, a exemplo do material Multibase, que trabalha com bases diferentes da base 10 e possibilita que a criança perceba o conceito de base de um sistema de numeração, compreenda o sistema decimal e o valor relativo de um número. Foi um divulgador dos Blocos Lógicos, que foram muito usados para o ensino das estruturas lógicas, e que até os dias de hoje são encontrados com certa frequência nas escolas. E, enfatizava a necessidade de um uso sistemático dos materiais, pois

> “Uma série de experiências bem encadeadas, seguida pela introdução de símbolos, é, indubitavelmente, mais eficaz que uma trama de incessantes tentativas para, e por meio de “explicações”, associar símbolos às respectivas “significações”. Aprende-se mais com uma sequência de acontecimentos” que com uma série de “explicações”. DIENES (1967, p. 13)

Nos livros da obra *Geometria pelas transformações*, do qual foram extraídas as fotografias desta cena, Dienes além de valorizar a necessidade do uso de materiais, chama atenção para o uso do corpo, do movimento e dos sentidos, para além do tato. Várias das atividades tem por propósito desenvolver noções topológicas, enquanto uma das estruturas matemáticas necessárias para a compreensão da matemática e seus conteúdos e conceitos abstratos. Neste sentido é incentivado o caminhar sobre linhas, contornar figuras, traçar formas, linhas, fronteiras e regiões pois, segundo Dienes as crianças “não estão ainda mentalmente preparadas aos desenhos geométricos de formato pequeno realizados sôbre uma fôlha de papel, e é preciso não lhos impor demasiadamente cedo” (DIENES, 1975, p. 7). Percebe-se aqui uma conexão interessante entre a visualidade como sendo algo complexo, associado ao desenho geométrico, e a concretude como uma ação corpórea sobre a realidade física.

As atividades propostas por Dienes e Golding inicialmente priorizam as propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas. Avançam para o estudo das isometrias (rotação e translação) em que transformações são feitas mantendo-se as distâncias e os ângulos. Por fim, objetivam chegar à noção de grupo. (DALCIN, CUNHA, 2015)

Para os autores,

> É de fato difícil imaginar que alguém faça matemática moderna

[1] Zoltan Dienes e a formação de professores em Porto Alegre em tempos de matemática moderna. Artigo disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/view/14141.

[2] Para conhecer mais sobre o grupo Nicolas Bourbaki sugiro a leitura de PIRES, R. C. A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

> sem empregar a estrutura de grupo. Um grupo é essencialmente constituído de um conjunto cujos elementos podem ser de qualquer natureza, desde que exista, definida entre seus elementos, uma operação. Dados dois elementos desse conjunto, essa operação deverá determinar um elemento particular do conjunto. (DIENES; GOLDING, 1972, p.7)

Em síntese, durante o MMM, a matemática escolar vai sendo cada vez mais permeada por uma linguagem matemática simbólica, formal e abstrata. Professores e estudantes precisam se apropriar desta linguagem e de uma nova matemática, a matemática dos conjuntos e suas representações. Essa nova matemática é integrada e legitimada pelos livros didáticos e passa a incorporar o cotidiano de muitas salas de aula. Várias destas práticas acabam por distanciar as estratégias de ensino do uso de materiais didáticos e, por sua vez, da visualidade, que são substituídas por atividades de repetição e memorização de procedimentos de forma descontextualizada e desconectada de uma materialidade, em muitos casos inclusive, com o abandono do ensino de geometria, que passa a ocupar as páginas finais dos livros didáticos.

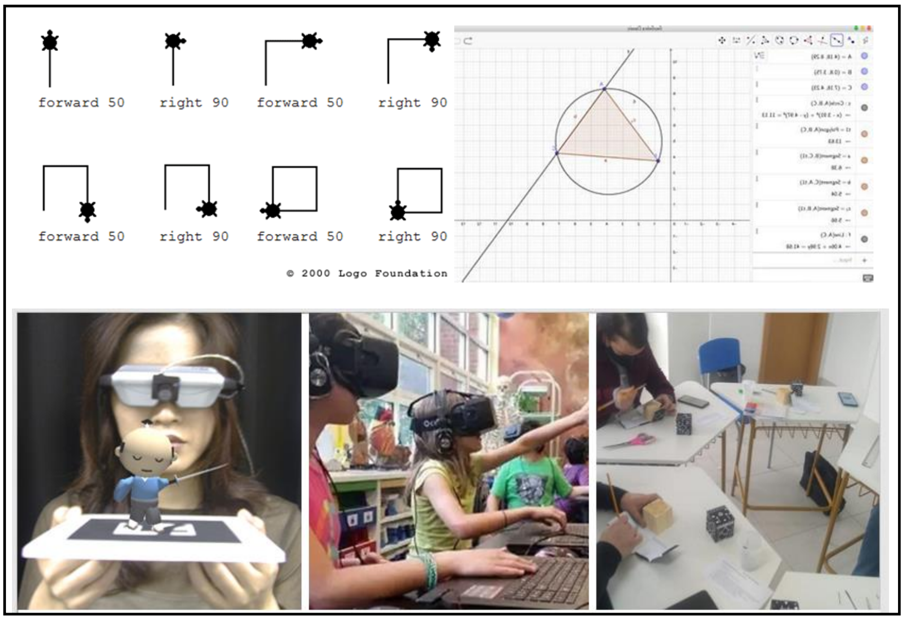
As pesquisas no campo da História da Educação Matemática têm evidenciado que existe um distanciamento entre as intenções que geraram o MMM e como ele se deu no cotidiano das salas de aula e, nesta perspectiva, ainda é possível avançar no sentido de identificar efetivamente os diferentes modos como o MMM foi sendo apropriado, suas contribuições e problemas, bem como suas ressonâncias no tempo presente. Para a discussão deste momento, é importante ressaltar que parece ter havido um certo deslocamento das discussões sobre o uso de materiais concretos e do papel dos sentidos e da visualidade no ensino de matemática, seja nos anos iniciais como finais da escolarização, durante o MMM. Tal suposição precisa ser investigada, sendo a intenção aqui apenas trazer elementos que sinalizem que, mesmo com o predomínio de uma linguagem matemática excessivamente formal e simbólica, essa linguagem, por sua natureza, é algo que precisa ser aprendido, sendo seus símbolos e representações significados. Símbolos matemáticos são imagens visuais, logo precisam ser lidos, compreendidos e significados e neste sentido temos novas possibilidades de discussão no campo da visualidade e concretude que se apresentam, abrindo-se um vasto campo de diálogo com os estudiosos da semiótica, da linguagem e da filosofia.

Cena 4 – Do Logo à realidade aumentada: novas camadas de simulação

Como última cena deste ensaio trago para discussão um elemento que vem causando mudanças radicais nos modos de vida, produção, trabalho e na organização dos tempos e espaços escolares. O computador e toda a engenharia por traz de sua construção e derivada de seu uso, tem ressignificado conceitos basilares do pensamento ocidental a exemplo de "realidade", "materialidade" "visualidade" e "virtualidade".

Para essa cena trago uma narrativa visual (Figura 6), uma sequência de imagens que possibilitam uma construção narrativa sobre diferentes momentos da recente história da presença do computador em sala de aula. As fotografias foram localizadas em uma rápida busca na internet, o que por si só já seria algo impensável a poucas décadas atrás.

Figura 6 –Momentos da presença do computador em sala de aula



Fonte: Google imagens

Como um marco da entrada do computador nas aulas de matemática temos a linguagem LOGO. Ainda nos anos 1960 é desenvolvida por Seymour Papert no Massachusetts Institute of Technology (MIT) a linguagem de programação LOGO. De acordo com Papert, matemático que trabalhou com Jean Piaget, a linguagem LOGO implementa princípios construtivistas no processo de aprendizagem de programação de computadores (BASSO; FICHER, 2020) e potencializa o exercício criativo nas crianças. No final da década de 1970, um grupo de pesquisadores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), liderado pela professora Léa Fagundes, começa a utilizar a linguagem LOGO com o intuito de verificar as dificuldades de aprendizagem de Matemática apresentadas por adolescentes e crianças das escolas públicas. Desde lá os estudos sobre o uso do computador e se potencial pedagógico têm ganho cada vez mais espaço nas universidades, centros de pesquisa e escolas no mundo todo.

O LOGO, assim como outras linguagens e softwares, em especial o geogebra, possibilitam a geometria do movimento, dinamizam o processo de visualização e demonstração e ampliam o conceito de materialidade, para além do objeto físico. Os objetos não estão mais na realidade física, mas em uma outra realidade que se forja na tela do computador.

Observa-se um movimento importante de deslocamento no espaço da escola. Os laboratórios de matemática, onde ficavam guardados e eram manipulados os materiais didáticos de madeira, papel e acrílico, passam a ser substituídos pelos laboratórios de informática, onde os estudantes individualmente ou em pequenos grupos interagem com o computador.

Essa mudança se intensifica com a chegada da internet, que mesmo ainda não sendo totalmente acessível nas escolas, o que começa a mudar devido a pandemia causada pelo covid-19, está presente em dispositivos como notebook, celulares e tablets, que passam a concorrer e substituir aparelhos como o rádio e a televisão.

Também, estamos vivenciando a chegada nas escolas da realidade aumentada, que embora já esteja presente em outras instituições, não tardará a ser incorporada às salas de aulas presenciais e virtuais. A realidade aumentada permite sobrepor elementos virtuais à realidade física.

A visualidade toma uma proporção nunca vista ao ser inserida à virtualidade, acolhendo novas camadas e níveis de percepção. É bom lembrar que a virtualidade não é um conceito novo, o desejo de simular e projetar diferentes realidades acompanha a humanidade a séculos. No campo das artes este conceito está presente há muito tempo, sendo que "o início está na grande tradição – principalmente europeia - de espaços imagéticos de ilusão, encontrados em propriedades privadas em pequenas cidades ou *villas*, como o afresco da Villa Lívia, em Prima Porta [Roma], de cerca de 20ª.C" (GRAU,2007, p.18), em que são criadas estratégias com técnicas de imagem e ilusão para remover os limites e distâncias entre o observador e o espaço imagético. Dentre os espaços de ilusão ressalto os espaços imersivos, aqueles em que o observador pode ter acesso a imagem em 360 º, a exemplo dos cinemas circulares e, mais recentemente, das mídias que possibilitam uma imersão em uma realidade virtual. Na realidade virtual "uma visão panorâmica é associada à exploração sensório-motora de um espaço imagético que produz a impressão de um ambiente 'vivo'" (GRAU, 2007, p.21), sendo possível alterar os parâmetros de tempo e espaço, de modo a ampliar o potencial da experiência imersiva. No universo da virtualidade computacional destaca-se a realidade aumentada.

A realidade aumentada, como nos coloca Rosa (2017, p. 165) "proporciona uma experiência qualitativamente diferente de uma decorrida na tela de um computador, em virtude de os objetos estarem "presos" ou "amarrados" apenas à realidade cibernética. Isto é, há possibilidades qualitativamente diferentes em relação à visualização, sensação e compreensão". Neste sentido, a realidade aumentada possibilita experiências sensoriais e estéticas únicas através de "dispositivos/interfaces que possibilitam a experiência de estar em outro mundo, com objetos que podem, muitas vezes, não fazer parte do nosso cotidiano de forma natural, ao se interagir com essa realidade estando mundanamente situado" (Rosa, 2017, p. 168).

Ao final, a experiência

O que todas as cenas trazidas têm em comum, no contexto da discussão sobre materialidade e visualidade na matemática, seu ensino e aprendizado? Todas as cenas, situadas em seu tempo histórico, remetem a experimentação e a experiência em/com matemática.

A ideia de experiência está inicialmente associada ao sensório-motor, mas para além disso, remeto-me a ideia de experiência estética, que pressupõe uma postura estética, uma abertura para algo a ser experienciado, algo não pronto, não dado, mas em construção, em criação. Bem como coloca Pereira (2011, p. 121), "a experiência estética inicia quando tudo o que sei e tudo o que tenho sido já não bastam e o mundo apela por ser inventado". E ainda, "Podemos ter experiências estéticas com uma pintura clássica, uma imagem sagrada, um desenho na parede de uma caverna, uma fotografia, um filme, um desenho na areia do chão, uma paisagem, uma cena urbana ou, mesmo, com uma imagem apenas imaginada ou sonhada" (PEREIRA, 2011, p. 115). Neste sentido,

> Os efeitos da experiência estética – os valores, os sentimentos, os gostos, os juízos, as representações, as categorias – são as modalidades das experiências que vão se modificando com a própria história, cujo núcleo é sempre essa estranha satisfação que resulta do reconhecimento da capacidade de construir, de produzir sentidos que, quando a gente experimenta, ao mesmo tempo está construindo e produzindo a gente mesmo (MAILLARD, 1998, p. 254 *apud* PEREIRA, 2011, p. 122).

As diferentes cenas convergem para a necessidade de se colocar a criança, o aprendiz, em ação, em movimento: desenhando na areia, manipulando cubos de madeira ou blocos lógicos, interagindo com a tela do computador ou projetando realidades com auxílio de diferentes dispositivos. Em todos as situações em seus diferentes tempos históricos, o aprender e o ensinar se conectam com algum tipo de experimentação, mas até que ponto se constituem em experiências?

Para o filósofo Jorge Larrosa Bondía a experiência "é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. A cada dia se passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece." (BONDÍA, 2002, p.23). Larrosa chama atenção, inspirado em Walter Benjamin, para o fato de vivenciarmos poucas experiências. “A velocidade com que nos são dados os acontecimentos e a obsessão pela novidade, pelo novo, que caracteriza o mundo moderno, impedem a conexão significativa entre acontecimentos” (BONDÍA, 2002, p. 23).

A experiência é algo do sujeito, se relaciona com a existência singular e concreta de uma pessoa, logo cada experiência é única. Por mais que se planejem e simulem experimentos de ensino com o uso da objetos concretos ou imagens, as experiências com a concretude e a virtualidade são particulares. Sendo assim é importante situar o papel do professor que ensina matemática, sendo necessário, talvez, retomarmos ideias já elaboradas por Montessori e por Dienes, a do professor como observador e responsável por preparar o ambiente, preparar as atividades, apresentar desafios e circunstâncias que possam, talvez, quem sabe, levar o sujeito a vivência da experiência.

> Se o experimento é repetível, a experiência é irrepetível, sempre há algo como a primeira vez. Se o experimento é preditível e previsível, a experiência tem sempre uma dimensão de incerteza que não pode ser reduzida. Além disso, posto que não se pode antecipar o resultado, a experiência não é o caminho até um objetivo previsto, até uma meta que se conhece de antemão, mas é uma abertura para o desconhecido, para o que não se pode antecipar nem “pré-ver” nem “pré-dizer”. (BONDÍA, 2002, p. 28)

Por fim, a discussão aqui sintetizada não se esgota, pelo contrário, o leitor provavelmente foi tomado por várias outras cenas que lhe vieram à mente, relacionadas as suas experiências e experimentações com a visualidade e a concretude em suas práticas relacionadas ao ensinar, aprender ou produzir matemática(s). As cenas/momentos e ideais, desejo, terem sido disparadoras, provocadoras de um exercício de reflexão sobre os conceitos de concretude e visualidade que, embora usados com certa frequência nos discursos, tanto por professores como pesquisadores, ainda precisam ser mais estudados, explorados e (re) significados. Nesta perspectiva, um olhar para o passado, seja mais distante ou ressente, pode ajudar neste processo, ao trazer elementos que evidenciem a presença, as diferentes compreensões e potências de tais conceitos nos diferentes contextos. Esta aí, me parece, uma das principais potências e contribuições da História da Educação Matemática para a Educação Matemática.

Referências

BONDÍA, J. L. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Revista Brasileira de Educação, n.19, p. 20-28, Jan/Fev/Mar/Abr, 2002. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1413-24782002000100003 .

BRITO, A. J. Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995. 187p.

BASSO, M.; FISCHER, M.C.B. Léa da Cruz Fagundes: Uma expert na formação de professores, em tempos de aprendizagem mediada por tecnologias digitais de informação e comunicação. Revista de Matemática, Ensino e Cultura, v.15, n. 34, p. 226-242, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n34.p226-242.id272

DALCIN, A; CUNHA. R. As fotografias na obra “A Geometria pelas Transformações” em tempos de matemática moderna: diálogos possíveis. Revista Eventos Pedagógicos, v.9, n.2, p. 743-766, ago/out, 2018. Disponível em: http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/article/view/3205

DIENEZ, Z. P. A Matemática Moderna no Ensino Primário. Lisboa: Livros horizontes, 1967.

DIENEZ, Z. P. As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática. São Paulo: E.P.U., Brasília: I.N.I.,1975.

DIENEZ, Z. P; GOLDING, E. W. A Geometria pelas Transformações: São Paulo: Herder, 1972.

GRAU, O. Arte visual: da ilusão à imersão. São Paulo: Editora UNESP, Senac: São Paulo, 2007.

LEFEBVRE, M. Images, Écritures et Espace de médiation. Étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens. Thèse de Doctorat en Sciences de l’Information et de la Communication, Université Strasbourg I, 2001. Disponível em: https://science-societe.fr/lefebvre-muriel-images-ecritures-et-espace-de-mediation/

FLORES, C. Olhar, saber, representar: sobre representações em perspectiva. São Paulo: Musa editora, 2007.

HOGBEN, L. Maravilhas da Matemática. Porto Alegre, Editora Globo, 1970.

MONTESSORI, Maria. Psico-geometria – el studio de la Geometría basado en la Psicologia Infantil. Barcelona: Casa Editorial Araluce, 1934.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. Revista de Educação Matemática. v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.

PAULO, R. M. O significado epistemológico dos diagramas na construção do conhecimento matemático e no ensino de matemática. 2006. xi, 192 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006.

PEREIRA. M. V. Contribuições para entender a experiência estética. Revista Lusófona de Educação.v.18. n.18, p.111-123, 2011. Disponível em: https://revistas.ulusofona.pt/index.php/rleducacao/article/view/2566

PLATÃO. A República. Coleção os Pensadores. Editora Nova Cultural, 2000.

OBREGÓN, N. Quién fue María Montessori. Quién fue María Montessori. Contribuciones desde Coatepec, núm. 10, enero-junio, 2006, pp. 149-171 Universidad Autónoma del Estado de México Toluca, México. Disponible em: https://www.redalyc.org/pdf/281/28101007.pdf

ROSA, M. Insubordinação Criativa e a Cyberformação com professores de Matemática: desvelando experiências estéticas por meio de tecnologias de Realidade Aumentada. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 8, n. 4, p. 157-173, 21 dez. 2017. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1500

SILVA, S. O Modelo Pedagógico de Maria Montessori: uma releitura de suas práticas para o ensino de Matemática. 106p. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/101412

Andréia Dalcin: Doutorado em Educação, professora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, andreia.dalcin@ufrgs.br